

Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

● **Newman, James R.** (edited and with an introduction by): **What is science?** New York: Simon & Schuster 1955. VIII, 493 p. \$ 4,95.

● **Behnke, Heinrich, Walter Lietzmann und Wilhelm Süß** (herausgegeben von): **Mathematisch-physikalische Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität.** Bd. 4, Heft 3/4 (S. 161—320). Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1955.

(Zur Zielsetzung dieser Sonderberichte vgl. dies. Zbl. 58, 242.) Das vorliegende Heft enthält folgende Beiträge: **Paul Zühlke**, Walter Lietzmann zum 75. Geburtstage (S. 161). — **Hans Hermes**, Heinrich Scholz zum 70. Geburtstage (S. 165). — **Adolf Kratzer**, Fünfzig Jahre Relativitätstheorie (S. 171). — **M. Pinl**, Begriff und Ziel der einheitlichen Feldtheorien (S. 183). — **Wilhelm Fucks**, Theorie der Wortbildung (S. 195). — **Helmut Röhl**, Ein Bericht über N. Bourbaki, „Les structures fondamentales de l'analyse“ (S. 213). — **G. Pickert**, Ein neuer Vorschlag für die Anfängervorlesung über analytische Geometrie (S. 239). — **H. Behnke** und **G. Hasenjäger**, Gilt $12:2 \cdot 3 = 18$ oder $12:2 \cdot 3 = 2$? (S. 250). — **Herbert Meschkowski**, Elementare Behandlung von Lagerungsproblemen (S. 256). — **M. Pinl**, Warum messen wir in der euklidischen Geometrie Winkel durch transzendente, Längen jedoch durch algebraische Funktionen (S. 263)? — **Richard Stender**, Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Schule (S. 270). — **Arnold Baur**, Die Sätze von Pascal und von Brianchon (S. 281). — **Walter Kronau**, Zur analytischen Darstellung der Kegelschnitte in der Vektorrechnung (S. 289). — **Johannes Blume**, Die elektrische Induktion (S. 297). — **Joseph Meurers**, Das Experiment in der astronomischen Forschung (S. 302). — Tagungsberichte (S. 309). Buchbesprechungen (S. 313). Bücherschau (S. 318). — Den beiden ersten Beiträgen von **P. Zühlke** zum 75. Geburtstag von W. Lietzmann und von **H. Hermes** zum 70. Geburtstag von H. Scholz (beide Jubilare sind mit den Semesterberichten aufs engste verbunden) schließt sich, von **A. Kratzer** verfaßt, ein Rückblick über die Entwicklung der Relativitätstheorie von 1905—1955 an. Ihm ist als Nachschrift ein Nachruf auf A. Einstein angefügt (gestorben am 18. 4. 1955). — **M. Pinl** gibt einen instruktiven Überblick über den Stand der Entwicklung einheitlicher Feldtheorien, auf der einen Seite der Feldtheorie für Gravitation, Mesonen und Elektromagnetismus, auf der anderen Seite für die Wellenfelder der Quantentheorie. Abschließend werden die Versuche berührt, von der einen zur anderen Feldtheorie Brücken zu schlagen. — **W. Fucks** berichtet von seinen anderweitig erschienenen Arbeiten über eine mathematische Analyse der Wortbildung aus Silben [vgl. insbesondere *Studium generale* 6, 506 (1953); *Mathematische Analyse von Sprachelementen, Sprachstil und Sprechen*, Köln 1955]. Nach einer Darlegung der Verhältnisse bei der Bildung von Wörtern aus Silben an künstlichen Sprachmodellen werden mittels statistischer Methoden an Hand von literarischen Werken und mit einem eigens konstruierten Gerät (Abwandlung des Galtonschen Bretts) für 8 natürliche Sprachen und für die Kunstsprache Esperanto die Verteilungen experimentell ermittelt und dann das Verteilungsgesetz theoretisch abgeleitet. Verf. erhält eine Poissonverteilung, die die experimentellen Ergebnisse gut wiedergibt. — **H. Röhl** gibt einen lesenswerten Überblick über den systematischen Aufbau der heutigen Mathematik mittels Ordnungs-, algebraischen und topologischen Strukturen, wie er von der unter dem Pseudonym N. Bourbaki arbeitenden Gruppe französischer Mathematiker durchgeführt wurde. Die Dar-

stellung hält sich an die Bände I—IV von Bourbaki. — **G. Pickert** entwickelt in enger Verbindung mit der Anschauung ein Axiomensystem mit den Grundbegriffen Punkt und Vektor für den Aufbau der affinen Geometrie, wie er ausführlich in seinem Buch dargestellt ist (Analytische Geometrie, 2. Aufl., vgl. dies. Zbl. 51, 375). — **H. Behnke** und **G. Hasenjäger** weisen zu der im Titel genannten Fragestellung axiomatisch nach, daß für den Ausdruck $a : b \cdot c$ keine Konvention existiert bzw. allgemein anerkannt und daher ein solcher Ausdruck mathematisch sinnlos ist. Sie bemerken abschließend, daß —wenn ein Bedürfnis nach einer Sinngebung vorliegen sollte — man sich für $(a:b) \cdot c$ entscheiden würde. — **H. Meschkowski** behandelt die beiden Aufgaben, auf der Einheitskugel n kongruente Kugelkappen so zu lagern, daß die Kugel ganz bedeckt und die Lagerungsdichte möglichst klein wird, bzw. n inkongruente, sich nicht überdeckende Kugelkappen so zu lagern, daß die Lagerungsdichte möglichst groß wird. Sein Verfahren ist elementar und geeignet, mit geringen Modifikationen die Aufgabe in der elliptischen, euklidischen und hyperbolischen Geometrie zu lösen. — **M. Pinl** beantwortet die im Titel seines zweiten Beitrages aufgeworfene Frage (unter Hinweis auf die bereits von F. Klein in seinem Buch über Nichteuklidische Geometrie gegebene Antwort) durch den Nachweis, daß das absolute Gebilde der euklidischen Geometrie nicht in sich dual ist. — **R. Stender** erörtert Ziele und Möglichkeiten eines Lehrgangs über mathematische Statistik in einer Arbeitsgemeinschaft einer höheren Schule. Unter Würdigung aller theoretischen und praktischen Schwierigkeiten berichtet er über einen in einer Oberschule bereits erprobten Weg, der sich der neuen Darstellung von H. Cramér (The elements of probability theory and some of its applications, dies. Zbl. 58, 116) anschließt und in G. Bangen-R. Stender, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik (dies. Zbl. 58, 342) veröffentlicht ist. — **A. Baur** gibt für jeden der beiden genannten Sätze zwei Beweise. Der erste benutzt durchweg die geometrischen Verwandtschaften und führt beide Sätze auf Symmetrieverhältnisse bei Kegelschnitten zurück; der zweite ist rein rechnerisch (vektoriell), aber nur für den Satz von Brianchon übersichtlich und durchsichtig. — **W. Kronau** gibt eine Vektordarstellung der Kegelschnittsgleichungen mit dem Ziel, den Zusammenhang zwischen Vektor- und Koordinatenschreibweise so durchsichtig zu machen, wie es für Geraden- und Ebenengleichung bereits geläufig ist. — **J. Blume** erörtert einen Weg zur Behandlung der elektrischen Induktion im Schulunterricht, der die dabei auftretenden begrifflichen Schwierigkeiten berücksichtigt und grundsätzlich klärt. — **J. Meurers** berichtet über die Möglichkeit, in der astronomischen Forschung, deren Objekte dem direkten Zugriff entzogen sind, Experimente an Modellen auszuführen, und gibt hierfür einige Beispiele. Sein inzwischen erschienenes Buch (Astronomische Experimente, Berlin 1956) untersucht die Fragestellung systematisch und ausführlich. *H. Rohrbach.*

Kurepa, G.: Sur les principes de l'enseignement mathématique. Enseignement math.-phys. Beograd 4, 133—140 u. französ. Zusammenfassg. 141 (1955) [Serbisch].

Marković, Dragoljub: Rapport sur l'organisation du travail scientifique. (Mathématiques.) Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 7, 130—135, französ. Zusammenfassg. 135—136 (1955) [Serbisch].

Masani, P.: The pedagogical importance of Huntington's axioms for the complex number system. Math. Student 23, 127—143 (1955).

Verf. versucht an Stelle des mehr konstruktiven Aufbaues der reellen und komplexen Zahlen nach dem Vorgehen von Hardy (Pure Mathematics, 10. Aufl., Cambridge 1952, Kap. 1 und 3) die stark betonte axiomatische Methode von Huntington auf weitere Gebiete im Rahmen der elementaren Algebra und der Zahlentheorie anzuwenden.

H. P. Künzi.

Kurepa, G.: Direct introduction of fractional powers. Antisquare and anticube of a number. Enseignement math.-phys. Beograd 4, 142—146 u. engl. Zusammenfassg. 146 (1955) (Kroatisch).

● Bell, S. W. and H. Matley: *Mathematics for higher national certificate. I.* London: Cambridge University Press 1955. 293 p. 15 s.

● Belgodère, Paul: *Choix d'ouvrages mathématiques.* 4^e éd. avec la collaboration de Madeleine Estève et Colette Martin. (Documentation Mathématique. Fasc. 27.) Paris: Secrétariat Mathématique 1955. 14 p.

La présente liste, où un certain arbitraire n'a pu être évité, indique un choix d'ouvrages susceptibles de figurer dans le fonds mathématique d'une bibliothèque scientifique moyenne (bibliothèque de professeurs de lycée, petite bibliothèque universitaire, etc.) d'être couramment consultés, et d'être indiqués comme ouvrages de travail pour les lecteurs non encore spécialisés dans une branche particulière des Mathématiques.

● Estève, Madeleine: *Liste des titres des périodiques régulièrement reçus par la bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré (Cabinet du Département des Sciences mathématiques).* (Documentation Mathématique. Fasc. 29.) Paris: Secrétariat Mathématique 1955. 13 p.

● Estève, Madeleine: *État des périodiques figurant à la bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré (Cabinet du Département des Sciences mathématiques), rangés, dans chaque pays, par ordre alphabétique des titres.* (Documentation Mathématique. Fasc. 30.) Paris: Secrétariat Mathématique 1955. 27 p.

Dimić, P.: *Bibliographie des livres mathématiques, publiés en langues des peuples yougoslaves jusqu'à l'année 1918. II—IV.* Enseignement math.-phys. Beograd 4, 125—132, 191—196, 251—256 u. französ. Zusammenfassg. 132, 196, 256 (1955) [Serbisch].

Suite de la Bibliographie dont la première partie est publiée dans *L'Enseignement math.-phys.* Beograd 1 (1955).]

Geschichte.

● Natucci, Alpinolo: *Sviluppo storico dell'aritmetica generale e dell'algebra.* Napoli: Pellerano-Del Gaudio (ohne Jahresangabe). 367 p. 10 fig. litografia L 2500, \$ 4.—.

Verf. gibt einen allgemeinen Überblick, ohne auf Einzelheiten näher einzugehen. Der Inhalt der ersten drei Teile (Zahlbegriff im Altertum, im Mittelalter und in der Renaissance) ist in den (vom Verf. nicht einmal erwähnten) Bänden I/III der Geschichte der Elementarmathematik von J. Tropfke (Berlin—Leipzig 1930, 1933; dies. Zbl. 16, 145) weit eingehender, gründlicher und vollständiger dargestellt; hingegen bringen die weiteren drei Teile (moderne Ausdehnung des Zahlbegriffs, moderne arithmetische Theorien, logische Axiomatisierung der Mathematik) eine Fülle wertvollen Materials über die Weiterentwicklung im 19. und 20. Jh., die in den üblichen Darstellungen zur Mathematikgeschichte fehlt.

J. E. Hofmann.

Bruins, E. M.: *On Babylonian geometry.* Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 16—23 (1955).

Besprechung einiger besonders interessanter Aufgaben in babylonischen geometrischen Texten. Dabei entwickelt der Verf. aus der Näherungsformel für das allgemeine Viereck $\frac{1}{2}(a+b) \cdot \frac{1}{2}(c+d)$ unter der Annahme, daß eine Transversale, die zwei Punkte auf c und d verbindet, die Gesamtfläche im Verhältnis $Q:P$ teilt, eine Formel für die Länge dieser Transversalen t , nämlich $t^2 = (Pa^2 + Qb^2)/(P+Q)$. Werden c und d durch t in dem gleichen Verhältnis geteilt, dann entspricht diese Näherungsformel der exakten gleichlautenden Formel im Trapez ($a \parallel b \parallel t$). Wird die Fläche halbiert ($P=Q$), dann wird $t^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. — Weiterhin zeigt der Verf., daß man bei rechtwinkligen, durch eine Parallele zu einer Kathete geteilten Dreiecken die gesuchten Stücke auch ohne Verwendung von Ähnlichkeitssätzen bekommt, indem man von Flächenbetrachtungen ausgeht, wobei man sogar den Pythagoreischen Lehrsatz ableiten kann. Dies ist richtig. Doch möchte Ref. auf dem Weg zu der von dem Babylonier in der Aufgabe VAT 8512 vorgerechneten Endformel lieber dem einfacheren Vorschlag von Gandz (dies. Zbl. 32, 241), auf den auch Huber

(dies. Zbl. 64, 1) gekommen ist, folgen; hier spielt gerade der genannte Transversalenwert eine Rolle. Ein Druckversehen ist zu korrigieren: Auf S. 19, 13. Z. v. u. muß das lineare Glied der Gleichung für die Unbekannte b_2 positiv sein. *K. Vogel.*

● **Reymond, Arnold:** *Histoire des sciences exactes et naturelles dans l'antiquité gréco-romaine.* 2^e éd. revue et complétée. Avec une préface de **Léon Brunschvieg.** Paris: Presses Universitaires de France 1955. VIII, 258 p. et 36 fig. dans le texte. 800 fr. fr.

Dieses Werk Reymonds, der 1954 seinen 80. Geburtstag feierte, erschien 1924 in erster Auflage; 1927 kam eine englische Übersetzung heraus. Der Verf. lehrte an den Universitäten Neuchâtel und Lausanne Geschichte der Naturwissenschaften. Das klar und präzise geschriebene Buch ist Frucht dieser Lehrtätigkeit. Die 2. Auflage ist gegenüber der ersten um kurze Kapitel über die prähistorische Zeit und über die Beziehungen zwischen okkulten und rationalen Wissenschaften vermehrt. Das Werk beginnt mit den Leistungen der Ägypter und Babylonier in Mathematik, Astronomie, Physik und Naturgeschichte. Dann folgt das wissenschaftliche Schaffen der Antike in diesen Fächern (einschließlich Medizin) während der hochgriechischen Zeit (650 bis 300 v. Chr.), in der alexandrinischen Epoche (300 v. Chr. bis 1. Jhdt. n. Chr.) und im römischen Zeitalter (1. bis 6. Jhdt. n. Chr.). Endlich werden in vier Kapiteln Prinzipien und Methoden der Mathematik, der Astronomie, der Mechanik und Physik und der Chemie und Naturgeschichte in der griechisch-römischen Antike behandelt. Ein glänzend geschriebenes Schlußkapitel ist der Frage des Verhältnisses zwischen mathematischen Wissenschaften und Physik beiden Griechen gewidmet. Hier wird auch trefflich klargelegt, wie die Griechen mit den Begriffen ihrer Geometrie den Bewegungsvorgängen nicht zu Leibe zu rücken vermochten. Der Schritt von dem *fluxus formarum* des Aristoteles zu den *formae fluentes* konnte ja erst im 14. Jahrhundert getan werden. An einzelnen Stellen des an sich guten Buches wünschte man, daß der Verf. die neuesten Forschungsergebnisse mitgeteilt hätte. Insbesondere hätten die Arbeiten O. Neugebauers (1934ff.) über die babylonische Mathematik (pythagoreischer Lehrsatz, älteste Geschichte der Arithmetik und Algebra) berücksichtigt werden müssen. Auf S. 13 wird die kaum begründete Cantorsche Vermutung, daß die Ägypter das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 kannten und zur Konstruktion eines rechten Winkels benutzten, als Tatsache gebracht. Heron versetzen wir heute nach O. Neugebauer (1938) besser in die Zeit um 60 n. Chr. (S. 91). Die Wissenschaftsverachtung der Römer darf nicht übertrieben werden (S. 103). Im Literaturverzeichnis hätten noch einige sehr wesentliche Werke angeführt werden müssen. Auf O. Neugebauers Schriften wiesen wir bereits hin. Es fehlen auch die Bücher von Eva Sachs (Die fünf platonischen Körper, Berlin 1917), E. Frank (Platon und die sogenannten Pythagoreer, Halle 1923), B. L. van der Waerden (Ontwakende Wetenschap, dies. Zbl. 35, 145, 70, 241) und O. Becker (Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, dies. Zbl. 55, 242). Von H. Diels (Antike Technik, Leipzig 1914) erschien 1924 die 3. Aufl., von A. Mansion (Introduction à la physique aristotélicienne, Louvain 1913) kam 1946 eine 2. Aufl. heraus. Im ganzen aber ist Reymonds „Histoire“ ein sehr brauchbares Werk, das die vielfältigen historischen Probleme mit großem didaktischen Geschick darstellt.

F. Klemm.

Stamatis, Evangelos: *Über den euklidischen Satz, Kreise verhalten sich zueinander, wie die Quadrate über den Durchmesser.* Praktika Akad. Athen 30, 410—414 (1955) [Griechisch mit deutscher Zusammenfassg.].

Freie Wiedergabe (mit deutscher Zusammenfassung) des Satzes Euklid XII, 2 („Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser“), den schon Hippokrates von Chios (ca. 450 v. Chr.) — wohl unbewiesen — zum Ausgang (*ἀρχή*) seiner Untersuchung über die Mönchen genommen hatte. Verf. bringt zum 2. Teil der Euklidischen Beweisführung einen neuen eigenen Beweis; hier steht in der

deutschen Zusammenfassung ein störender Druckfehler: „Im Kreise beschreiben wir“ statt — wie richtig im neu-griechischen Text —: „περιγράφουεν“. Auch sollte es „beliebig klein“ statt „unendlich klein“ heißen. *K. Vogel.*

Irani, Rida A. K.: Arabic numeral forms. Centaurus 4, 1—12 (1955).

Die Entwicklung der arabischen Ziffernschreibweise wird an Beispielen aus 10 Handschriften des 11. bis 18. Jahrhunderts dargestellt. Da die Araber stets die indischen Ziffern (Dezimalsystem) und die Zahlbuchstaben (Sexagesimalsystem) nebeneinander gebraucht haben, wurden vom Verf. solche Manuskripte ausgewählt, in denen beide Schreibweisen vorkommen. Die vergleichenden Tafeln zeigen für die meisten Ziffern eine erstaunliche Konstanz der Schreibweise. Man hat sich meist bemüht, durch entsprechende individuelle Gestaltung die Verwechslung der zum Teil sehr ähnlichen Buchstabenformen (z. B. für 3 und 8, für 10 und 50) möglichst auszuschließen — ein Grundsatz, der in modernen Drucken nicht immer beachtet wurde. Neben den mit der Schriftentwicklung i. w. parallel gehenden Veränderungen der Zahlbuchstaben und ihrer Ligaturen im Laufe der Zeit sind am bemerkenswertesten die allmähliche Vereinfachung der Schreibweise der indischen 5 und der erst im 16. Jahrhundert erfolgende Übergang vom Kreis zum Punkt als Wiedergabe der Null im indischen System. Die ältesten Formen der Null im Sexagesimalsystem zeigen noch deutlich die Herkunft von dem entsprechenden Zeichen in den griechischen Papyri; später hat sich auch hier eine Kursivform durchgesetzt.

H. Hermelink.

Dilgan, H.: Hassan Ben Haithem et les manuscrits existants dans les bibliothèques d'Istanbul. 966—1039. Bull. techn. Univ. Istanbul 8, 36—41 (1955).

● **Hosoi, Sch.: A history of mathematical concepts in the east and the west.** [Tozai Sugaku Shisoshi.] 2nd ed. Tokyo: Kyoritsu Publishing Co. Ltd. 1955. 225 p. Y 300. [Japanisch].

Japanese mathematical thoughts before Meiji Era can be compared with the European one in the field of Algebra, Geometry and Calculus. By this, peculiar qualities of Japanese mathematics in the days of closed Japan (seclusion in Edo Era) shall be described more clearly than the simple history of Japanese mathematics. This book is aimed at the comparison of Japanese mathematical concepts and European.

S. Hosoi.

Sudo, Toshiichi: A study of the history of mathematics in Ryu-kyu. I—III. Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo 4, 165—177 (1954), 5, 67—82, 179—189 (1955).

This essay consists of three parts as follows: I. Local mathematics in Ryu-kyu Islands. II. Ryu-kyuan knotted cords. III. Ryu-kyuan numerals. — Part I: Some hand-written books of mathematics in Ryu-kyu and their contents had been introduced by Japanese officials in early Edo-Era. These were elementary practical mathematics remained up to Meiji-Era without any development. — Part II: Ryu-kyuan knotted cords „Wara-Zan“ (calculation and notation by the use of straw) is a peculiar custom in Ryu-kyu Islands. It had been used in various numerical records, sometimes used in map, calendar, bulletin etc. — Part III: Ryu-kyuan notation by means of the ciphers or pictographs in the trade and taxation. — On the whole, this essay is an interesting study of a numerical concept among the primitive people.

S. Hosoi.

● **Thomas of Bradwardine. His tractatus de proportionibus.** Its significance for the development of mathematical physics. Edited and translated by H. Lamar Crosby jr. Madison: University of Wisconsin Press 1955. XI, 203 p. \$ 3,50.

Der erstmals von P. S. Ciruelo (Paris 1495, Venedig 1505), dann von G. Tannstetter (Wien 1515; in dieser Ausgabe nicht berücksichtigt) herausgegebene wichtige Traktat (er enthält die bedeutungsvolle mathematische Neuausdeutung des Aristotelischen Fallgesetzes) wird hier nach vier Handschriften (Paris, Vaticana,

Brügge, Oxford) ediert und mit trefflicher englischer Übersetzung versehen. Einleitend gibt Verf. eine sorgfältige biographische Skizze, eine Übersicht über die dem Verf. bekannten Mskr. und Druckschriften Bradwardines (die hier erwähnte anfängerhafte Quadratura circuli stammt nicht von Thomas), eine Inhaltsangabe des vorliegenden Traktats und einen (beim heutigen Kenntnisstand wohl noch etwas verfrühten) Überblick über die Bedeutung des Werkes und sein Weiterwirken. Hier schreibt er (wohl irrtümlich) dem Joh. Dumbleton, einem Schüler des Thomas, die (allerdings rein intuitive) Erkenntnis zu, daß eine konstante Kraft eine konstante Beschleunigung erzeugt.

J. E. Hofmann.

Tenca, Luigi: Le relazioni epistolari fra Giov. Domenico Cassini e Vincenzo Viviani. Atti Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., Anno 243°, Rend., XI. Ser. 2, Nr. 2, 162—177 (1955).

Wiedergegeben sind Stücke aus 20 Briefen der Jahre 1661/1702, enthalten in der Laurenziana (cod. Ashb. 1811) und in der Bibl. Naz. Florenz (Disc. 252/57; Post. Gal. 276). Es handelt sich um astronomische Fragen, um Bücher, Besorgungen usw. Bedauerlich, daß versäumt wurde, den zahlreichen interessanten Anspielungen in den einzelnen Briefen genauer nachzugehen. Zwei sinnstörende Druckfehler: S. 163 wird erwähnt, daß das erste Auftauchen von 34 Cygni . . . dal Baicco (sollte heißen: Baiero) beschrieben worden sei; S. 167 ist von Huygens' Büchlein De conoidi (muß heißen: circuli) magnitudine die Rede. Auf jeden Fall wäre eine vollständige und kommentierte Edition aller gewechselten Briefe wünschenswert.

J. E. Hofmann.

● **Dunnington, G. Waldo: Carl Friedrich Gauss: Titan of science. A study of his life and work.** New York: Exposition Press 1955. XI, 479 p. \$ 6,00.

Diese auf sehr gründlichen archivalischen Studien beruhende Biographie geht vor allem auf die Lebensumstände und die allgemeine Bedeutung des Gaußschen Wirkens ein. Besonders bedeutungsvoll sind die zahlreichen beigegebenen Illustrationen, die Zusammenstellung der angekündigten Vorlesungen, die Genealogie, die Aufzählung der von Gauß 1795/98 von der Göttinger Bibliothek entliehenen Werke, die Bibliographie und das sorgfältige Register. Zwei kleine Ergänzungen: Unerwähnt geblieben sind E. A. Roloff: C. F. Gauß, dies. Zbl. 27, 195 und J. E. Hofmann: dies. Zbl. 27, 3. Dort wäre auch Näheres über die Beziehung zu K. L. v. Lecoq (1754/1829) und die frühesten geodätischen Studien von Gauß zu finden gewesen.

J. E. Hofmann.

● **Andreev, K. S.: Ausgewählte Arbeiten.** Einleitung und Anmerkungen von D. Z. Gordevskij. Chaŕkov: Verlag der Staatlichen A. M. Goŕkij-Universität zu Chaŕkov 1955. 92 S. R. 3,25 [Russisch].

D. Z. Gordevskij, der zuvor bereits eine eigene kleine Schrift über K. S. Andreev veröffentlicht hatte (s. Gordevskij, Andreev, ein bedeutender russischer Geometer, dies. Zbl. 66, 7) gibt an der vorliegenden Stelle folgende Werke seines Landsmannes neu heraus: a) Über Scharen von Kegelschnitten, 32 S., entnommen aus dem 4. Teil der Dr.-Dissertation von Andreev aus dem Jahre 1879. b) Über die Ponceletschen Vierecke, 32 S., eine aus zwei Teilen bestehende Arbeit der Jahre 1881 und 1884, c) Einige Bemerkungen über die Auflösung eines bestimmten Integrals nach einer von Čebyšev vorgeschlagenen Formel, 23. S. aus dem Jahre 1883. Wie Gordevskij in einem anschließenden Kommentar ausführt, bedeuten die in a) behandelten Dinge in der heutigen Sprache einfache Tatsachen aus der Geometrie des P_5 , auf dessen Punkte man die Kegelschnitte abbildet.

W. Burau.

Popa, Ilie: Les sources du premier traité d'arithmétique moldave. Acad. Republ. popul. Romîne, Fil. Iași, Studii Cerc. ști., Ser. I 6, Nr. 1/2, 115—121, russ. u. französ. Zusammenfassg. 121, 121—122 (1955) [Rumänisch].

Le premier traité d'arithmétique moldave est celui publié à Iassy en 1795, ayant pour titre „Elementi Aritmetici“ et comme auteur, Amfilochie Hotiniul. Le traité contient aussi des no-

tions de géométrie et a été rédigé, au moins, en 1784. Amfilochie ne fait aucune mention en ce qui concerne les sources. L'A. de la présente note a réussi d'identifier les sources qui sont: 1. A. Conti, *Elementi Aritmetici*, Roma 1753. 2. Benincasa, *Almanacco Perpetuo* (réédité par Beltrano), Bassano 1720. 3. *** *L'Economia del cittadino in villa* (environ 1640). Par les problèmes, proposés et résolus par Amfilochie, par les multiples préoccupations de même que par son langage clair et attractif, le traité d'Amfilochie est de beaucoup supérieur à ses modèles.

Französ. Zusammenfassg.

Cîmpăn, Florica T.: Les premiers livres d'algèbre imprimés en roumain. Acad. Republ. popul. Romîne, Fil. Iași, Studii Cerc. ști., Ser. I 6, Nr. 1/2, 143—153, russ. u. französ. Zusammenfassg. 153, 153—154 (1955) [Rumänisch].

Le plus ancien livre d'algèbre en langue roumaine, intitulé „Elemente de matematică, de Aga Gh. Asachi, partea II-a Algebra“, fut publié par cet auteur en 1837 à Iassy. Le livre contient 122 pages et pour l'écrire, Asachi s'est servi du manuel de Bézout [Cours de mathématiques. III^{ème} partie: Algèbre et application. Paris, 1799], mais seulement en l'utilisant comme modèle sans le traduire. Le style du livre quoique vif, reflète les difficultés rencontrées par l'auteur pour établir une terminologie mathématique propre, fait qui le détermine à utiliser certaines expressions qu'on sentait empruntées. Le second manuel d'algèbre parut en Valachie et fut imprimé à Bucarest en 1841 sous le titre „Elemente de algebră după Appeltauer“, tradusă din latinește cu oarecare modificățiuni de P. Poenaru, Directorul școalelor naționale. En 1852 D. Pavel publica un nouveau livre d'algèbre, traduit d'après l'ouvrage de Sonnet *Algèbre élémentaire*. La version roumaine contient comme supplément une partie originale intitulée „Adaos, dintr'ale traducătorului“. Dans l'Adaos, nous trouvons des chapitres d'algèbre supérieure suivis de problèmes intéressants et attractifs. On peut citer encore: „Aritmetica și Algebra culeasă și prelucrată de G. I. Manu“ Paris, 1863, „Elemente de Algebră“ de E. Bacaloglu, București, 1866, 1870 și 1871, „Curs de algebră elementară“ de E. Anghelescu, București, 1869 et „Tratat de Algebră elementară“ de C. Serbescu, București, 1876. En Moldavie c'est seulement en 1864 que paraît un nouveau livre d'algèbre: „Algebră pentru cursul învățămîntului secundar“ de Dr. Fr. Moenik, tradusă de N. I. Blindul. Ce manuel a été utilisé jusqu'en 1872, date à laquelle paraissent d'autres livres dus à des professeurs de spécialité C. Climescu et N. Culianu. En 1818 Gh. I. Roșiu publica encore „Curs de Algebră propus la școala filor de militari din Iași“.

Französ. Zusammenfassg.

Polvani, Giovanni: Il moto della terra, filo storico della relatività. Cinquant'anni di relatività 1905—1955, 3—28 (1955).

Eine geschichtliche Darstellung der Theorie der Bewegung der Erde in Beziehung zur Relativität.

J. A. Schouten.

Straneo, Paolo: Genesi ed evoluzione della concezione relativistica di Albert Einstein. Cinquant'anni di relatività 1905—1955, 29—134 (1955).

Im ersten Kapitel wird die Vorgeschichte bis 1900 behandelt. Das zweite Kapitel bezieht sich auf die Periode 1900—1906 und im dritten Kapitel wird eine Übersicht gegeben der Entwicklung der einfachen und der allgemeinen Relativitätstheorie.

J. A. Schouten.

Hereigonja, Mira: Les pseudonymes de R. J. Bošković. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 7, 109—116, français. Zusammenfassg. 116—118 (1955) [Kroatisch].

Basseches, Bruno: Beiträge zu einer Bio-Bibliographie für Joaquim Gomes de Sousa (1829—1863). Soc. Paranaense Mat., Anuário 2, 18—25 (1955) [Portugiesisch].

Natucci, Alpinolo: In memoria di Alfredo Capelli (1855—1910). Giorn. Mat. Battaglini 83 (V. Ser. 3), 297—300 (1955).

Saltykow, N.: Henri Poincaré (1854—1912). Srpska Akad. Nauka, Zbornik Radova 43, mat. Inst. 4, 1—13, français. Zusammenfassg. 13 (1955) [Serbisch].

Gürsey, Feza: Albert Einstein (1879—1955). Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul. Sér. A 20, 101—104 (1955).

Varga, O.: Tibor Szele (1918—1955). Acta Univ. Debrecen. Ludovico Kossuth 2, 5—6, engl. Zusammenfassg. 6—7 (1955) [Ungarisch].

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Ottaviani, Giuseppe: Sul concetto di infinito nella matematica applicata. Giorn. Ist. Ital. Attuari 18, 59—70 (1955).

Der Verf. unterscheidet den Begriff der beliebig großen Zahl von den etwa im

Sinne Poincarés aufgefaßten Begriffen des potentiell oder aktual Unendlichen und erläutert diese Unterscheidung an Hand der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Finanzmathematik, wobei er sich unter anderem auf eine Cantellische Bemerkung bezieht, nach der eine Form des Gesetzes der großen Zahlen auch im Fall einer nur endlich additiven Wahrscheinlichkeit gilt. *K. Krickeberg.*

Freudenthal, Hans: Die Begriffe Axiom und Axiomatik in der Mathematik und Physik. Simon Stevin 30, 156—175 (1955) [Holländisch].

Der Aufsatz ist die Wiedergabe eines Vortrags für Lehrer, gehalten im Jahre 1948. Verf. bespricht die Entwicklung der Begriffe Axiom und Axiomatik von Euklid bis Hilbert. Für die klassische Deutung des Wortes „axioma“ wird hingewiesen auf die lateinische Etymologie aus der ursprünglichen Bedeutung von $\acute{\alpha}\lambda\omega\mu\alpha$ — Würde — die wohl nicht die richtige ist. [Ref.: Die Entstehung der speziellen Bedeutung des Wortes ist leichter einzusehen, wenn man die Entwicklung von $\acute{\alpha}\lambda\omega\mu\alpha$ in Betracht zieht (Belege bei Soph., Hdt., Pl., Arist.). Eine endgültige Darstellung ist jedoch nicht vorhanden.] Die erste klare Fassung des für die Axiomatik wichtigen Begriffes der impliziten Definition meint Verf. bei Gergonne (1818) gefunden zu haben. Zum Schluß wird in suggestiver Weise die tiefe Brouwersche Einsicht in das Wesen der Axiomatik erwähnt. *B. van Rootselaar.*

Devidé, Vladimir: Ein Axiomensystem für die natürlichen Zahlen. Arch. der Math. 6, 408—412 (1955).

Verf. beweist das folgende Axiomensystem für die Menge N der natürlichen Zahlen: 1. N ist nicht leer. — 2. Es besteht eine eindeutige Abbildung $a \rightarrow a^+$ (Nachfolger von a) von N in N . — 3. Höchstens ein Element von N hat kein Urbild (Vorgänger). — 4. Keine (nichtleere) Untermenge von N fällt mit ihrem Bilde zusammen. — Das Axiomensystem ist mit dem von Peano äquivalent und stellt eine weitere Abschwächung der von N. Jacobson (dies. Zbl. 44, 260) bereits abgeschwächten Fassung des Peano-Systems dar. *H. Rohrbach.*

Sierpinski, W.: L'axiome du choix pour les ensembles finis. Matematiche 10, 92—99 (1955).

Let $[n]$ denote the axiom of choice for sets with n elements, i. e. that for each family Z of disjoint n element sets there exists a set containing one and only one element of each set of Z . The author proves various theorems, some due to himself, others due to Mostowski and Tarski, concerning the various axioms $[n]$, e. g. for all k, n , $[k, n] \rightarrow [n]$; if $[p]$ is true for all primes $p \leq n$ then $[k]$ is true for all $k \leq n$; $[2] \& [3] \equiv [6]$. *J. C. Shepherdson.*

Goodstein, R. L.: On non-constructive theorems of analysis and the decision problem. Math. Scand. 3, 261—263 (1955).

The author shows that a certain constructive form of Rolle's theorem does not hold. *J. C. Shepherdson.*

Leśniak, K.: Philodemos' treatise on induction. Studia logica 2, 77—111 [Polnisch], 112—147 [Russisch] u. engl. Zusammenfassg. 147—150 (1954).

Stonert, H.: Report of the first conference of logicians. Studia logica 2, 251—265, russ. u. engl. Zusammenfassg. 265—266 (1955) [Polnisch].

Ajdukiewicz, K.: Concerning the plan of research in the field of logic. Studia logica 2, 267—276 u. russ. und engl. Zusammenfassg. 276—277 (1955) [Polnisch].

The author comments the main trends of research in the field of logic distinguished by the Polish Academy of Science as specially important, and discusses the organization of the planning and of the research work in logic for the next year. Englische Zusammenfassg.

Mostowski, Andrzej, A. Grzegorzcyk, S. Jaśkowski, J. Łos, S. Mazur, H. Rasiowa and R. Sikorski: The present state of investigations on the foundations of mathematics. Rozprawy mat. Nr. 9, 48 p. (1955).

Mostowski, A.: Der gegenwärtige Stand der Forschungen über die Grundlagen der Mathematik. Prace mat. 1, 13—55 (1955) [Polnisch].

Vgl. die Besprechung der Übersetzung in diesem Zbl. 57, 243.

Wang, Hao: On formalization. *Mind*, n. Ser. 64, 226—238 (1955).

● **Hermes, H.:** Vorlesung über Entscheidungsprobleme in Mathematik und Logik.

Münster/Westf.: Aschendorffsche Verlagsbuchhandlung 1955. 140 S. DM 10,—.

● **Prior, A. N.:** Formal logic. Oxford: At the Clarendon Press 1955. IX, 329 p. sh.*35/—.

Das Lehrbuch wendet sich an Studenten und weitere Interessenten der formalen Logik. Es ist weniger mathematisch als allgemein-logisch (jedoch auf mathematisch-exakter Grundlage) ausgerichtet und setzt keine Vorkenntnisse voraus. — Teil I behandelt mit der Aussagenlogik und der Theorie der Quantifizierung die allgemeinen Grundlagen der modernen formalen Logik. Dabei wird hauptsächlich die klammerfreie Symbolik von Łukasiewicz und nur stellenweise die Symbolik der *Principia Mathematica* verwendet. Der Leser erhält einen guten Überblick über verschiedene formale Systeme der Aussagenlogik, insbesondere auch über Systeme mit der Implikation, mit einer „falschen“ Grundaussage und mit variablen aussagenlogischen Operatoren. Besonderer Wert ist auf Vollständigkeitsbeweise gelegt. Die wichtigsten Beweise sind ausgeführt oder doch in den Grundzügen angedeutet. Für weitergehende Beweise ist die Literatur angegeben. Auch die Bedeutung der Metalogik ist erwähnt. Die Theorie der Quantifizierung befaßt sich zunächst mit der Prädikatenlogik 1. Stufe, dann mit der Aussagenlogik und mit einem reinen Äquivalenzkalkül. — Teil II ist der traditionellen Logik und den Entwicklungen, die sich daran anschließen, gewidmet, wobei hauptsächlich die Schriften von Aristoteles, den Scholastikern und A. de Morgan sachlich und historisch gewürdigt werden. Logische Beziehungen, die sich auch mit den Mitteln des I. Teils darstellen lassen, erscheinen hier in einer etwas anderen Betrachtungsweise als im I. Teil. — Der III. Teil des Buches behandelt die Modalitätenlogik (mit den Systemen von Lewis und gewissen Modifikationen derselben), nicht-klassische Systeme der Aussagenlogik (insbesondere die dreiwertige und die intuitionistische Logik) und schließlich auch eine allgemeine extensionale Logik höherer Stufe. In diesem letzten Abschnitt wird auf die logizistischen Grundlagen der Arithmetik, auf die Paradoxien und ihre Vermeidung durch die Typentheorie eingegangen. — Abschließende Übersichten über die Axiomatik aller erwähnten formalen Systeme und über die zitierte Literatur mit den Lebensdaten der Autoren tragen zu dem Wert eines gut lesbaren Lehrbuches bei.

Kurt Schütte.

Nelson, Raymond J.: Weak simplest normal truth functions. *J. symbolic Logic* 20, 232—234 (1955).

Des Verf. Vereinfachung (dies. Zbl. 66, 256) von Quines Methode zur Bestimmung „einfachster“ äquivalenter Normalformen (dies. Zbl. 48, 245) wird übertragen auf den Fall, daß nur Äquivalenz unter gewissen Prämissen (Konjunktionen von negierten Fundamentalformen) verlangt ist.

G. Hasenjaeger.

Ridder, J.: Die Gentzenschen Schlußverfahren in modalen Aussagenlogiken. I, II, III, III^{bis}. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 58, 163—169, 170—177, 270—274, 275—276 (1955).

Es handelt sich um eine Fortsetzung von früheren Abhandlungen des Verf. (dies. Zbl. 40, 147; 45, 151; 56, 10). Nach der Gentzenschen Methode wird die Entscheidbarkeit gezeigt für den modalen Kalkül $A_1^{(g)}$ sowie für den Kalkül $A_1^{(b)}$, welcher aus $A_1^{(g)}$ entsteht durch Hinzunahme des Axioms $NX \subset NVX$. Dieses Ergebnis wird benutzt, um auf einfache Weise Entscheidungsverfahren zu gewinnen für $A_2^{(g)}$, $M^{(g)}$, $I^{(g)}$, $K^{(g)}$ und entsprechende Kalküle $A_2^{(b)}$, ..., sowie einige weiteren Kalküle. Darüber hinaus werden Entscheidungsverfahren für alle Sequenzen $\nu \rightarrow \mathfrak{A}$ dieser Kalküle gegeben. Dies liefert Entscheidungsmethoden insbesondere für den Heyting'schen Aussagenkalkül, den Johanssonschen Minimalkalkül und für den Lewis'schen Kalkül S 5. Schließlich werden Beziehungen zwischen Entscheidungsverfahren für Lewissche und korrespondierende Kalküle angegeben.

H. Hermes.

Rose, Alan: A Gödel theorem for an infinite-valued erweiterter Aussagenkalkül. *Z. math. Logik Grundl. Math.* **1**, 89—90 (1955).

The "infinite-valued erweiterter Aussagenkalkül" which the author considers has as truth values all real numbers between 0 and 1, with 1 as the designated truth value. The primitives are the Lukasiewicz implication function C , a ternary function G and the universal quantifier Π . The truth value of $\Pi_p \Phi(p)$ is defined to be the g. l. b. of the truth value of $\Phi(x)$ for $0 \leq x \leq 1$; the truth value $g(x, y, z)$ of $Gpqr$ when p, q, r take truth values x, y, z respectively is defined as follows: $g(1, 1, 2^{-w}) = 1$ ($w = 0, 1, 2, \dots$), $g(1, 0, z) = 1$ ($z \neq 1$), $g(2^{-v}, 2^{-w}, 2^{-uw}) = 1$ ($v = 1, 2, \dots$, $w = 1, 2, \dots, \lambda_v$), where the v^{th} sequence in an enumeration of all finite sequences of non-negative integers is $u_{v0}, u_{v1}, \dots, u_{v\lambda_v}$; in all other cases $g(x, y, z) = 0$. Let T be the set of those formulae whose truth value is 1. The author proves that T is not recursively enumerable and hence cannot coincide with the set of provable formulae of a recursively formalized system. His proof uses a diagonal argument similar to the Gödel incompleteness proof; for each recursively enumerable set F of formulae he shows how to construct a formula A_F such that the truth value of A_F is 1 if and only if A_F does not belong to F . *J. C. Shepherdson.*

Hintikka, K. Jaakko J.: Notes on the quantification theory. *Soc. Sci. Fennica, Commentations phys.-math.* **17**, Nr. 12, 13 p. (1955).

Ergänzung zu einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **67**, 1). Es wird zunächst die Vollständigkeit eines auf den Theoremen II und III a. a. O. beruhenden Verfahrens nachgewiesen; dabei kommt zwar das Auswahlaxiom zur Anwendung, es wird jedoch betont, daß der Nachweis der Inkonsistenz für eine endliche Satzmenge, wenn überhaupt möglich, auf Grund des Verfahrens immer in endlich vielen Schritten gelingen muß. Es werden dann die entsprechenden Ergebnisse für unendliche Satzmenge eingehend diskutiert. Zum Schluß wird untersucht, wie ein Nachweis der Inkonsistenz mit Hilfe des Verfahrens praktisch aussehen wird. Eine ähnliche Untersuchung des Ref. wird zitiert. In diesem Zusammenhang möchte Ref. auch die Arbeiten Kreisels über die sog. „no-counterexample interpretation“ der klassischen Logik erwähnen. *E. W. Beth.*

Machara, Shôji: The predicate calculus with ε -symbol. *J. math. Soc. Japan* **7**, 323—344 (1955).

Es handelt sich um den Satz: „Ein Axiomensystem, das im Rahmen des gewöhnlichen Prädikatenkalküls widerspruchsfrei ist, bleibt widerspruchsfrei, wenn das ε -Symbol mit dem logischen Axiomenschema $F(a) \rightarrow F(\varepsilon x F(x))$ hinzugekommen wird.“ Dieser Satz deckt sich mit dem zweiten ε -Theorem aus Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik II (dies. Zbl. **20**, 193). Das ε -Theorem, für das im H.-B. ein Beweis nach Methoden von Hilbert und Ackermann angegeben ist, dient u. a. dazu, die symbolische Auflösung von Existenzformeln mittels Funktionszeichen durchzuführen. Verf. geht umgekehrt vor, indem er zunächst diese symbolische Auflösbarkeit innerhalb des gewöhnlichen Prädikatenkalküls unter Einbeziehung der Funktionszeichen nachweist und dann hieraus den betreffenden Satz erschließt. Hierdurch und durch Zugrundelegung des Sequenzenkalküls LK von Gentzen (dies. Zbl. **10**, 145, 146) ergeben sich gewisse methodische Vereinfachungen. Ebenso beweist Verf. die (auch in H.-B. gegebene) Verallgemeinerung des Satzes unter Einbeziehung der Gleichheitsaxiome. Außerdem wird eine einfache Ausdehnung des Satzes auf den durch Quantoren für Aussagenvariablen erweiterten Prädikatenkalkül vorgenommen. — Der im Hilbert-Bernays vorliegende Beweis wird nicht zitiert. *Kurt Schütte.*

Reichbach, Juliusz: Completeness of the functional calculus of first order. *Studia logica* **2**, 213—228 [Polnisch], 229—244 [Russisch] u. engl. Zusammenfassg. 245—250 (1955).

Der vorliegende Beweis des Gödelschen Vollständigkeitssatzes und des Satzes

von Löwenheim-Skolem ist verwandt mit den Beweisen von Henkin (dies. Zbl. 34, 6) und Rasiowa-Sikorski (dies. Zbl. 40, 293; 45, 295). An Stelle des im letztgenannten Beweis mit topologischen Mitteln bewiesenen Hilfssatzes über die Existenz gewisser Primideale in Booleschen Algebren tritt hier der folgende Hilfssatz: Sei α_0 eine nicht-beweisbare Formel des Prädikatenkalküls. Dann existiert eine α_0 enthaltende Menge I von Formeln des Prädikatenkalküls mit den Eigenschaften: 1. Wenn $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in I$, so ist $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_m$ nicht beweisbar; 2. Zu jeder Formel $\beta \notin I$ existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in I$, so daß $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_m \vee \beta$ beweisbar ist; 3. Wenn $(\forall a_n) \alpha \in I$, so existiert eine freie Variable x_k , so daß die durch Substitution von x_k für a_n aus α entstehende Formel zu I gehört. Der Beweis dieses Hilfssatzes ist ganz elementar. Daher hat auch der gesamte Beweis denselben elementaren Charakter wie der von Henkin, besitzt aber im übrigen die Vorteile des Beweises von Rasiowa-Sikorski vor dem Henkinschen. E. Burger.

Łoś, Jerzy: The algebraic treatment of the methodology of elementary deductive systems. *Studia logica* 2, 151—211, poln. u. russ. Zusammenfassg. 211—212 (1955).

A valuable expository paper concerned with models of elementary deductive systems (i. e. systems in which the logic used doesn't transcend the first-order predicate calculus with identity), and related matters. The principle technique consists of the elimination of quantifiers by Skolem functions combined with the author's generalizations of Lindenbaum's construction of a model for systems complete with respect to a consequence relation using only rules of the propositional calculus. Wherever possible, specific syntactico-deductive details are replaced by general properties of the consequence operation on sets of formulas — the entire treatment being quite elegant. In addition to conventional topics connected with models such as the theorems of Gödel („Every consistent system has a model“) and Löwenheim-Skolem, the paper contains many other topics treated by this uniform procedure, some with original points of view, such as: the characterization of systems, extensions of systems by addition of constants, the principle of ordering and Gödels theorem, the non-effectiveness of Gödels theorem, the power (cardinality) of systems, isomorphism of models, categoricity, categoricity in power (i. e. isomorphism of models of the same power), and special models of the arithmetic of natural numbers (i. e. models non-isomorphic with the natural numbers). T. Hailperin.

Beth, E. W.: Remarks on natural deduction. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 58, 322—325 (1955).

Um die Ableitbarkeit einer prädikatenlogischen Formel aus gegebenen Formeln zu beweisen, kann die Konstruktion eines Gegenmodells in bestimmter Weise versucht werden. Das Scheitern eines solchen Versuches führt zu einer abgeschlossenen semantischen Tafel. Der Hauptsatz der vorliegenden Arbeit besagt: Eine abgeschlossene semantische Tafel läßt sich als Ableitung in einem formalen System F des natürlichen Schließens interpretieren, und umgekehrt liefert jede Ableitung im formalen System F eine abgeschlossene semantische Tafel. Verf. weist darauf hin, daß dieses System F große Ähnlichkeit mit anderen bekannten konstruktiven Systemen der Prädikatenlogik besitzt und sehr einfache Beweise der metamathematischen Hauptsätze ermöglicht. Abschließend wird das Problem aufgeworfen, bei gegebener Ableitung im Rahmen der klassischen Logik zu entscheiden, ob sich eine analoge Ableitung im Rahmen der intuitionistischen Logik bilden läßt. Kurt Schütte.

Mostowski, A.: A formula with no recursively enumerable model. *Fundamenta Math.* 42, 125—140 (1955).

In Verschärfung einer Arbeit von Mostowski (dies. Zbl. 53, 3) ergibt sich eine widerspruchsfreie Formel F (bzw. F') des Prädikatenkalküls der ersten Stufe ohne Modell in P_1 (bzw. ohne Modell P_1 und ohne Modell in Q_1). F ist Konjunktion eines Axiomensystems für freie Semigruppen, ergänzt durch eine formale Beschreibung von zwei rekursiv aufzählbaren, nicht rekursiv trennbaren Mengen (vgl. Kleene,

dies. Zbl. 38, 31). F' enthält zu jedem Grundbegriff von F auch das Komplement. — Die von Kreisel (dies. Zbl. 53, 200) vorgeschlagene Modifikation [zu jedem Grundbegriff Φ von F adjungieren: $\forall y z \wedge x ((\Phi_1 x y \leftrightarrow \neg \Phi_1 x z) \vee (\Phi x \leftrightarrow \Phi_1 x y))$] würde eine Formel F'' ohne Modell in $P_1 \cup Q_1$ liefern. *G. Hasenjaeger.*

Kreisel, G. and Hao Wang: Some applications of formalized consistency proofs. *Fundamenta Math.* 42, 101—110 (1955).

Verff. behandeln Widerspruchsfreiheitsbeweise in einer formalisierten Zahlentheorie F [hier im allgemeinen Z von Hilbert-Bernays I, p. 371 (dies. Zbl. 9, 145) bzw. Z_μ von II, p. 293 (dies. Zbl. 20, 193)] für Teiltheorien $F^{(n)}$, die durch ein geeignetes Einfachheitsmaß $m(B) \leq n$ für Beweise B abgegrenzt sind. — Resultate: Satz 1. Keine widerspruchsfreie Formel H aus Z liefert als Folgerungen alle Sätze von Z (vgl. Mostowski, dies. Zbl. 53, 201, wo H als Z -Satz vorausgesetzt wird). — Sätze 2, 3. Sei $F = Z$ oder $= Z_\mu$, F' ein System, in dem die arithmetisierte Widerspruchsfreiheit $\text{Con}(F)$ von F beweisbar ist. In F' gibt es Beweise B_n für alle Aussagen $\text{Con}(F^{(n)})$ mit $m(B_n) \leq d_0$, während nach Gödel für F -Beweise B'_n von $\text{Con}(F^{(n)})$ immer $m(B'_n) > n$ ist. Vgl. mit Gödel (Menger-Colloquium, dies. Zbl. 3, 414). — Satz 4. Wenn für eine arithmetische Einsetzung („Modell“) F' in ein endliches Axiomensystem F im Prädikatenkalkül F' in Z beweisbar ist, so ist $\text{Con}(F)$ in Z beweisbar. Anwendung: Das endliche System S der Mengenlehre mit Klassenvariablen (Kreisel, dies. Zbl. 53, 200) hat in Z_μ kein „Modell“ im Sinne von Satz 4. — Satz 5. In Z_μ ist $\text{Con}(Z_\mu) \rightarrow \text{Con}(S)$ beweisbar. Eine Anwendung der Beweismethode (Ref.) liefert: In Z_μ ist $\text{Con}(ZF) \rightarrow \text{Con}(NB)$ beweisbar, wo ZF , NB Axiomensysteme der Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel bzw. von Neumann-Bernays sind. *G. Hasenjaeger.*

Mostowski, A.: Contributions to the theory of definable sets and functions. *Fundamenta Math.* 42, 271—275 (1955).

Einige Sätze über die Klassifikationen von (Graphen von) arithmetischen Funktionen im Sinne von Verf., dies. Zbl. 31, 194. $P_n^{(k,l)}$, $Q_n^{(k,l)}$ sind die Klassen der in $P_n^{(k+l)}$, $Q_n^{(k+l)}$ enthaltenen Funktionen (Argumente k -Tupel, Werte l -Tupel). I. $P_n^{(k,1)} \subseteq Q_n^{(k,1)}$, II. $P_{n+1}^{(k,1)} - Q_n^{(k,1)} \neq 0 \neq Q_n^{(k,1)} - P_n^{(k,1)}$. In $Q_n^{(k,1)}$ gibt es also „mehr“ Funktionen als in $P_n^{(k,1)}$. — III. $\{m, n | n \leq f(m)\} \in P_1^{k+1}$ für $f \in Q_1^{(k,1)}$. — IV. $f \in P_0^{(k,1)}$, wenn $f \in Q_1^{(k,1)}$ und $f \leq g$. — V. Sei $X \in P_1^{(k+1)}$ und $\{n | (m, n) \in X\} \neq 0$ für alle m , dann gibt es ein $f \in P_0^{(k,1)}$ mit $\{m, n | n = f(m)\} \subseteq X$. VI. $\{m, n | n > g(m)\} \in Q_1^{(k+1)}$ für $g \in Q_1^{(k,1)}$; für $g \notin P_0^{(k,1)}$, $f \in P_0^{(k,1)}$ ist nicht $\{m, n | n = f(m)\} \subseteq \{m, n | n > g(m)\}$. — VII. Für jedes $n > 0$ gibt es $X, Y \in P_n^{(k)}$, so daß $X \cap Y = 0$ und für kein $Z \in P_n^{(k)} \cap Q_n^{(k)}$ gilt, daß $X \subseteq Z$, $Y \cap Z = 0$. Beweis wie in Kleene, dies. Zbl. 38, 31. Dagegen VIII. Für $X, Y \in Q_n^{(k)}$, $X \cap Y = 0$ gibt es immer $Z \in P_n^{(k)} \cap Q_n^{(k)}$ mit $X \subseteq Z$ und $Y \cap Z \neq 0$. *G. Hasenjaeger.*

Kleene, S. C.: On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals. II. *Amer. J. Math.* 77, 405—428 (1955).

Die Untersuchungen dieser Arbeit beziehen sich auf den gleichlautenden ersten Teil [Amer. J. Math. 66, 41—58 (1944)], worin Verf. u. a. zeigen wollte, daß die im Bezeichnungssystem S_3 für Ordnungszahlen auftretenden Prädikate $a \in O$ und $a <_0 b$ in der Gestalt $(x) (E y) R(a, x, y)$ bzw. $(x) (E y) S(a, b, x, y)$ ausgedrückt werden können, wobei R und S primitiv rekursive Prädikate darstellen. Wie Verf. schon früher bemerkte, ist dieses Ergebnis (verursacht durch ein Versehen im Beweis-anfang) nicht richtig. Der vorliegende zweite Teil ist nun im wesentlichen dem Nachweis gewidmet, daß die ursprüngliche, oben genannte Behauptung richtig wird, wenn man die Zahlenvariable x durch eine Variable α für eine einstellige zahlen-theoretische Funktion ersetzt. Dieses Ergebnis bleibt dann auch gültig, wenn der Begriff „rekursiv“ ersetzt wird durch den Begriff „rekursiv in einem Prädikat P “. — Nebenher wird ein Beispiel für eine primitiv rekursive lineare Ordnung der natürlichen

Zahlen gegeben, die eine Wohlordnung hinsichtlich aller arithmetischen aber nicht aller zahlentheoretischen Funktionen überhaupt ist; d. h., wenn diese Ordnung mit \succ bezeichnet wird, so gibt es eine zahlentheoretische Funktion γ mit $\gamma(0) \succ \gamma(1) \succ \gamma(2) \succ \dots$, aber ein solches γ ist niemals arithmetisch. *W. Neumer.*

Orey, Steven: Formal development of ordinal number theory. *J. symbolic Logic* 20, 95—104 (1955).

Verf. entwickelt eine Theorie der Ordnungszahlen im Rahmen des Systems ML, womit der von W. V. Quine in seinem Buch „Mathematical Logic“ (dies. Zbl. 44, 247) eingeführte Kalkül der Mathematischen Logik gemeint ist. Die Klasse *ORN* der so erhaltenen Ordnungszahlen läßt sich als echte Unterklasse der Klasse *NO* von „Ordnungszahlen“ auffassen, welche von J. B. Rosser in seinem Buch „Logic for mathematicians“ (New York 1953) charakterisiert worden ist und wobei den Elementen $\in NO$ nicht alle Eigenschaften zukommen, die man bei den Ordnungszahlen zu finden gewohnt ist. Verf. unterscheidet hinsichtlich des Systems ML eine schwache Wohlordnung, welche zur Klasse *NO* führt, und eine durch zusätzliche Bedingungen sich ergebende starke Wohlordnung, die die Klasse *ORN* aus *NO* aussondert. Mittels der Zahlen $\in ORN$ sind im System ML Induktionsbeweise für Aussagen beliebiger Art möglich, aber mittels der Zahlen $\in NO$ nur für Aussagen einer bestimmten Struktur. Trotzdem ist der Aufbau einer ordinalen Arithmetik für *ORN* in hinreichendem Umfange (einschließlich des Existenznachweises transfiniter Zahlen) erst möglich, wenn ML verstärkt wird, z. B. durch das Axiom, daß aus $\alpha \in ORN$ auch $\omega_\alpha \in ORN$ folgt. *W. Neumer.*

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

Gyires, B.: Eine Verallgemeinerung eines Kroneckerschen Determinantensatzes. *Publ. math., Debrecen* 4, 43—48 (1955).

Der durch das Kronecker-Produkt von Matrizen bekannte Determinantensatz wurde bereits von G. Rados [*Matem. és. Termész. Értesítő* 46, 724—737 (1929)], G. Hajós (dies. Zbl. 9, 338) und Verf. (dies. Zbl. 45, 154) verallgemeinert. Verf. beweist zwei weitere Verallgemeinerungen, die die von Rados bzw. von ihm selbst gegebenen umfassen. *H. Rohrbach.*

Bodewig, E.: Zum Matrizenkalkül. I. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 58, 95—106 (1955).

In der Abhandlung entwickelt der Verf. seinen Vorschlag, den Rechenapparat des Matrizenkalküls so aufzustellen, daß dabei explizite mit Zeilen- und Spaltenvektoren gerechnet wird. Die behandelten Anwendungen finden sich sämtlich auch in dem Buch des Verf. (*Matrix calculus*, Amsterdam 1956). *A. Ostrowski.*

Bodewig, E.: Die Berechnung der ganzzahligen Adjungierten. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 58, 91—94 (1955).

Zur exakten Berechnung der Inversen einer ganzzahligen Matrix empfiehlt der Verf. eine Methode, die darin besteht, daß man die gegebene Matrix *A* durch Elementaroperationen auf die Diagonalform bringt und sodann auf die reziproke Diagonalmatrix die Umkehrung jener Operationen in umgekehrter Reihenfolge anwendet. In der Abhandlung wird die Arbeit von J. B. Rosser, *J. Res. nat. Bur. Standards* 49, 349—358 (1952), nicht zitiert. *A. Ostrowski.*

Burgerhout, Th. J.: On certain linear invariant relations between the elements of a square matrix. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 58, 315—321 (1955).

Die Frage, die Verf. untersucht, ist gleichbedeutend mit folgender Aufgabe: Gegeben sei eine $(n \times n)$ -Matrix $U = (u_{kl})$ mit Elementen aus einem Körper *F*. Gesucht ist ein vollständiges, aber nicht notwendig linear unabhängiges System von

linearen homogenen Gleichungen (1) $\sum_{k,l=1}^n c_{kl}^h x_{kl} = 0$ ($h = 1, 2, \dots$) mit der Eigenschaft, daß jede Matrix $V = (v_{kl})$, die eine Polynomfunktion (Pf.) der Matrix U ist, ein Lösungssystem $x_{kl} = v_{kl}$ von (1) ergibt. (1) heißt dann ein invariantes Relationensystem (i. R.) von U . Verf. zeigt die Existenz eines i. R. der Gestalt $X = A \bar{X}$, wo $X = (x_{kl})$, $\bar{X} = \{x_j | j = 1, \dots, r\}$ eine $(r \times 1)$ -Matrix (Spaltenvektor) ist, deren x_j gewisse eindeutig definierte Elemente der Matrix X sind, $A = \{A_1, \dots, A_r\}$ eine $(1 \times r)$ -Matrix ist, deren A_j selbst $n \times n$ Matrizen, und zwar Pfn. von U sind, und r den Grad der Minimalgleichung von U bezeichnet. Daraus folgt, daß jede Matrix, deren Elemente Lösungen eines i. R. von U sind, selbst eine Pf. von U ist, und daß $n^2 - r$ der Rang eines jeden i. R. ist, da der von U erzeugte Ring $F[U]$ den Rang r hat. Ferner beschreibt Verf. ein Verfahren zur Berechnung von V aus U und einer gewissen Linearkombination von Zeilen der Matrix V . Anm. des Ref.: Andere und einfacher zu übersehende Rechenschritte ergeben sich, wenn man die Matrix U in der rationalen kanonischen Form

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & U_m \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ u_1^{(i)} & \dots & & & u_{n_i}^{(i)} \end{pmatrix}$$

$\left(\sum_{i=1}^m n_i = n \right)$ annehmen darf, wo $|U_i - x E_i|$ durch $|U_{i+1} - x E_{i+1}|$ ($E_i = n_i$ -reihige Einheitsmatrix) teilbar ist (Dickson-Bodewig, Höhere Algebra, Leipzig 1929, Kap. V), so daß nach einem Satz von Frobenius $|U_1 - x E_1|$ das Minimalpolynom von U und somit $n_1 = r$ wird. Dann ist das Ergebnis des Verf. identisch mit der wohlbekannten Tatsache, daß für eine Pf. V_i der Matrix U_i die Darstellung (2) $V_i = v_{11}^{(i)} E_i + v_{12}^{(i)} U_i + \dots + v_{1n_i}^{(i)} U_i^{n_i-1}$ gilt, wo $\{v_{11}^{(i)}, \dots, v_{1n_i}^{(i)}\}$ die erste Zeile der Matrix V_i ist. Wenn nun $V = c_1 E + c_2 U + \dots + c_r U^{r-1}$ eine Pf. von U ist, so ist $V = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & V_m \end{pmatrix}$ und (3) $V_i = c_1 E_i + c_2 U_i + \dots + c_r U_i^{r-1}$. Der Vergleich von (2) und (3) für $i = 1$ ergibt $c_j = v_{1j}^{(1)} = v_{1j}$ und in der oben erklärten Schreibweise das i. R. $V = A \bar{V}$, mit $A_j = U^{j-1}$ und der $(r \times 1)$ -Matrix $\bar{V} = V = \{v_{1j} | j = 1, \dots, r\}$.

H.-J. Hoehnke.

Motzkin, T. S. and Olga Taussky: Pairs of matrices with property L. II. Trans. Amer. math. Soc. 80, 387—401 (1955).

Ein Paar A, B von $n \times n$ -Matrizen mit Elementen aus einem algebraisch abgeschlossenen Körper F beliebiger Charakteristik $p \geq 0$ besitzt nach der im vorangehenden Teil der Arbeit (dies. Zbl. 51, 8) gegebenen Definition die Eigenschaft L , wenn es eine Anordnung $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n$ der Eigenwerte von A und B derart gibt, daß jede Matrix des Büschels $\lambda A + \mu B$ ($\lambda, \mu \in F$) die Eigenwerte $\lambda \alpha_\nu + \mu \beta_\nu$ besitzt ($\nu = 1, \dots, n$). Diese Eigenschaft wird nun mit der folgenden „Eigenschaft D “ in Zusammenhang gebracht: Die ν -Diskriminante von $|\nu I - \lambda A - \mu B|$ ist das Quadrat einer Form in den Parametern λ, μ . Gezeigt wird: Aus L folgt D ; umgekehrt folgt aus D auch L , falls zusätzlich vorausgesetzt wird, daß $p \neq 2$ ist und daß jede von 0 verschiedene Büschelmatrix mindestens $n - 1$ verschiedene Eigenwerte besitzt. Mit der gleichen interessanten, algebraisch-geometrischen Methode wird ein überraschender Satz über die in einem Büschel enthaltenen „diagonalisierbaren“ Matrizen bewiesen: Ist die Charakteristik $p = 0$ und ist jede Matrix des Büschels einer Diagonalmatrix ähnlich, so können A und B sogar simultan auf Diagonalform transformiert werden, sind also vertauschbar; das gleiche gilt im Fall $p > 0$, wenn $n \leq p$ ist oder A und B die Eigenschaft L haben. Weitere Sätze zeigen, daß in

gewissem Sinn „fast alle“ Paare vertauschbarer Matrizen simultan auf die Diagonalform transformiert werden können.

H. Wielandt.

Wong, Y. K.: Some properties of the proper values of a matrix. *Proc. Amer. math. Soc.* **6**, 891—899 (1955). **Errata.** *Ibid.* **7**, 1160 (1957).

Verf. beweist im ersten Teil seiner Arbeit, daß für eine $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ aus komplexen Elementen aus (1) $s_k = \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \leq 1$, und (2) $|a_{kk}| + \sum_{i=k+1}^n s_i |a_{ik}| < 1$ für alle k , $|\lambda_1| < 1$ folgt, wo λ_1 ein maximaler Eigenwert von A ist. Wenn A nicht-negativ ist, dann bedeutet $\lambda_1 < 1$, daß nach Permutation der Reihen und Spalten von A , $\sum_{i=k+1}^n a_{ik} < 1$; und daher folgt (2) aus $\lambda_1 < 1$, wenn (1) gilt.

In den Beweisen werden die Eigenschaften einer Norm $A \rightarrow \|A\|$ des Vektorraumes der Matrizen benutzt, für die (a) und (b) gelten nebst den gewöhnlichen Axiomen, wo (a): Wenn $\lim_p A_p = A$, dann ist $\lim_p \|A - A_p\| = 0$; und (b): Wenn $A \geq B \geq 0$, dann ist $\|A\| \geq \|B\|$. [Daß (a) für alle Normen eines endlichen Vektorraumes über den komplexen Zahlen zutrifft, ist von A. Ostrowski, dies. Zbl. **65**, 247 bewiesen worden.] Es ist anscheinend des Verf. Absicht, seine Sätze aus Sätzen über Normen abzuleiten, denn er beweist auch bekannte Resultate über maximale Eigenwerte, die als Ausgangspunkt dienen könnten. Im zweiten Teil untersucht Verf. ausschließlich nicht-negative A . Er gibt neun Bedingungen, die zu $\lambda_1 < 1$ äquivalent sind. Darunter sind die bekannten (i) $(I - A)^{-1}$ existiert und ist nicht-negativ, und (ii) Die Reihe $I + A + A^2 + \dots$ konvergiert, die einfach bewiesen werden. Weitere Bedingungen sind: (v) Es sei $A_k = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, k$; $c_1 = 0$, und $c_k = \sum_{r,s=1}^{k-1} a_{kr} (I - A_{k-1})^{-1} a_{sk}$. Für alle k ist $0 < c_k < 1 - a_{kk}$; (vi) es gibt eine Folge von Hauptuntermatrizen $A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(n)} = A$, wo $A_{(k)}$ eine Hauptuntermatrix von $A_{(k+1)}$ ist und $\det(I - A_{(k)})^{-1} \geq \det(I - A_{(k+1)})^{-1} > 0$; (viii) für jeden Vektor $y \geq 0$ existiert ein Vektor $x \geq y$ der $x'(I - A) = y'$ genügt, und (ix) Es gibt einen Vektor $z > 0$ für welchen $z'A < z'$ ist.

H. Schneider.

Khan, Nisar A.: A theorem on the characteristic roots of matrices. *J. Univ. Bombay, n. Ser.* **24**, Nr. 3 (38), 13—18 (1955).

Wenn $f(A)$ und $g(B)$ zwei quadratische Matrizen sind, dann folgt, wenn $c(\dots)$ eine charakteristische Wurzel (Eigenwert) bedeutet, daß

$$c_{\min}(ff^*) \cdot c_{\min}(gg^*) \leq c(fg) \bar{c}(fg) \leq c_{\max}(ff^*) c_{\max}(gg^*).$$

Das ist aber eine naheliegende Konsequenz wohl bekannter Sätze über allgemeine Normen. Siehe z. B. Sz.-Nagy, dies. Zbl. **70**, 13.

J. L. Brenner.

Fan, Ky: Some inequalities concerning positive-definite Hermitian matrices. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **51**, 414—421 (1955).

$\mathfrak{H} = (a_{ik})$ sei eine positiv definite hermitesche Matrix der Ordnung n . Durch (i_1, i_2, \dots, i_j) werde eine Hauptuntermatrix von \mathfrak{H} gekennzeichnet, die durch die Angabe der Zeilen und Spalten i_1, i_2, \dots, i_j festgelegt ist. In Erweiterung der bekannten Ungleichung $\det \mathfrak{H} \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$ bzw.

$$\det \mathfrak{H} \leq \det(1, 2, \dots, p) \cdot \det(p+1, p+2, \dots, n) \quad \text{mit } 1 \leq p \leq n$$

wird bewiesen:

$$\det \mathfrak{H} \left| \det(p+1, p+2, \dots, n) \right| \leq \prod_{i=1}^p (\det(i, p+1, p+2, \dots, n) \left| \det(p+1, p+2, \dots, n) \right|).$$

An einem Beispiel wird die erzielte Verschärfung gezeigt. Nach Unterteilung von \mathfrak{H} in vier Untermatrizen gemäß $\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{B}' & \mathfrak{C} \end{pmatrix}$ mit \mathfrak{A} als (p, p) -Matrix werden

Extremaleigenschaften des Quotienten $Q = \det \mathfrak{H} / \det \mathfrak{C}$ angeben. 1. $Q = \min \det (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \mathfrak{R} + \overline{\mathfrak{R}}' \overline{\mathfrak{B}}' + \overline{\mathfrak{R}}' \mathfrak{C} \mathfrak{R})$, genommen über alle $(n-p, p)$ -Matrizen \mathfrak{R} ; das Minimum wird nur angenommen, wenn $\mathfrak{R} = -\mathfrak{C}^{-1} \overline{\mathfrak{B}}'$, d. h. für die bekannte Beziehung $\det \mathfrak{H} = \det \mathfrak{C} \cdot \det (\mathfrak{A} - \mathfrak{B} \mathfrak{C}^{-1} \overline{\mathfrak{B}}')$. 2. $\det \mathfrak{H} = \det ((\mathfrak{H} e_i, e_j))_{p+1 \leq i, j \leq n}$ mit $\det ((\mathfrak{H} x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq p}$, genommen über alle x_i mit $(x_i, e_j) = \delta_{ij}$ ($1 \leq i, j \leq p$), e_i Orthonormalsystem. Das Minimum wird dann und nur dann angenommen, wenn $(x_i, \mathfrak{H} e_j) = 0$ ($1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq n$). Die erzielten Aussagen bzw. Verschärfungen werden im folgenden, dazu benutzt, Ungleichungen für die Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ einer positiv definiten Hermiteschen Matrix aufzustellen. Es gelingt mit $1 \leq h \leq n$ für die bekannten Beziehungen $\prod_{i=1}^h \lambda_i \leq \prod_{i=1}^h a_{ii}, \prod_{i=1}^h \lambda_i \leq \prod_{i=1}^h (\mathfrak{H} e_i, e_i)$ und $\prod_{i=1}^h \lambda_i \leq \prod_{i=1}^h \kappa_i$, dabei sind die κ_i die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} \mathfrak{A} & 0 \\ 0 & \mathfrak{C} \end{pmatrix}$, Verschärfungen bzw. Verallgemeinerungen anzugeben. H. Unger.

Surányi, János: On the solvability of systems of linear inequalities. Acta Sci. math. 16, 92—102 (1955).

Verf. entwickelt verschiedene notwendige und hinreichende Kriterien für die Lösbarkeit eines homogenen bzw. inhomogenen Systems von m linearen Ungleichungen $Ax > 0$ bzw. $Ax \geq b$ mit n Unbekannten. A bezeichnet hier die (m, n) -Koeffizientenmatrix; x und b sind Spaltenvektoren. Die Kriterien richten sich nach dem Rang r von A und benutzen gewisse von A abgeleitete Determinanten. Ein wichtiger Beweis wird induktiv nach r geführt. Insbesondere wird auch ein von L. M. Blumenthal (dies. Zbl. 49, 123) aufgestelltes Kriterium neu gewonnen, das sich auf die (m, m) -Matrix AA' bezieht, wo A' durch Transposition aus A hervorgeht. H. Hadwiger.

Han, Khwat Tik and L. Kuipers: On a proof of the Lucas theorem concerning the zeros of the derivative of a polynomial. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 435—437 (1955).

Let a be a complex number, θ and Φ be angles such that $0 \leq \theta \leq 2\pi$ and $0 \leq \Phi \leq \pi$, and the sector $S(a, \theta, \Phi)$ be the region of the points z such that $\theta \leq \arg(z-a) \leq \theta + \Phi$. The double sector $S_2(a, \theta, \Phi)$ is defined as the sum of $S(a, \theta, \Phi)$ and $S(a, \theta + \pi, \Phi)$. Then the following theorem is proved: Let a, b , and λ be complex numbers with $|\lambda| = 1$ and let θ, Φ , and α be angles with $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \Phi \leq \pi, b \neq b e^{i\alpha}$, where b is the conjugate of b . Let the zeros of the polynomial $f(z) \equiv (z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_n)$, not all equal to a , lie in the sector $S(a, \theta, \Phi)$. Then the zeros of the polynomial $F(z) \equiv f\{a + b(z-a)\} - \lambda f\{a + e^{i\alpha} b(z-a)\}$ are located in the double sector $S_2(a, \theta - \frac{1}{2}\alpha, \Phi)$. Lucas' Theorem is obtained as a limiting case of this theorem. Several other applications of this theorem are given. E. Frank.

Knobloch, Hans-Wilhelm: Zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 19, 176—190 (1955).

Verf. beweist folgende Verallgemeinerung des Hilbert-Dörge'schen Irreduzibilitätssatzes: Es sei $f(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_s)$ ein ganzzahliges irreduzibles Polynom in $x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_s$, und es bezeichne $R(N)$ die Anzahl aller s -Tupel τ_1, \dots, τ_s ganzer Zahlen mit $|\tau_i| \leq N$ ($i = 1, \dots, s$) derart, daß $f(x_1, \dots, x_k; \tau_1, \dots, \tau_s)$ reduzibel wird. Dann gilt

$$R(N) \leq C N^{s-\alpha}$$

mit geeigneten Konstanten $\alpha > 0, C$. Für $s = 1$ ergibt sich die Dörge'sche Verschärfung des Hilbertschen Irreduzibilitätssatzes. Der Beweis gelingt durch eine Modifikation des bereits von Dörge zur Erzielung einer Verallgemeinerung für $s > 1$ eingeführten Dichtebegriffs für Mengen von s -Tupeln ganzer Zahlen. Spezialfälle des Satzes sind insbesondere in Ergebnissen von vander Waerden (dies.

Zbl. 7, 391 und 13, 387) über die Seltenheit der Gleichungen mit Affekt und von Specht (dies. Zbl. 47, 47) über die Seltenheit reduzibler Polynome enthalten.

H. Rohrbach.

Schwerdtfeger, H.: Note on a theorem by J. A. Todd. J. London math. Soc. 30, 83—84 (1955).

Verf. beweist als leichte Folgerung aus einem Satz von Capelli: Ist $g(y)$ ein Polynom über einem Zahlkörper R und $f_m(x) = g(x^{2^m})$, ferner $f_m(x)$ reduzibel, aber $f_{m-1}(x)$ irreduzibel über R , so ist $m \leq 2$. Ersetzt man in x^{2^m} die 2 durch eine ungerade Primzahl p , so folgt unter den entsprechenden Voraussetzungen sogar $m = 1$. Damit ist ein Satz von J. A. Todd (dies. Zbl. 60, 47), weitgehend verallgemeinert.

H. Rohrbach.

Knapowski, S.: Certain theorems, concerning irreducibility of polynomials. Prace mat. 1, 272—274, russ. u. engl. Zusammenfassg. 274—275, 275 (1955) [Polnisch].

Verf. beweist: Ist $f(x)$ ein Polynom des Grades n über einem vollkommenen Körper K mit der Eigenschaft, daß jede Wurzel eine rationale Funktion mit Koeffizienten aus K zweier beliebiger Wurzeln ist, keine Wurzel in K liegt, weiter die Galois-Gruppe von $f(x)$ mit der Ordnung m die Bedingung $n! \not\equiv 0 \pmod{m^2}$ erfüllt, so ist $f(x)$ irreduzibel.

L. Holzer.

Ibrahim, E. M.: Some subgroups of the orthogonal and symplectic groups. Proc. math. phys. Soc. Egypt 5, Nr. 2, 9—15 (1955).

Es wird eine Methode angegeben und an einfachen Beispielen durchgeführt, um mit Hilfe von Tafeln für D. E. Littlewoods Produkt $\{\lambda\} \otimes \{\mu\}$ von S -Funktionen Untergruppen von orthogonalen und symplektischen Gruppen festzustellen, die gewisse Formen invariant lassen.

H. Boerner.

Ibrahim, E. M.: Tables for the plethysm of S -function of degree 10 and 12. Proc. math. phys. Soc. Egypt 5, Nr. 2, 85—86 (1955).

Für alle Partitionen $(\lambda), (\mu)$ von m bzw. n , für die $m n = 10$ und $m n = 12$, wird in zwei Tafeln D. E. Littlewoods „plethysm“-Produkt $\{\lambda\} \otimes \{\mu\}$ der zugehörigen S -Funktionen angegeben. (Auf der zu 10 gehörigen Tafel sind die Koeffizienten 1 teilweise bis zu Pünktchen degeneriert — hoffen wir, daß keiner ganz verschwunden ist!).

H. Boerner.

Gruppentheorie:

Stolt, Bengt: Abschwächung einer klassischen Gruppendifinition. Math. Scand. 3, 303—305 (1955).

Verf. gibt einen neuen Beweis für die Vollständigkeit eines Gruppenaxiomensystems, das er früher eingeführt hat.

H. Bergström.

Boone, William W.: Certain simple, unsolvable problems of group theory. III—VI. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 252—256, 571—577 (1955); 60, 22—27, 227—232 (1957).

In den Teilen III, IV wird der in den Teilen I, II (dies. Zbl. 55, 6 bzw. 57, 17) begonnene Beweis des im Referat von Teil I angegebenen Satzes beendet. In den Teilen V, VI wird eine Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden und definierenden Relationen angegeben, für die das Wortproblem unlösbar ist.

G. Pickert.

Tamura, Takayuki: One-sided bases and translations of a semigroup. Math. Japonicae 3, 137—141 (1955).

L'A. introduit dans un demi-groupe la notion de base: le complexe X du demi-groupe D est une base à droite de D si D est la réunion de X et de DX et si X est un complexe minimal possédant cette propriété. L'A. caractérise les bases à droite (quand elles existent) et étudie leurs propriétés. La connaissance d'une base à droite de D lui permet de déterminer toutes les translations à droite de D , notion introduite par lui (ce Zbl. 67, 10).

R. Croisot.

Černikov, S. N.: Über die Ergänzzbarkeit der Sylowschen II -Untergruppen in gewissen Klassen unendlicher Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR 102, 457—459 (1955) [Russisch].

Voranzeige der in dies. Zbl. 65, 259 besprochenen Arbeit.

Baer, Reinhold: Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung. Math. Ann. 129, 139—173 (1955).

Nach A. I. Mal'cev (dies. Zbl. 43, 23) genügt eine auflösbare Gruppe \mathfrak{G} (genau dann) der Maximalbedingung, wenn ihre abelschen Untergruppen endlich erzeugbar sind. Da Mal'cev zum Beweise einen Satz über kontinuierliche Gruppen benutzt, gibt Verf. einen Beweis, der die topologischen durch ringtheoretische Hilfsmittel ersetzt. Eine Gruppe \mathfrak{G} heißt auflösbar, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild $\bar{\mathfrak{G}}$ einen von 1 verschiedenen abelschen Normalteiler besitzt. Eine Gruppe \mathfrak{G} , die der Maximalbedingung genügt, ist genau dann auflösbar, wenn eine ihrer Ableitungen die Einheit ist. Dies legt nahe, die Aussage des Satzes von Mal'cev zu zerlegen: Satz A. Ist eine Ableitung der Gruppe \mathfrak{G} die Einheit und jede abelsche Untergruppe von \mathfrak{G} endlich erzeugbar, so ist jede Untergruppe von \mathfrak{G} endlich erzeugbar. — Satz B. Ist die Gruppe \mathfrak{G} auflösbar und jede abelsche Untergruppe von \mathfrak{G} endlich erzeugbar, so ist eine Ableitung von \mathfrak{G} die Einheit. — Der Satz A ergibt sich aus dem Satz, daß abelsche Automorphismengruppen endlich erzeugbarer abelscher Gruppen endlich erzeugbar sind, dieser Satz wiederum aus dem Dirichletschen Einheitensatz. Der Satz B ergibt sich aus dem Satz A und dem Satz B': Ist Φ eine auflösbare Automorphismengruppe der auflösbaren Gruppe \mathfrak{G} mit Maximalbedingung, so ist eine Ableitung von Φ gleich der Einheit, und jede abelsche Untergruppe von Φ endlich erzeugbar. Der Beweis dieses Satzes erfordert umfangreiche, in drei Teile gegliederte, auch für sich interessante Vorbereitungen: 1. Ein kommutativer Ring \mathfrak{R} mit Eins hat endlichen Rang, wenn seine additive Gruppe \mathfrak{R}^+ torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist. Ein Ideal \mathfrak{I} aus \mathfrak{R} ist endlichen Ranges, wenn der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{I}$ endlichen Rang besitzt. Ist das Nullideal (0) aus \mathfrak{R} Durchschnitt endlich vieler Primideale endlichen Ranges, so sind Automorphismengruppe und Einheitswurzelgruppe von \mathfrak{R} beide endliche Gruppen. Nun sei \mathfrak{A} eine (additive) torsionsfreie abelsche Gruppe. Eine Automorphismengruppe Φ von \mathfrak{A} heiße primitiv, wenn 0 die einzige Φ -zulässige Untergruppe von \mathfrak{A} ist mit torsionsfreier Faktorgruppe, dagegen semiprimitiv, wenn ein endliches System von 0 verschiedener Φ -zulässiger Untergruppen $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \dots, \mathfrak{U}_k$ von \mathfrak{A} existiert, deren Kompositum $\Sigma \mathfrak{U}_i$ in \mathfrak{A} als Faktorgruppe eine Torsionsgruppe besitzt, während Φ in jedem \mathfrak{U}_i eine primitive Automorphismengruppe induziert. Besitzt die torsionsfreie abelsche Gruppe \mathfrak{A} weiterhin endlichen Rang, so erzeugt jede abelsche primitive Automorphismengruppe Φ von \mathfrak{A} einen Endomorphismenbereich von \mathfrak{A} , der ein Integritätsbereich endlichen Ranges ist. Ist Φ eine abelsche semiprimitive Automorphismengruppe von \mathfrak{A} , so ist die Torsionsuntergruppe von Φ endlich; ferner besitzt Φ einen Zentralisator von endlichem Index in jeder Automorphismengruppe Γ von \mathfrak{A} , in der Φ normal ist. Jeder abelsche Normalteiler von Φ besitzt in Φ einen Zentralisator von endlichem Index. Eine abelsche Torsionsgruppe \mathcal{T} aus Automorphismen von \mathfrak{A} ist daher eine endliche Gruppe. 2. Im Mittelpunkt des zweiten Teiles stehen Kriterien für die Existenz abelscher Untergruppen von endlichem Index in einer Gruppe \mathfrak{G} . Von den zahlreichen Ergebnissen können nur einige angegeben werden. Folgende Eigenschaften einer Gruppe \mathfrak{G} sind gleichwertig: (1) \mathfrak{G} besitzt eine auflösbare charakteristische Untergruppe von endlichem Index; (2) \mathfrak{G} besitzt einen auflösbaren Normalteiler von endlichem Index; (3) \mathfrak{G} besitzt eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index; (4) Jedes nichtendliche homomorphe Bild von \mathfrak{G} besitzt einen unendlichen Normalteiler mit endlicher Kommutatorgruppe. — Genau dann ist die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ nach dem Zentrum endlich, wenn der Kommutator \mathfrak{G}' endlich ist und \mathfrak{G} eine abelsche Untergruppe von endlichem Index besitzt. — Genau dann besitzt \mathfrak{G} eine abelsche

Untergruppe von endlichem Index, wenn (a) jedes nichtendliche homomorphe Bild von \mathfrak{G} eine abelsche Untergruppe von endlichem Index und (b) jeder Normalteiler von \mathfrak{G} einen maximalen abelschen Normalteiler besitzt, in dem er eine endliche Automorphismengruppe induziert. 3. Der dritte Teil kombiniert die Ergebnisse der vorangehenden Teile. Hauptsatz 1: Ist Φ auflösbare semiprimitive Automorphismengruppe der torsionsfreien abelschen Gruppe \mathfrak{A} endlichen Ranges, so ist jede Torsionsuntergruppe von Φ endlich, jeder maximale abelsche Normalteiler A einer Untergruppe $\Delta \subseteq \Phi$ besitzt eine endliche Faktorgruppe Δ/A , und eine Ableitung der Gruppe Φ ist die Einheit. — Hauptsatz 2: Ist Φ auflösbare Automorphismengruppe der torsionsfreien Gruppe \mathfrak{G} endlichen Ranges, das Glied ${}^n\mathfrak{G}$ der absteigenden Zentralkette die Einheit, so existiert ein Normalteiler Θ von Φ mit den Eigenschaften: (a) Θ ist torsionsfrei von endlichem Range, ein Glied ${}^m\Theta$ der absteigenden Zentralkette ist die Einheit; (b) Φ/Θ besitzt eine abelsche charakteristische Untergruppe von endlichem Index; die Torsionsuntergruppe von Φ/Θ ist endlich. Schließlich ist eine Ableitung von Φ die Einheit. Hieraus folgt der Satz B'. — Eine Gruppe \mathfrak{G} heißt Noethersche Gruppe, wenn sie der Maximalbedingung für Untergruppen genügt, d. h. wenn ihre Untergruppen sämtlich endlich erzeugbar sind. Der Satz von Mal'cev besagt, daß auflösbare Gruppen Noethersche Gruppen sind, wenn ihre abelschen Untergruppen endlich erzeugbar sind. Aus dem Dirichletschen Einheitsatz folgt das Lemma: Ist die Additionsgruppe des Integritätsbereichs \mathfrak{H} von endlichem Rang, so ist die Einheitengruppe von \mathfrak{H} endlich. Hieraus erhält man weiter: Abelsche Automorphismengruppen endlich erzeugbarer abelscher Gruppen sind endlich erzeugbar. Auflösbare Automorphismengruppen endlich erzeugbarer abelscher Gruppen sind Noethersche Gruppen. Auflösbare Automorphismengruppen auflösbarer Noetherscher Gruppen sind Noethersche Gruppen, und als letzte Folgerung den Satz von Mal'cev.

W. Specht.

Baer, Reinhold: Burnsidesche Eigenschaften. Arch. der Math. 6, 165—169 (1955).

Eine (noch unbewiesene) Vermutung von Burnside-Kuroš behauptet, daß jede endlich erzeugbare Torsionsgruppe endlich ist. Es liegt nahe, solange diese Frage nicht geklärt ist, durch Gruppeneigenschaften, die Verf. als Burnsidesche Eigenschaften bezeichnet, Gruppenklassen zu kennzeichnen, die nur endlich erzeugbare Torsionsgruppen enthalten, die endlicher Ordnung sind. Es sei $e(\mathfrak{G})$ eine (nicht-leere) Gruppeneigenschaft, für die gelten möge, daß jedes homomorphe Bild einer e -Gruppe gleichfalls eine e -Gruppe ist. Eine Gruppe \mathfrak{G} heiße e^* -Gruppe, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild $\overline{\mathfrak{G}}$ eine von 1 verschiedene (im Sinne von H. Wielandt) nachinvariante e -Untergruppe besitzt. Ist beispielsweise $e(\mathfrak{G})$ die Eigenschaft, eine abelsche Gruppe zu sein, so ist $e^*(\mathfrak{G})$ die Eigenschaft, eine auflösbare Gruppe zu sein. Es besteht allgemein die Gleichung $e^{**}(\mathfrak{G}) = e^*(\mathfrak{G})$. Ferner ist $e^*(\mathfrak{G})$ eine Burnsidesche Eigenschaft, wenn $e(\mathfrak{G})$ eine Burnsidesche Eigenschaft ist. Eine Eigenschaft $e(\mathfrak{G})$ ist genau dann eine Burnsidesche Eigenschaft, wenn endlich erzeugbare e -Torsionsgruppen nur endlich viele wesentlich verschiedene endliche homomorphe Bilder besitzen, und wenn endlich erzeugbare e -Torsionsgruppen mit endlicher Kompositionsreihe endliche Gruppen sind.

W. Specht.

Schenkman, Eugene: On the tower theorem for finite groups. Pacific J. Math. 5, Suppl. II, 995—998 (1955).

G sei eine endliche Gruppe. Es sei G^ω der Durchschnitt aller derjenigen Normalteiler N von G , für die G/N nilpotent ist. Die folgenden Sätze werden bewiesen: G ist nilpotent, dann und nur dann, wenn G^ω in der Frattini-Gruppe enthalten ist (eine Verschärfung des bekannten Satzes von Wielandt, dies. Zbl. 14, 53). Daraus folgt, daß G^ω ein nilpotentes partielles Komplement besitzt. Es sei G eine nachinvariante Untergruppe einer endlichen Gruppe A und der Zentralisator von G in A

trivial. Dann ist der Zentralisator von G^ω in A in G^ω enthalten. Aber im allgemeinen ist G^ω kein Normalteiler von A . Dafür wird ein Beispiel angegeben. *N. Itô.*

Calame, André et Sophie Piccard: Les relations caractéristiques des bases du groupe symétrique. C. r. Acad. Sci., Paris **240**, 2477—2478 (1955).

Let the symmetric group \mathfrak{S}_n of degree n be generated by two of its elements S and T (i. e. S and T form a basis). In \mathfrak{S}_n S and T satisfy certain relations (such as $S^{n!} = T^{n!} = 1$). A set of relations is called characteristic if every other relation can be derived formally from it (within the free group generated by the two symbols S and T) and if this set is minimal in that sense. The object of this note is to determine all the characteristic relations of the different bases of \mathfrak{S}_6 . It is stated that in each case 5 relations do. The relations given by E. M. Moore are shown to be dependent. As for the method see the next review. *J. Verhoeff.*

● **Calame, André:** Les relations caractéristiques des bases du groupe symétrique. (Thèse.) La Chaux-de-Fonds: Courvoisier S. A. 1955. 99 p.

The symmetric group \mathfrak{S}_6 of degree 6 possesses 11480 different bases. The purpose of this thesis is to establish the characteristic relations of these bases (see the preceding review). If two bases (S, T) and (S', T') are transformed into each other by an automorphism they (obviously) satisfy the same relations. Thus it is sufficient to study only the relations of the 163 different classes of bases invariant under inner isomorphism. \mathfrak{S}_6 possesses also outer automorphisms (essentially one modulo the inner ones) which leave 7 classes invariant and interchange the remaining 156 in 78 pairs. Thus only 85 cases are to be studied. If (S, T) and (S', T') are two bases then the one can be expressed in terms of the other. $S = f(S', T')$, $T = g(S', T')$ and $S' = f'(S, T)$, $T' = g'(S, T)$. If these expressions can be chosen in such a way that they are invertible, within the free group generated by the symbols S, T, S' , and T' , the two bases are called equivalent. It is proved that this is a real equivalence and that the characteristic relations of two equivalent bases can be derived from each other. It appears that modulo the automorphisms and modulo the above equivalence there remain only four classes. The method used to find the relations is a simple but laborious one. \mathfrak{S}_6 is reconstructed by writing down the products S^i , $S^i T^j$, $S^i T^j S^k$ and so on. Elements of \mathfrak{S}_6 which thus are found twice give rise to a relation, by elimination superfluous relations are removed. In all cases five relations are left and it is proved that these sets are characteristic. *J. Verhoeff.*

Dwinger, Ph.: On certain permutations of an Abelian group. Simon Stevin **30**, 140—143 (1955).

Verf. zeigt: Ist \mathfrak{G} abelsch, σ ein Automorphismus der Ordnung 2 von \mathfrak{G} , so bilden die Abbildungen $I_A(X) = A^2 \cdot X^\sigma$ und $I'_A(X) = A^2 \cdot X$ von \mathfrak{G} auf sich eine Gruppe J ; diese ist homomorphes Bild des Holomorphs \mathfrak{G}' von \mathfrak{G} mit σ ; der Kern dieser homomorphen Abbildung besteht aus den $A \in \mathfrak{G}$ mit $A^2 = E$. Ist $X^\sigma = X^{-1}$, so ist der Kern das Zentrum von \mathfrak{G}' . *B. Huppert.*

Fuchs, L.: Über die Strukturfrage der unendlichen abelschen Gruppen. Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin **4** (1954/55), 91—95 (1955).

Abdruck des Manuskriptes eines Vortrages, den der Verf. 1954 in Berlin gehalten hat. Behandelt werden: überabzählbare p -Gruppen, torsionsfreie Gruppen endlichen Ranges, Existenz von Basen usw. *H. Leptin.*

Erdélyi, Mária: On direct summands of abelian torsion groups. Acta Univ. Debrecen. Ludovico Kossuth **2**, 145—149 (1955) [Ungarisch mit engl. Zusammenfassg.]

Verf. verallgemeinert einen Satz von Kaplansky (Infinite abelian groups, S. 25, dies. Zbl. **57**, 19) und beweist unter Anwendung eines Satzes von Kulikof (dies. Zbl. **25**, 299) folgenden Satz: Die abelsche p -Gruppe G hat dann und nur dann einen das Element a ($\in G$) enthaltenden direkten (endlichen) Summanden, wenn die Ele-

mente der durch a erzeugten zyklischen Untergruppe von G endliche Höhe besitzen.

J. Szép.

Szele, Tibor and Andor Kertész: On generalized p -groups. Acta Univ. Debrecen. Ludovico Kossuth 2, 131—135 (1955) [Ungarisch mit engl. Zusammenfassg.].

Nach einem wohlbekannten Satz von Prüfer läßt sich jede abzählbare abelsche p -Gruppe ohne Elemente von unendlicher Höhe als direkte Summe von zyklischen Gruppen darstellen. Es gilt die entsprechende Behauptung für torsionsfreie Moduln über dem Ring P der ganzen p -adischen Zahlen, falls man „abzählbar erzeugte“ statt „abzählbar“ setzt (vgl. Kulikov, dies. Zbl. 53, 210, oder Kaplansky, dies. Zbl. 57, 19). Nachdem die Verff. einen kurzen Beweis des letzteren Satzes mitgeteilt haben, zeigen sie, daß für gemischte Gruppen die entsprechende Behauptung nicht mehr gilt: es gibt einen abzählbar erzeugten gemischten P -Modul ohne Elemente von unendlicher Höhe, der nicht in die direkte Summe eines torsionsfreien und eines P -Moduls zerfällt. Damit ist eine offene Frage in der zitierten Arbeit von Kulikov beantwortet.

L. Fuchs.

Solian, Alexandru: Sur la notion de „ n -complet“ dans les groupes. Acad. Republ. popul. Romine, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 7, 255—272, russ. u. französ. Zusammenfassg. 270—272 (1955) [Rumänisch].

Es wird nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen gefragt, unter denen die Faktorgruppe G/H lauter Torsions-Elemente zum Exponenten n ($x^n = 1$) enthält. Nichttrivial ist hier der Fall einer abelschen Gruppe G . Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen werden diesmal mit Hilfe der Prüferschen Begriffsbildungen ausgedrückt. Verf. gibt dann die Konstruktion einer Art von Metabelität, in der die Rolle der Abelschen Faktorgruppen von den n -tordierten Faktorgruppen G/H übernommen wird.

D. Barbilian.

Loonstra, F.: L'extension du groupe ordonné des entiers rationnels par le même groupe. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 41—49 (1955).

Using the theory of extensions of a partially ordered group C by a partially ordered group F , initiated by L. Fuchs (this Zbl. 39, 252), the author studies the case that both C and F are fully ordered infinite cyclic groups. Of the two extensions of C by F as groups without order only one, the free abelian group of rank 2, can occur here; but there are infinitely many distinct partial order relations that can be imposed on this group to make it an extension of C by F as ordered groups. These order relations are characterized by means of systems of parameters which are subject to certain inequalities. The author also discusses the question of how these systems of parameters are related when they define equivalent extensions.

B. H. Neumann.

● **Dieudonné, J.:** La géométrie des groupes classiques. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Heft 5. Reihe: Gruppentheorie.) Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1955. VII, 125 S. mit 2 Abb. DM 19,60.

We welcome such a good book added to the literature of classical groups. By classical groups we mean the following types of groups. Let x, y, \dots be column vectors of dimension n over a field K . The transformation $x = M y^\sigma$ is called a semi-linear transformation with the matrix M and the automorphism σ . Such transformations with identity automorphism is denoted by $\Gamma L_n(K)$. The subgroup of the transformations with identity automorphism is denoted by $GL_n(K)$. If we consider the vectors $x\xi$ ($\xi \in K$, $\xi \neq 0$) as a point in the projective space, we define $P\Gamma L_n(K)$ and $PGL_n(K)$ accordingly. A transformation of $GL_n(K)$ with an $M = I + T$ where $T^2 = 0$ and T is of rank 1 is called a transvection. The group generated by all transvections is denoted by $SL_n(K)$ which is the commutator subgroup of $GL_n(K)$, except $n=2$ and K having only two elements. Let J be an involutive anti-automorphism of K . Suppose that H is a matrix satisfying $(H^J)' = \pm H$. In case K is commutative and J is identity, H is called symmetric and skew-symmetric;

otherwise it is called hermitian and skew-hermitian. For invertible H , the matrices M satisfying $MH(M^J)' = H$ form a group, which is called orthogonal (denoted by $O_n(K, H)$), symplectic (denoted by $Sp_n(K)$) or unitary (denoted by $U_n(K, H)$) according as H is symmetric, skew-symmetric or hermitian and skew-hermitian. Similarly, the author considers the commutator subgroups and the subgroups generated by the transvections in these groups and their projective groups. The orthogonal groups over a commutative field of characteristic 2 are considered separately. The author studies the structure and automorphisms of these groups. The isomorphisms between these groups are also studied. A chapter is given to consider the geometrical characterization of the classical groups. He introduces the reviewer's contribution on geometry of matrices which was later developed by W. L. Chow. But Chow has only developed the projective form of geometry of matrices and the reviewer has studied both the projective form and the affine form. The reviewer remarked that it is much easier to deduce the projective form from the affine form than to deduce the affine form from the projective form and the affine form is more interesting to the algebraists (cf. the reviewer's paper, Chinese math. Soc. 1, 109—163 (1951)). The author has communicated the following list of corrections: On page 13 replace lines 13—15 from the bottom by the sentence: Un sous-espace V de E qui n'est pas isotrope est caractérisé par la propriété que le sous-espace orthogonal V^0 est supplémentaire de V ; mais un tel sous-espace peut contenir des droites isotropes. On dit que V est anisotrope s'il ne contient pas de droites isotropes; un tel espace est évidemment non isotrope. On page 37 replace lines 5—8 from the bottom by the sentence: Si $A = (a_{ij})$ et si $a_{ii} \neq 0$, en retranchant des lignes de A d'indices $\neq i$ des multiples à gauche de la i -ème ligne, on obtient une matrice B dont la première colonne n'a que a_{ii} comme terme $\neq 0$; on pose alors $\det A = \varphi((-1)^{i+1} a_{ii}) \det(B_{i1})$, en désignant par B_{i1} , la matrice obtenue en supprimant dans B la première colonne et la i -ème ligne. On page 107, line 16 from the bottom, read $m = n = 1$ instead of $m = n = 2$. On page 111 insert in the Bibliography the item: M. Abe: [1] Projective transformation groups over non-commutative fields, Sijo-Sugaku-Danwakai, 240 (1942). On page 114, line 13 from the top, read J. reine angew. Math., 196 instead of: Math. Zeitschrift. The reviewer adds the following list of corrections: On page 11, replace the expression on line 15 from the bottom by $f(y, x) = f(x, y)^J m(x)$, replace the expression on line 12 from the bottom by $f(y, x) = f(x, y)^J r^{-1}$, omit the sentence on lines 10—11 from the bottom, replace the expression on line 8 from the bottom by $\xi^J = r^J \xi r$ and replace the expression on line 4 from the bottom by $\xi + \xi^J r^J = 0$. On page 12 replace the expression on line 2 by $q = \zeta + \zeta^J r^J \neq 0$, and the expressions on line 3 by $r = q^{-1} q^J$, $\xi^T = (q^{-1} \xi q)^J$ and $g(x, y) = q^J f(x, y)$ respectively. On page 26, line 3 reads $vu = u \cdot v \cdot a$. On page 33, line 8 reads $2p + d + 1 \leq i \leq n, \dots \sum_{i=1}^n \dots$. On page 36, line 19 from the bottom reads $P_{ij} = B_{ij}(1) B_{ji}(-1) B_{ij}(1)$. On page 72, line 14 from the bottom reads u de E sur E' , line 7 from the bottom reads \dots par $\varphi \dots$.

L. K. Hua.

Wallace, A. D.: One dimensional homogeneous clans are groups. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 578—580 (1955).

A Hausdorff space with a continuous associative multiplication is called a mob. A compact connected mob with unit is called a clan. A space is called homogeneous if any one of its points can be mapped onto any other point by a homeomorphism taking the space onto itself. In this paper the author proves that a homogenous one-dimensional clan is a group.

K. Morita.

Est, W. T. van: On the algebraic cohomology concepts in Lie groups. I. II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 225—233, 286—294 (1955).

Est, W. T. van: Une application d'une méthode de Cartan-Leray. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 542—544 (1955).

The three papers deal with relations between group and algebra cohomology on Lie groups. It is shown that the group cohomology of a Lie group \mathfrak{M} relative to a linear representation π in a vector space V is isomorphic to the cohomology of the equivariant cochains on $\mathfrak{M}/\mathfrak{F}$, \mathfrak{F} being a maximal compact subgroup (on p. 233, read \mathfrak{M} instead of M). M and F being the relative Lie algebras, then the group cohomology of \mathfrak{M} based on infinitely differentiable cochains (differential forms) is isomorphic to the cohomology of algebras $H(M \bmod F)$. The methods of proof are that of bigraded complexes. In the third paper, the results are quickly obtained strictly by filtered methods, though in some decisive details reference is made to the thorough investigation in the first two papers. One gets a spectral sequence, whose final term E_∞ is $H(H \bmod F, V, \pi)$ and the second term ${}^rE_2^s = H_{\text{topologic}}^s(\mathfrak{M}/\mathfrak{F}) \otimes H_{\text{algebraic}}^s(\mathfrak{M}, V, \pi)$, \mathfrak{F} being here any compact subgroup of \mathfrak{M} . The connections with work of Hochschild and Serre (this Zbl. 53, 14) are indicated.

H. Guggenheimer.

Verbände. Ringe. Körper:

Schuff, Hans Konrad: Polynome über allgemeinen algebraischen Systemen. Math. Nachr. 13, 343—366 (1955).

Verf. führt in der vorliegenden Arbeit ältere Untersuchungen, die von K. Dörge und ihm selbst stammen (vgl. dies. Zbl. 42, 16 sowie 52, 256), zu einem gewissen Abschluß. Es kommt ihm dabei darauf an, den Begriff des „algebraischen Systems“ denkbar weit zu fassen. Während z. B. die Ergebnisse der letzten Arbeit (dies. Zbl. 52, 256) bereits auf Gruppen mit Operatoren und Vektorräume angewandt werden konnten, fallen diesmal auch die früher noch nicht erfaßten nullteilerfreien Ringe und Körper unmittelbar in den Anwendungsbereich. Allerdings scheint dem Ref. die tatsächliche Anwendung in den genannten Spezialfällen zum mindesten unmittelbar nur wohlbekannte, verhältnismäßig naheliegende Resultate zu liefern, was im übrigen bei einem so weit gespannten Rahmen von vornherein nicht anders zu erwarten war. Was die Einordnung in die vorhandene Literatur angeht, so berührt sich die Arbeit vor allem mit den Untersuchungen von Shoda über allgemeine algebraische Systeme und mit G. Birkhoff. Insbesondere ist der Begriff des Polynomsystems dem der freien Algebra von Birkhoff analog. Die Verallgemeinerung gegenüber Shoda und Birkhoff liegt vor allem darin, daß systematisch nicht eindeutige Operationen zugelassen werden, und daß die Menge der Forderungsgleichungen immer eine beliebige Mächtigkeit besitzen darf, während Shoda und Birkhoff meistens nur endliche Mengen von Forderungsgleichungen betrachten.

W. Krull.

Fujiwara, Tsuyoshi and Kentaro Murata: On the Jordan-Hölder-Schreier theorem. Proc. Japan Acad. 29, 151—153 (1953).

In einem Verband L bezeichne m/n das abgeschlossene Intervall zwischen m und n ($m \geq n$); das Element $a \in m/n$ heiße m/n -modular, falls aus $x, y \in m/n$, $x \geq a$ stets $(x \cap y) \cup a = x \cap (y \cup a)$ und aus $x, y \in m/n$, $x \geq y$ stets $(x \cap a) \cup y = x \cap (a \cup y)$ folgt. Es wird nun die folgende Verallgemeinerung des Jordan-Hölder-Schreierschen Satzes bewiesen. Es seien $m = a_0 > a_1 > \dots > a_r = n \geq n_0$, $m = b_0 > b_1 > \dots > b_s = n \geq n_0$ solche Ketten in L , daß a_i a_{i-1}/n_0 -modular und b_j b_{j-1}/n_0 -modular sind. Durch Einschaltung der Elemente $a_{ij} = a_{i+1} \cup (a_i \cap b_j)$ und $b_{ij} = b_{j+1} \cup (a_i \cap b_j)$ erhält man Ketten, so daß $a_{ij}/a_{i,j+1}$ und $b_{ij}/b_{i+1,j}$ projektiv und isomorph sind.

L. Fuchs.

Fujiwara, Tsuyoshi: Remarks on the Jordan-Hölder-Schreier theorem. Proc. Japan Acad. 31, 137—140 (1955).

Der im vorstehenden Referat erwähnte Satz wird für algebraische Systeme (s. Verf. dies. Zbl. 57, 265) verallgemeinert. Als Spezialfall betrachtet Verf. einen Verband als algebraisches System mit der einzigen Operation \cup .

L. Fuchs.

Dwinger, Ph.: On the closure operators of the ordinal product of closed lattices. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 36—40 (1955).

Es seien zwei beliebige vollständige Verbände M, N gegeben, und es sei $L = M \circ N$ das (wieder als vollständiger Verband aufgefaßte) Ordinalprodukt von M und N [siehe G. Birkhoff, *Lattice Theory* (dies. Zbl. 33, 101), Chap. I, § 8]. Weiter bedeute C_X den (vollständigen) Verband aller Abschließungsoperatoren des vollständigen Verbandes X . — Verf. zeigt zuerst, daß C_L und C_M vollständig \wedge -homomorph sind. Zunächst verschärft er dieses Resultat, indem er zeigt, daß es einen gewissen vollständigen Unterverband C'_L von C_L gibt, der zu C_M (nicht nur (vollständig) \wedge -homomorph sondern sogar) vollständig (\wedge, \vee)-homomorph ist. [Bei einem vollständigen (\wedge, \vee)-Homomorphismus zwischen vollständigen Verbänden gehen definitionsgemäß Durchschnitte bzw. Vereinigungen beliebig vieler Elemente in die Durchschnitte bzw. die Vereinigungen der betreffenden Bildelemente über.] *M. Benado.*

Dwinger, Ph.: The closure operators of the cardinal and ordinal sums and products of partially ordered sets and closed lattices. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 341—351 (1955).

Es werden Ergebnisse aus einer früheren Arbeit des Verf. (vgl. vorstehendes Referat) auf beliebige teilweise geordnete Mengen übertragen und zugleich ergänzt. Bezeichnungen: X, Y, \dots bedeuten teilweise geordnete Mengen; $X + Y$ bzw. $X \oplus Y$ und $X \cdot Y$ bzw. $X \circ Y$ bedeuten die Kardinal- bzw. Ordinalsumme und das Kardinal- bzw. Ordinalprodukt davon. Weiter bedeute C_X die (in der üblichen Weise) teilweise geordnete Menge aller Abschließungsoperatoren von X . Schließlich bedeute $X \cong Y$, daß (die teilweise geordneten Mengen) X und Y isomorph sind (im Sinne der Enthaltenseinsbeziehung). Sätze. 1. Es ist $C_{X+Y} \cong C_X \cdot C_Y \cong C_{X \cdot Y}$, wobei $C_{X \cdot Y} \subseteq C_{X \cdot Y}$; besitzen aber X und Y Nullelemente, so gibt es eine isotone (d. h. ordnungstreue) Abbildung von $C_{X \cdot Y}$ auf $C_X \cdot C_Y$; 2. Es gibt eine isotone Abbildung von $C_{X \oplus Y}$ auf C_Y (dabei spielt der zweite Ordinalsummand Y eine ausgezeichnete Rolle) und eine isotone Abbildung von $C_{X \cdot Y}$ auf C_X (bzw. C_Y). Anwendung auf den Fall, wo X, Y, \dots vollständige Verbände sind. *M. Benado.*

Dwinger, Ph.: On the group of automorphisms of the lattice of closure operators of a complete lattice. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 507—511 (1955). Errata. Ibidem 59, 128 (1956).

In Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Ö. Ore [Ann. of Math. 44, 514—553 (1943)] beweist Verf., daß die Automorphismengruppe des (vollständigen) Verbandes aller Abschließungsoperatoren (= closure operations, opérations de fermeture) irgendeines vollständigen Verbandes L isomorph ist zu der Automorphismengruppe von L . In den Errata werden einige kleine Druck- und Beweisfehler berichtigt. *M. Benado.*

Ville, M. J.: Éléments de l'algèbre de Boole. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 4, 107—140 (1955).

The paper is an elementary introduction to the theory of Boolean algebras and related questions. Table of contents: 1. Algèbre des classes. 2. Algèbre binaire de Boole. 3. Treillis. 4. Comparaison de l'algèbre de Boole avec l'algèbre ordinaire. 5. Applications de l'algèbre de Boole. *R. Sikorski.*

Drazin, M. P.: Engel rings and a result of Herstein and Kaplansky. Amer. J. Math. 77, 895—913 (1955). Correction. Ibid. 78, 224, 899 (1956).

In any ring (always supposed associative) denote the commutator $xy - yx$ of x and y by $[x, y]$ and define a sequence of functions $e_k(x, y)$ inductively by the rules: $e_0(x, y) = x$, $e_{k+1}(x, y) = [e_k(x, y), y]$. A ring R with a commutative ring Φ of operators is called an m -ring (m a positive integer) if for each pair $x, y \in R$ there exist integers k, l, n and $\alpha \in \Phi$, $a \in R$ (all depending on x and y) such that $1 \leq l \leq m$, $x^{m-1} e_k(\alpha x^{l+1} + x^{l+1} a - x^l, y^n) = 0$. Examples are algebraic rings of bounded index, and rings with minimum condition on left or right ideals. In the

special case $\alpha = a = 0$, $l = m = 1$, R is called a K -ring. The author's main concern is to establish the property of being commutator-nil for wide classes of rings. Here a ring is called commutator-nil if the 2-sided ideal generated by all commutators $[a, b]$ is nil. He shows that any K -ring R which is of prime characteristic p (i. e. $p x = 0$ for all $x \in R$) is commutator-nil. The proofs are mainly direct, except for the following result by Herstein (this Zbl. 51, 25) which they extend: If every element of a ring R has a power in the centre then R is commutator-nil. — The other topic discussed concerns Engel rings, which may be regarded as the special case of K -rings for which $n = 1$. The results proved centre around the following theorem (Gruenberg, unpublished): Let R be a finitely generated Engel ring; if, for a given set X of generators of R , the subring $[X]$ of the associated Lie ring $[R]$ is soluble, then R has finite class.

P. M. Cohn.

McCoy, Neal H.: Subdirect sum representations of prime rings. Duke math. J. 22, 357—363 (1955).

In einer 1950 erschienenen Arbeit (vgl. dies. Zbl. 40, 302) hatte der Referent gezeigt, daß u. U. unendlich viele Integritätsbereiche von untereinander teilweise sehr verschiedenem arithmetischem Typus als subdirekte Summen von ein und derselben Körpermengen dargestellt werden können. Dabei kam es hauptsächlich darauf an, eine Reihe von instruktiven Beispielen zu finden; die Beschränkung auf das Abzählbare erschien daher durchaus sachgemäß. — In der vorliegenden Arbeit bemerkt Verf. zunächst, daß die meisten Resultate der älteren Untersuchung in sinngemäßer Umformulierung auf den Fall übertragen werden können, daß nicht Integritätsbereiche, sondern beliebige Primringe subdirekt darzustellen sind. Dabei ist unter einem Primring ein assoziativer, aber nicht notwendig kommutativer Ring mit oder ohne Einheitselement zu verstehen, dessen Nullideal ein Primideal ist, bei dem also für irgendwelche Ideale a_1, a_2 aus $a_i \neq 0$ ($i = 1, 2$) stets $a_1 a_2 \neq 0$ folgt. Die Übertragung der älteren Resultate ist möglich, weil es bei den Beweisen im wesentlichen immer wieder darauf ankommt, aus $a_1 \cap a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$ auf $a_2 = 0$ zu schließen, — und dieser Schluß ist bei Primringen ebenso zulässig wie bei Integritätsbereichen. — Zur Veranschaulichung der im allgemeinen Fall anzuwendenden Überlegungen beweist Verf. ausführlich vor allem den folgenden Satz: Wenn der abzählbare Primring R mit unendlichem Zentrum eine echte Darstellung als subdirekte Summe einer abzählbaren Menge M von Primringen R_i besitzt, so läßt sich auch der über R gebildete Polynomring $R[x]$ als subdirekte Summe der gleichen Ringmenge M darstellen. Ein weiterer Satz formuliert ein analoges Teilresultat für den Fall, daß das Zentrum Z des Primringes R endlich ist. (Dieses Teilresultat wird im Kommutativen, also für $R = Z$, inhaltsleer. Denn ein kommutativer Primring Z ist ein Körper, und ein Körper besitzt keine echte subdirekte Darstellung. *W. Krull.*

Deskins, W. E.: On the homomorphisms of an algebra onto Frobenius algebras. Pacific J. Math. 5, 501—511 (1955).

A sei eine assoziative Algebra vom Range n über einem Körper und $R(a)$ bzw. $S(a)$ sei die erste bzw. zweite reguläre Darstellung. Bedeutet $Q(a)$ die parastrophische Matrix, so kann man $\{Q(a)\}$ zu einem A -Doppelmodul machen, indem man $b * Q(a) = S(b) Q(a)$, $Q(a) * b = Q(a) R(b)$ setzt. Verf. beweist: i) Eine parastrophische Matrix Q vom Range m bestimmt ein Rechtsideal $B = \{b \in A \mid Q * b = 0\}$ vom Range $n - m$. ii) Ist Q zu einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ähnlich, wo T eine nicht-singuläre Matrix vom Range m ist, dann bestimmt Q ein zweiseitiges Ideal B vom Range m , das ein parastrophisches Ideal heißt. iii) Verf. nennt ein parastrophisches Ideal B regulär, wenn es ein Idempotent u gibt und $A u \cup B = A$. Ist ein parastrophisches Ideal B regulär, so ist $A - B$ eine Frobeniussche Algebra und umgekehrt. iv) N_1 und N_2 seien zwei reguläre parastrophische Ideale vom minimalen Range m , die durch zwei symmetrische Matrizen Q_1 und Q_2 bestimmt werden. Wenn

Q_1 und Q_2 kein von Null verschiedenes Element in den gleichen Schnittpunkten der Zeilen und der Spalten gemeinsam haben, und wenn der Grundkörper mindestens $m + 1$ Elemente enthält, dann ist $A - N_1 \cong A - N_2$. *K. Asano.*

Kertész, A.: On arbitrary systems of linear equations over semi-simple rings. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 73—74 (1955).

Vgl. die Besprechung der ausführlichen Veröffentlichung in dies. Zbl. 64, 264.

Northcott, D. G.: A note on classical ideal theory. Proc. Cambridge philos. Soc. 51, 766—767 (1955).

Es sei R ein Noetherscher Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper K und es sei R einartig, es seien also alle von (0) verschiedenen Primideale von R maximal. Dann ergibt sich rasch durch eine leichte Verallgemeinerung eines Schlusses von Chevalley das Lemma: Ist der Ring R' zwischen R und K ein endlicher R -Modul und $x \neq 0$ aus R , so ist die Länge des R -Moduls $R/R \cdot x$ nie kleiner als die Länge des R -Moduls $R'/R' \cdot x$. Aus dem Lemma folgt fast unmittelbar der Satz: Ist \tilde{K} ein endlicher algebraischer Oberkörper von K und \tilde{S} die ganz abgeschlossene Hülle von R in \tilde{K} , so ist \tilde{S} ein Dedekindscher Ring mit eindeutiger Zerlegung der Ideale in Primidealfaktoren. (Es ist nur zu zeigen, daß \tilde{S} Noethersch, und es gibt sicher einen Noetherschen Unterring $\tilde{R} = R[a_1, \dots, a_m]$ von \tilde{S} mit dem Quotientenkörper \tilde{K} . Wäre nun \tilde{S} nicht Noethersch, so könnte man ein $x \neq 0$ aus \tilde{R} und einen Ring $\tilde{R}' \subset \tilde{S}$ mit endlicher Modulbasis über R so bestimmen, daß das Lemma für $\tilde{R}'/\tilde{R}' \cdot x$ und $\tilde{R}/\tilde{R} \cdot x$ falsch.) *W. Krull.*

Nagata, Masayoshi: On the derived normal rings of Noetherian integral domains. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 29, 293—303 (1955).

In der vorliegenden Arbeit beweist Verf. in sehr durchsichtiger Weise den Morischen Satz, daß die normale Hülle eines Noetherschen Integritätsbereichs immer ein Krull-Ring (d. h. eine endliche diskrete Hauptordnung) ist. Einer kurzen und eleganten Herleitung des Akizukischen Theorems, daß jeder Ring zwischen einem primären Noetherschen Integritätsbereich und seiner normalen Hülle selbst Noethersch ist, und dem Beweis des an sich interessanten Hilfssatzes, daß der zwischen dem Noetherschen Integritätsbereich R und seinem Quotientenkörper K liegende Ring S stets mit R zusammenfällt, wenn R in S ganz abgeschlossen ist, und wenn außerdem zu jedem R -Primideal ein darüber liegendes S -Primideal existiert, folgt ein Kapitel über die Fundamentalsätze der Krull-Ringe. Dann wird zunächst für einen nullteilerfreien Noetherschen Stellenring R mit Hilfe des Übergangs zur vollständigen Hülle R^* nach geläufigem Schema überraschend einfach gezeigt, daß die normale Hülle \tilde{R} von R im Quotientenkörper K immer ein Krull-Ring ist. Der allgemeine Fall eines beliebigen Noetherschen Integritätsbereiches R wird schließlich im wesentlichen auf den folgenden, bemerkenswerten Hilfssatz zurückgeführt: Ist \tilde{p}^* ein minimales Primoberideal von $a \cdot \tilde{R}$ ($a \neq 0$ aus R), dann ist stets $\tilde{p} \cap R = p$ ein zu $a \cdot R$ gehöriges Primideal. — Den Abschluß der Arbeit bildet ein neuer Beweis des zuerst von Mori gefundenen Satzes, daß die normale Hülle \tilde{R} von R immer Noethersch ist, wenn R den Rang 2 besitzt. *W. Krull.*

Jaffard, Paul: La notion de valuation. Enseignement math. 40, 5—26 (1955).

This is a concise but very clearly written survey of the different aspects of the theory of valuations. An extensive bibliography, containing no less than 70 items, is added. *J. Verhoeff.*

Gravett, K. A. H.: Valued linear spaces. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 6, 309—315 (1955).

Es sei Λ eine total geordnete Menge, die ein kleinstes Element μ enthält; L sei ein linearer Vektorraum über dem Körper K . Dann spricht Verf. von einer Bewer-

tung $\{L, \Delta, d\}$ von L (mit Hilfe der Wertmenge Δ), wenn eine Abbildung d von L auf Δ gegeben ist, die den folgenden Bedingungen genügt: 1. $dx = \mu$ dann und nur dann, wenn $x = 0$. 2. $dx = d(k \cdot x)$ für jedes von Null verschiedene $k \in K$. 3. $d(x + y) \leq \max(dx, dy)$. — Ist eine feste Bewertung $\{L, \Delta, d\}$ gegeben, so setzt Verf. $A(\mu) = B(\mu) = \{0\}$, während er für $\delta \neq \mu$ aus Δ mit $A(\delta)$ bzw. $B(\delta)$ den linearen Vektorraum aller der $x \in L$ bezeichnet, die der Bedingung $dx \leq \delta$ bzw. $dx < \delta$ genügen. Unter $C(\delta) = A(\delta)/B(\delta)$ versteht er den Quotientenraum von $A(\delta)$ nach dem Unterraum $B(\delta)$. Sind $\{L_i, \Delta_i, \delta_i\}$ ($i = 1, 2$) Bewertungen und gilt $L_1 \subseteq L_2$, $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, so heißt $\{L_2, \Delta_2, d_2\}$ Fortsetzung von $\{L_1, \Delta_1, d_1\}$, wenn $d_1 x_1 = d_2 x_1$ für alle $x_1 \in L_1$. Ist $\{L_2, \Delta_2, d_2\}$ Fortsetzung von $\{L_1, \Delta_1, d_1\}$ so läßt sich $C_1(\delta_1)$ für jedes $\delta_1 \in \Delta_1$ in kanonischer Weise als Unterraum von $C_2(\delta_1)$ auffassen. Es wird nun $\{L_2, \Delta_2, d_2\}$ eine unmittelbare Fortsetzung von $\{L_1, \Delta_1, d_1\}$ genannt, wenn nicht nur $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$, sondern auch $C_1(\delta) = C_2(\delta)$ für jedes $\delta \in \Delta$. Eine Bewertung, die keine echte unmittelbare Fortsetzung besitzt, heißt maximal. Um explizit maximale Bewertungen angeben zu können und einen Einbettungssatz zu beweisen, definiert Verf. zu jeder mit Hilfe einer total geordneten Menge Δ indizierten Menge $\{E_\delta, \Delta\}$ von Vektorräumen E_δ über K in naheliegender Weise die endliche Summe F und die wohlgeordnete Summe W . Zu F und W erhält man zwei natürliche Bewertungen $\{F, \Delta, d_f\}$, $\{W, \Delta, d_w\}$, und es erweist sich $\{W, \Delta, d_w\}$ als unmittelbare, maximale Fortsetzung von $\{F, \Delta, d_f\}$. Zu zwei beliebigen unmittelbaren, maximalen Fortsetzungen $\{M_i, \Delta, d_i\}$ ($i = 1, 2$) von $\{F, \Delta, d_f\}$ existiert stets ein Bewertungs-Isomorphismus von M_1 auf M_2 über F . — Ist schließlich $\{L, \Delta, d\}$ irgendeine gegebene Bewertung und erhält man für die E_δ die zu $\{L, \Delta, d\}$ gehörigen Räume C_δ , so gilt der Einbettungssatz: Ist $\{M, \Delta, d_m\}$ eine unmittelbare maximale Fortsetzung von $\{F, \Delta, d_f\}$, so läßt sich stets L in M so einbetten, daß $\{L, \Delta, d\}$ bzw. $\{M, \Delta, d_m\}$ unmittelbare Fortsetzung von $\{F, \Delta, d_f\}$ bzw. $\{L, \Delta, d\}$. — Der Einbettungssatz umfaßt in gewissen Sinn die Hahnschen Sätze über Einbettung und Vollständigkeit von geordneten Abelschen Gruppen, andererseits ist er ein Gegenstück zu den Sätzen über maximal bewertete Körper. Bei den einfachen und ausgefeilten Beweisen stützt sich Verf. hauptsächlich auf den von Ostrowski in die Bewertungstheorie eingeführten und vor allem von Kaplansky mit großem Erfolg benutzten Begriff der Pseudokonvergenz.

W. Krull.

Ribenboim, P.: Sur une conjecture de Krull en théorie des valuations. Nagoya math. J. 9, 87—97 (1955).

Es sei A ein primärer Integritätsbereich mit Einselement (A hat ein nichttriviales Primideal \mathfrak{p}), der vollständig ganz abgeschlossen ist (alle bezüglich A fast ganzen Elemente des Quotientenkörpers gehören zu A). Ist \mathfrak{p} ein Hauptideal, so ist A ein spezieller diskreter Bewertungsring. Zur Vermutung von Krull (dies. Zbl. 15, 245), ob auch im allgemeinen Fall A stets spezieller Bewertungsring (reelle Wertgruppe) ist, gab Nagata (dies. Zbl. 46, 257) ein Gegenbeispiel an. Verf. nennt hier zusätzliche Bedingungen, unter denen die Krullsche Vermutung richtig wird. Hierzu wird $\mathfrak{p} = \bigcup_{r \geq 1} t_r A$ als Vereinigung einer echten unendlichen Teilerkette von Hauptidealen angesetzt und an diese Hauptidealkette werden einige „Grenzwertforderungen“ gestellt, die die Konstruktion einer zugehörigen Bewertung ermöglichen. Schließlich werden diese Bedingungen zum Nagataschen Beispiel hin abgegrenzt.

E. Lamprecht.

Nagata, Masayoshi: Corrections to my paper „On Krull's conjecture concerning valuation rings“. Nagoya math. J. 9, 209—212 (1955).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 46, 257) hatte Verf. einen primären, vollständig ganz abgeschlossenen Ring R angegeben der kein Bewertungsring ist. Der damalige Beweis, daß R wirklich alle gewünschten Eigenschaften besitzt, war aber lückenhaft. In der vorliegenden Note werden diese Lücken ausgefüllt. W. Krull.

Ribenboim, P.: Sur une note de Nagata relative à un problème de Krull. *Math. Z.* **64**, 159—168 (1956).

M. Nagata hat 1952 einen primären, vollständig ganz abgeschlossenen Integritätsbereich R angegeben, der kein Bewertungsring ist. Indessen war sein Beweis, daß R tatsächlich alle gewünschten Eigenschaften besitzt, lückenhaft. Verf., der wohl als erster diese Lücken bemerkte, zeigt hier — unabhängig von Nagatas eigener Korrektur (s. vorstehendes Referat), — wie sie ausgefüllt werden können. Darüber hinaus konstruiert er einen primären, vollständig ganz abgeschlossenen Integritätsbereich R^0 , der ebenfalls kein Bewertungsring, aber (anders als der Nagatasche Ring R) Durchschnitt von diskreten Bewertungsringen ist. Außerdem untersucht er die Einheitengruppen in R und R^0 genauer. Auch zeigt er, daß das einzige Primideal $\neq (0)$ von R als Vereinigung einer Folge von Hauptidealen $t_r \cdot R$ dargestellt werden kann, wobei $t_r \cdot R \subset t_{r+1} \cdot R$ und $(t_r \cdot R) = (t_{r+1} \cdot R)^{n_r}$ ($r = 1, 2, \dots$). *W. Krull.*

Narita, Masao: On the structure of complete local rings. *J. math. Soc. Japan* **7**, 435—443 (1955).

Die Cohenschen Struktursätze für vollständige Stellenringe gelten, wie M. Nagata (dies. Zbl. **39**, 263; **51**, 26) gezeigt hat, auch dann, wenn man unter einem Stellenring jeden kommutativen Ring R mit Einselement versteht, bei dem die Menge aller Nichteinheiten ein Ideal \mathfrak{m} bildet und $\bigcap_n \mathfrak{m}^n = (0)$ ist. Verf. gibt einen neuen,

sehr einfachen Beweis der Struktursätze für den allgemeinen Nagataschen Fall. Es handelt sich natürlich vor allem um das Theorem: Ist q bzw. q' die Charakteristik des vollständigen Stellenrings R bzw. des Restklassenkörpers R/\mathfrak{m} , so enthält R stets einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten vollständigen Stellenunterring R_0 mit dem maximalen Primideal $q' \cdot R_0$, bei dem der Restklassenkörper $R_0/q' \cdot R_0$ in kanonischer Weise mit R/\mathfrak{m} identifiziert werden kann. Ist $q = q'$ (R_0 ein Körper) oder $q \neq q'$ und R/\mathfrak{m} vollkommen, so ist R_0 stets eindeutig bestimmt. — Im Fall $q = q'$ sind die Beweismethoden analog zu denen von A. Geddes (dies. Zbl. **56**, 29). *W. Krull.*

Northcott, D. G.: The neighbourhoods of a local ring. *J. London math. Soc.* **30**, 360—375 (1955).

Es sei Q ein nullteilerfreier Stellenring der Dimension d mit dem maximalen Primideal \mathfrak{m} ; $e(Q)$ sei die Vielfachheit von Q im Sinne der Thèse von P. Samuel. $a \in Q$ wird als sf.-Element (élément superficiel im Sinne von Samuel) vom Grad s bezeichnet, wenn $\mathfrak{m}^{s+t} : (a) = \mathfrak{m}^s$ für jedes t . Ist $Q/\mathfrak{m} = K$ unendlich, so gibt es stets sf.-Elemente ersten Grades. Verf. zeigt zunächst: die Menge aller Quotienten $a \cdot \mathfrak{v}_s^{-1}$ ($a \in \mathfrak{m}^s$; \mathfrak{v}_s sf.-Element s -ten Grades; $s = 1, 2, \dots$) bildet einen Noetherschen Oberring \mathfrak{R} von Q . Es ist \mathfrak{v}_s genau dann sf.-Element s -ten Grades, wenn $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{v}_s = \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{m}^s$. Die erste Nachbarschaft $N_1(Q)$ von Q ist die Menge der Quotientenstellenringe $Q_i = \mathfrak{R}_i$ von \mathfrak{R} , die den maximalen Primoberidealen $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_m$ von $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{m}$ entsprechen. (Bezeichnung etwas anders als in der Arbeit). — Gibt es in \mathfrak{R} mindestens ein sf.-Element ersten Grades, so erhält man: Alle $Q_i \in N_1(Q)$ sind eindimensional. Bei jedem Q mit $d = 1$ so wie bei jedem geometrischen Stellenring Q gilt:

$$(1) \quad \sum_{i=1, \dots, m} e(Q_i) \leq e(Q).$$

Ist Q ein geometrischer Stellenring, so sind es auch die Q_i . Für $d = 1$ ist \mathfrak{R} stets ein endlicher Q -Modul. Für $d = 1$ ist dann und nur dann $\mathfrak{R} = Q$, $N_1(Q) = \{Q\}$, wenn Q regulär. Man definiert jetzt induktiv: Die k -te Nachbarschaft $N_k(Q)$ ($k = 2, 3, \dots$), besteht aus allen den (endlich vielen) Stellenringen $Q^{(k)}$, zu denen ein $Q^{(k-1)} \in N_{k-1}(Q)$ mit $Q^{(k)} \in N_1(Q^{(k-1)})$ existiert. $B(Q) = N_1(Q) \cup N_2(Q) \cup \dots$ heißt der Nachbarschaftsbaum von Q . Fast unmittelbar aus dieser Definition folgt: Zu jedem $Q^{(k)} \in N_k(Q)$ existiert genau ein $Q^{(k-1)} \in N_{k-1}(Q)$ mit $Q^{(k)} \in N(Q^{(k-1)})$. Aus (1) er-

gibt sich weiter: Für $m \geq m_0$ besteht für jedes $Q^{(k)} \in N_m(Q)$ die erste Nachbarschaft $N_1(Q^{(k)})$ aus genau einem Ring $Q^{(k+1)}$. Bei einem geometrischen Stellenring zeigt man darüber hinaus: Es gibt ein m_0 , für das alle $Q^{(m_0)} \in N_{m_0}(Q)$ regulär sind, so daß $N_{m_0}(Q) = N_{m_0+1}(Q) = \dots$ wird; es besteht also $B(Q)$ nur aus endlich vielen verschiedenen Ringen. — Der Beweis stützt sich vor allem auf das folgende Transformations- und Invarianztheorem: Es sei $Q \cdot \mathfrak{m} = Q \cdot (u_1, \dots, u_r)$ und ν ein nach Voraussetzung vorhandenes sf.-Element ersten Grades; ferner sei $\mathfrak{R}^{(\nu)} = Q(u_1 \cdot \nu^{-1}, \dots, u_r \cdot \nu^{-1})$ der Ring aller Quotienten $a_s \cdot \nu^{-1}$ ($a_s \in \mathfrak{m}^s$). Dann wird $\mathfrak{R} \cdot \nu = \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{m}$, es entsprechen die minimalen Primoberideale $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$ von $\mathfrak{R}^{(\nu)} \cdot \nu$ umkehrbar eindeutig den minimalen Primoberidealen $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_m$ von $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{m}$ und man hat $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_i}^{(\nu)} = \mathfrak{R}_{\mathfrak{P}_i} = Q_i$ ($i = 1, \dots, m$). — Nach diesem Satz kann man bei der Untersuchung der Q_i statt mit \mathfrak{R} mit einem der leichter zugänglichen Ringe $\mathfrak{R}^{(\nu)}$ arbeiten, der aus Q gewissermaßen durch die einfache Basistransformation $u_i \rightarrow u_i \cdot \nu^{-1}$ gewonnen wird, und das Ergebnis ist invariant gegenüber der speziellen Wahl von ν . (Zur geometrischen Bedeutung dieses Resultats vgl. Verf., dies. Zbl. **67**, 391.) — Außer der Bildung der Ringe $\mathfrak{R}^{(\nu)}$ muß noch ein zweiter, fundamentaler Beweisgedanke wenigstens andeutungsweise hervorgehoben werden: Es wird ausgehend von einer beliebig, aber festgewählten Basisdarstellung $Q \cdot \mathfrak{m} = Q \cdot (u_1, \dots, u_r)$ im Formenring $K[x_1, \dots, x_r]$ das Leitideal \bar{n} des Nullideals von Q gebildet und eine umkehrbare eindeutige Beziehung zwischen den minimalen Primoberidealen bzw. isolierten Primärkomponenten von \bar{n} einerseits und denen von $\mathfrak{R}^{(\nu)} \cdot \nu$ andererseits hergestellt. Tatsächlich betrachtet Verf. sogar beliebige zu \bar{n} bzw. $\mathfrak{R}^{(\nu)} \cdot \nu$ gehörige Primideale, sowie Primärkomponentenzerlegungen von \bar{n} bzw. $\mathfrak{R}^{(\nu)} \cdot \nu$, und er kommt so, mit zum Teil recht subtilen Überlegungen, rein idealtheoretisch noch zu wesentlich schärferen Ergebnissen als denen, die für die oben skizzierte Nachbarschaftstheorie an sich benötigt werden.

W. Krull.

Northcott, D. G.: A note on the $AF + B\Phi$ theorem and the theory of local rings. Proc. Cambridge philos. Soc. **51**, 545—550 (1955).

Die Note bringt interessante Ergänzungen zu den Hauptsätzen des Verf. über Nachbarschaften von Stellenringen (vgl. vorstehendes Referat). Sei Q ein nullteilerfreier, eindimensionaler Stellenring, (u_1, \dots, u_r) eine — nicht notwendig minimale — Basis seines maximalen Primideals \mathfrak{m} . Der Restklassenkörper $Q/\mathfrak{m} = K$ soll wie in der vorstehenden Arbeit — in Zukunft mit N . zitiert — unendlich sein, darf aber andere Charakteristik besitzen als Q . Zu der Basis (u_1, \dots, u_r) von \mathfrak{m} gehört im Formenring $K[x_1, \dots, x_r]$ ein bestimmtes Leitideal \bar{n} des Nullideals Q . Verf. nennt nun Q gewöhnlich, wenn bei einer (und damit, wie gezeigt werden kann, bei jeder) Basiswahl \bar{n} ein Radikal, also Durchschnitt von Primidealen ist. Mit den Methoden von N . (unter Benutzung der Theorie der Hilbertschen charakteristischen Funktion und der auch für N . fundamentalen Multiplizität $e(Q)$) beweist er: Ist Q gewöhnlich und sind Q_1, \dots, Q_n die Ringe der ersten Nachbarschaft $N_1(Q)$, so wird $Q_1 \cap \dots \cap Q_n = \mathfrak{R}$ die ganz abgeschlossene Hülle von Q in seinem Quotientenkörper \mathfrak{R} und es ist \mathfrak{R} ein endlicher Q -Modul. Die Ringe Q_i sind unter diesen Umständen diskrete Bewertungsringe, und man erhält weiter, falls B_i die zu Q_i gehörige Bewertung von Q_i bedeutet, den Satz: Sind g, h aus Q , und ist $B_i(h) \geq B_i(g) + e(Q) - 1$ ($1 \leq i \leq n$), so gilt $h \in Q \cdot g$. — Die Möglichkeit, aus diesem Resultat ein abstraktes Gegenstück zu dem Noetherschen ($AF + B\Phi$)-Theorem der ebenen algebraischen Kurven abzuleiten, liegt für den Kenner auf der Hand.

W. Krull.

Kantz, Georg: Über Integritätsbereiche mit eindeutiger Primelementzerlegung. Arch. der Math. **6**, 397—402 (1955).

Verf. gibt ein hinreichendes und notwendiges Kriterium dafür an, daß in einem Integritätsbereich mit Einselement der ZPE-Satz (eindeutige Primelementzerlegung) gilt. Das gleiche Kriterium (nur mit einer additiv geschriebenen Betragsfunktion an

Stelle der multiplikativen des Verf.) findet sich schon bei Krull (dies. Zbl. 2, 10).

E. Lamprecht.

Kantz, Georg: Über den Typus eines Zerlegungsringes. Monatsh. Math. 59, 104—110 (1955).

Verf. zeigt: Ist ein Integritätsbereich J mit Einselement Hauptidealring und ist J der Ring der über J ganzen Elemente eines algebraischen Erweiterungskörpers des Quotientenkörpers von J und gilt in J der ZPE-Satz, so ist \bar{J} sogar Hauptidealring. — Eine vom Verf. angegebene Folgerung über die Struktur der Ringe mit ZPE-Satz steht offensichtlich im Widerspruch zu bekannten Tatsachen über Stellenringe, die ZPE-Ringe sind. Der letzte Abschnitt ist schon an anderer Stelle enthalten (s. vorstehendes Referat).

E. Lamprecht.

Leicht, J.: Über ZPE-Ringe in der algebraischen Geometrie. Monatsh. Math. 60, 214—222 (1956).

Verf. gibt nach Aufzählung einiger wesentlicher Typen von ZPE-Ringen (Ringen mit eindeutiger Primelementzerlegung) ein Gegenbeispiel zu einer Schlußweise von Kantz (s. obenstehendes Referat) und widerlegt einen von Kantz formulierten Satz (jeder ZPE-Ring wäre rein transzendente Erweiterung eines Hauptidealringes) durch Gegenbeispiele: 1. Aus der Theorie der Stellenringe. 2. Nach Gröbner (dies. Zbl. 46, 387) ist für $n \geq 4$, $J = K[x_1, \dots, x_n]/f(x_1, \dots, x_n)$, wenn f ein irreduzibles singularitätenfreies Polynom ist, ein ZPE-Ring aber i. a. kein Hauptidealring; wenn die zugehörige Hyperfläche kein Hyperkegel ist, kann J nicht rein-transzendente Erweiterung eines Teilringes sein. Letztere Überlegung wird noch in algebraisch-geometrischer Richtung auf andere Dimensionen verallgemeinert.

E. Lamprecht.

Seidenberg, A.: On separating transcendence bases for differential fields. Proc. Amer. math. Soc. 6, 726—728 (1955).

In Verallgemeinerung eines Satzes des Verf. (dies. Zbl. 47, 35; Satz VII) wird bewiesen, daß jede D -Transzendenzbasis einer separablen D -Erweiterung $F\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ eines gewöhnlichen D -Körpers F von Primzahlcharakteristik p separierend ist.

A. Jaeger.

Kolehin, E. R.: On the Galois theory of differential fields. Amer. J. Math. 77, 868—894 (1955).

Fortsetzung, Ergänzung und Weg zu Vereinfachungen der bedeutenden Galoistheorie der Differential- (D -) Körper (dies. Zbl. 52, 273) des Verf. unter Benutzung der hier auch auf reduzible Fälle verallgemeinerten Gruppenmannigfaltigkeiten von A. Weil (dies. Zbl. 37, 162). Es seien F ein (partieller) D -Körper der Charakteristik 0 mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper C und F^* eine universale Erweiterung von F mit Konstantenkörper C^* . Die starke Isomorphismengruppe einer stark normalen Erweiterung G von F heiße Galoisgruppe \mathfrak{G} von G/F . Solche Galoisgruppen und (verallgemeinerte) Gruppenmannigfaltigkeiten \mathfrak{M} mit Definitionskörper C und Universalbereich C^* werden unter dem Oberbegriff „algebraische Gruppen“ zusammengefaßt. Sind \mathfrak{H} und \mathfrak{K} algebraische Gruppen, so heiße ein Homomorphismus f von \mathfrak{H} nach \mathfrak{K} rational, wenn $C(f(s)) \leq C(s)$ für alle $s \in \mathfrak{H}$ gilt und durch f Spezialisierungen (über C) wieder in Spezialisierungen übergeführt werden. Verf. beweist die Sätze, daß jedes \mathfrak{G} einem \mathfrak{M} birational isomorph ist (vgl. H. Matsumura, dies. Zbl. 55, 236), und die Umkehrung davon für irreduzible \mathfrak{M} . Beim zweiten Teil wird wesentlich verwertet, daß der Vektorraum der Derivationen des rationalen Funktionenkörpers auf einem irreduziblen \mathfrak{M} eine Basis aus invarianten Derivationen zuläßt. Sei \mathfrak{M}^+ die durch \mathfrak{M} bestimmte Gruppenmannigfaltigkeit mit Universalbereich F^* (anstatt von C^*). Dann heiße 1-Kozyklus von \mathfrak{G} nach \mathfrak{M} jede Abbildung f von \mathfrak{G} nach \mathfrak{M}^+ mit den drei Eigenschaften: 1. $G(f(\sigma)) \leq G(\sigma, G)$ für alle $\sigma \in \mathfrak{G}$. 2. f bildet Spezialisierungen wieder in Spezialisierungen (über G) ab.

3. $f(\sigma\tau) = f(\sigma) \cdot \sigma f(\tau)$ für alle $\sigma, \tau \in \mathfrak{G}$. Die 1-Kohomologieklassen von \mathfrak{G} nach \mathfrak{M} ergeben sich durch eine Äquivalenzrelation $f \sim g$ zwischen 1-Kozyklen, definiert durch die Bedingung, daß ein über G rationales $\alpha \in \mathfrak{M}^+$ mit $g(\sigma) = \alpha^{-1} f(\sigma) \sigma \alpha$ (für jedes $\sigma \in \mathfrak{G}$) existieren muß. Verf. zeigt, daß die Menge $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$ dieser 1-Kohomologieklassen nur aus einem Element besteht, falls \mathfrak{M} die volle Matrizen­gruppe oder F algebraisch abgeschlossen ist, und daß für kommutatives \mathfrak{M} die Gruppe $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$ periodisch ist. Daran anschließend ergibt sich der Satz, daß \mathfrak{G} genau dann eine Picard-Vessiot-Erweiterung von F ist, wenn \mathfrak{G} einer algebraischen Matrizen­gruppe birational isomorph ist, sowie ein kurzer, eleganter Beweis des Satzes (dies. Zbl. 52, 274), daß jede normale D -Erweiterung vom Transzendenzgrad 1 durch D -Adjunktion eines primitiven oder exponentiellen Elementes oder durch D -Adjunktion eines Weierstraßelementes mit darauffolgender endlich-algebraischer Erweiterung erhalten werden kann.

A. Jaeger.

Moriya, Mikao: Zusammenhang zwischen Derivationsmodul und 2-Kohomologiegruppe. I. J. math. Soc. Japan 7, 444—452 (1955).

Let k be a perfect field with respect to a discrete valuation and K/k be a finite separable extension. Let \mathfrak{o} and \mathfrak{D} be the valuation rings of k and K respectively, \mathfrak{P} be the valuation ideal of K and π be a prime element in \mathfrak{D} . Let $H^i(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{D})$ ($i = 1, 2$) be the normal i -cohomology groups of $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ with coefficients in \mathfrak{D} (see M. Moriya, this Zbl. 58, 267). Consider the exact sequence $0 \rightarrow \mathfrak{D} \xrightarrow{\pi^m} \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}/\mathfrak{P}^m \rightarrow 0$. Then the author proves that $\delta: H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{D}/\mathfrak{P}^m) \cong H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{D})$ holds provided that $\pi^m H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{D}) = 0$.

Y. Kawada.

Moriya, Mikao: Theorie der 2-Kohomologiegruppen in diskret bewerteten perfekten Körpern. Math. J. Okayama Univ. 5, 43—77 (1955).

This is a detailed exposition of a former paper of the author (this Zbl. 58, 267).

Y. Kawada.

Auslander, Maurice: On the dimension of modules and algebras. III. Global dimension. Nagoya math. J. 9, 67—77 (1955).

Die Arbeit bedient sich der Bezeichnungen von H. Cartan-S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton (1956), worauf für dieses Referat verwiesen werden muß. — Für einen beliebigen Ring A wird zunächst bewiesen: $\text{l. gl. dim } A = \sup_B \text{l. dim}_A B$, wobei B alle von einem Element erzeugten A -Linksmoduln durchläuft (nach Def. ist $\text{l. gl. dim } A = \sup_A \text{l. dim}_A A$, sup über alle A -Linksmoduln A genommen). Mit dem Funktor Tor wird dann in der folgenden Weise ein abgeschwächter (weak) Dimensionsbegriff eingeführt: Lokal: $-1 \leq \text{w. l. dim}_A A \leq \infty$ und $\text{w. l. dim}_A A < n$ dann und nur dann, wenn $\text{Tor}_n^A(C, A) = 0$ für alle A -Rechtsmoduln C . Global: $0 \leq \text{w. gl. dim } A \leq \infty$ und $\text{w. gl. dim } A < n$ dann und nur dann, wenn $\text{Tor}_n^A = 0$. Entsprechend für r statt l . Es ist $\sup_A \text{w. l. dim}_A A = \text{w. gl. dim } A = \sup_C \text{w. r. dim}_A C$. Da für linksnoethersche Ringe A (jedes Linksideal von A endlich-erzeugbar) $\text{l. dim}_A A = \text{w. l. dim}_A A$ ist, und Entsprechendes für die andere Seite gilt, ergibt sich hiermit: $\text{l. gl. dim } A = \text{w. gl. dim } A$, A linksnoethersch bzw. $r. \text{ gl. dim } A = \text{w. gl. dim } A$, A rechtsnoethersch. Die gleichen Identitäten bestehen, wenn A semi-primär ist (Restklassenring $\Gamma = A/N$ halbeinfach, N Radikal). Für semi-primäre Ringe A und A -Linksmoduln A gilt ferner: $\text{Tor}_n^A(\Gamma, A) = 0$ und $\text{Tor}_n^A(C, A) = 0$ für jeden einfachen A -Rechtsmodul C und $\text{w. l. dim}_A A < n$ und $\text{Ext}_A^n(A, \Gamma) = 0$ und $\text{Ext}_A^n(A, C) = 0$ für jeden einfachen A -Linksmodul C und $\text{l. dim}_A A < n$ sind gleichbedeutend. Ebenfalls sind gleichbedeutend: $\text{Ext}_A^n(\Gamma, A) = 0$ und $\text{Ext}_A^n(C, A) = 0$ für jeden einfachen A -Linksmodul C und $\text{l. inj. dim}_A A < n$. Daraus folgt: $\text{gl. dim } A = \text{l. inj. dim}_A \Gamma = \text{l. dim}_A \Gamma = 1 + \text{l. dim}_A N = \sup_C \text{l. dim}_A C = \sup_C \text{l. inj. dim}_A C$, sup über alle einfachen A -Linksmoduln. Für die

Bestimmung von $\text{gl. dim } A$ sind die folgenden Eigenschaften gleichwertig: $\text{gl. dim } A < n$ und $\text{Ext}_A^n(I, I) = 0$ (beide I als A -Linksmoduln) und $\text{Ext}_A^n(I, I)$ (beide I als A -Rechtsmoduln) und $\text{Tor}_n^A(I, I) = 0$ (linkes I als A -Rechtsmodul, rechtes I als A -Linksmodul). Als Anwendung der vorstehenden Ergebnisse wird bewiesen: Ist A semiprimär und jeder einfache A -Linksmodul mit einem Linksideal von A isomorph, so ist $\text{gl. dim } A = 0, \infty$. Die Voraussetzung ist erfüllt, wenn A direkte Summe primärer Ringe oder ein kommutativer semi-primärer Ring oder ein quasi-frobeniusscher Ring ist oder wenn in A die Rechts- und Linksminimalbedingungen erfüllt sind und jedes zweiseitige Ideal als Links- und als Rechtsideal Hauptideal ist. Abschließend wird noch für Algebren A über einem Körper gezeigt: w. $\text{gl. dim } (A_1 \otimes A_2) \geq \text{w. gl. dim } A_1 + \text{w. gl. dim } A_2$. Sind A_1, A_2 semi-primär und ist $I_1 \otimes I_2$ halbeinfach, so ist $\text{gl. dim } (A_1 \otimes A_2) = \text{gl. dim } A_1 + \text{gl. dim } A_2$.

W. Gaschütz.

Zahlentheorie:

● Centro Internazionale Matematico Estivo (C. I. M. E.): Teoria dei numeri. (2° Ciclo, Varenna, Villa Monastero 16—25 agosto 1955.) Roma: Istituto Matematico dell'Università 1955. 5 nr.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

Ginatempo, Nicola: Problemi di analisi indeterminata in n variabili. Atti Soc. Peloritana Sci. fis. mat. natur. **1**, 15—25 (1955).

Verf. ist bemüht, einige diophantische Gleichungen, z. B. (1) $\sum_{k=1}^n x_k^2 = x_0^2$ oder das System, bestehend aus (1) und (2) $\sum_{k=1}^n x_k = \pm x_0$ auf geometrischem Wege zu lösen. Die Lesbarkeit wird durch die sehr vielen Druckfehler sehr erschwert.

N. Hofreiter.

Mordell, L. J.: Equazioni diofantee. C. I. M. E., Teoria dei numeri, 32 p. (1955).

Die Arbeit stellt einen ausführlichen Auszug von Vorträgen des Verf. dar. Sie enthält: 1. die Auflösung von diophantischen Gleichungen mit Hilfe von Kongruenzen, 2. die Ermittlung von rationalen Lösungen durch einfache geometrische Betrachtungen, 3. die Bestimmung der ganzzahligen Lösungen der Gleichungen $x^2 + y^2 = z^2$; $x^4 + y^4 = z^4$; die Tangenten- und Sekantenmethode, um aus bekannten rationalen Punkten einer Kurve weitere rationale Punkte zu finden. Insbesondere wird diese Methode für kubische und biquadratische Kurven durchgeführt. 5. die Ermittlung von rationalen Punkten auf kubischen Flächen, 6. die Auflösung der Gleichungen $y^2 + 1 = x^3$; $y^2 + 2 = x^3$ mit zahlentheoretischen Methoden, 7. das Theorem der endlichen Basis von Mordell für Mannigfaltigkeiten 3. und 4. Grades. Die Beweise werden teilweise durchgeführt.

N. Hofreiter.

Georgiev, G.: On the solution in rational numbers of certain diophantine equations. Prace mat. **1**, 201—232, russ. u. engl. Zusammenfassg. 232—235, 235—238 (1955) [Polnisch].

Verf. behandelt rationale Lösungen der Gleichung in den x_i :

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = A_0,$$

wo die $A_k \neq 0$ und a_{ki} ganze Zahlen sind. Im folgenden sei A die Determinante $|a_{ki}|$, A_{kp} das algebraische Komplement von a_{kp} in A . Verf. beweist, daß sich alle Lösungen finden lassen, wenn mindestens eine der fünf Bedingungen erfüllt ist:

(1) Es gibt ein System von Zahlen ε_k , die nur die Werte $0, \pm 1$ haben und nicht alle null sind, so daß für jedes $p \leq n$ die Zahlen $\frac{1}{A} \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k A_{kp} \right)$ ganz sind. (2) Alle Zahlen $\frac{1}{A} \sum_{k=1}^n A_{kp}$ ($p \leq n$) sind ganz. (3) $A = \pm 1$. (4) Es gibt ein $k \leq n$,

so daß alle Zahlen A_{ki}/A ($i \leq n$) ganz sind. (5) Mit $a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$ (größter gemeinsamer Teiler) ist $A = \pm \sum_{k=1}^n a_k$, wobei einer der g. g. T. den Wert eins hat.

Weiter können alle rationalen Lösungen von $\sum_{k=1}^n A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = 0$ bei Erfüllung einer der folgenden sechs Bedingungen gefunden werden: (1') Gleichlautend mit der Bedingung (1), nur daß die ε_k nicht alle einander gleich sein dürfen. (2') Die Zahlen $\sum_{k=1}^n A_{kp}$ haben den g. g. T. eins. (3'), (4'), (5') Mit (3), (4), (5) gleichlautend. (6') $A = \pm \prod_{k=1}^n a_k$, wobei die Menge der Teiler a_k in zwei nicht leere Untermengen zerlegt werden kann, derart, daß jede Zahl der einen Untermenge zu jeder Zahl der anderen relativ prim ist. Verf. gibt noch weitere Bedingungen z. B. für die Lösbarkeit von $\sum_{k=1}^{n-1} A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = A_0$ oder null. Erwähnt sei noch der Satz: Hat (1) keine rationalen Lösungen, und haben die ganzzahligen Exponenten α_{ki} der Gleichung $\sum_{k=1}^n A_k \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_{ki}}$ die Eigenschaft, daß für jedes Paar (r, p) mit $r \leq n$, $p \leq n$ die Zahlen $\frac{1}{A} \sum_{k=1}^n \alpha_{kr} A_{kp}$ ganz sind, so hat auch die zweite Gleichung keine Lösung in rationalen Zahlen x_i .

L. Holzer.

Bruijn, N. G. de: Some classes of integer-valued functions. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 363—367 (1955).

Eine ganzwertige Funktion $f(x)$, definiert für $x = 0, 1, 2, \dots$, heißt universal, wenn für alle ganzen $x \geq 0$ und alle natürlichen m $f(x+m) - f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ gilt. Alle Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten sind universal, aber auch z. B. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2$. Verf. bestimmt alle derartigen Funktionen: $f(x)$ ist genau dann universal, wenn mit ganzen Koeffizienten c_k $f(x) = c_0 + s_1 c_1 \binom{x}{1} + s_2 c_2 \binom{x}{2} + s_3 c_3 \binom{x}{3} + \dots$ gilt; hier bezeichnet s_k das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $1, 2, \dots, k$. Die c_k sind durch $f(x)$ eindeutig bestimmt. Verf. beweist auch einen ähnlichen Satz für den Fall, daß die Forderung $x \geq 0$ fallengelassen wird und dehnt diese Untersuchungen auf Funktionen von mehreren Veränderlichen aus.

H.-E. Richert.

Duparc, H. J. A.: On almost primes. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1955—012, 4 p. (1955).

Verf. beweist auf dreierlei Art: Zu jeder natürlichen Zahl $a > 1$ gibt es unendlich viele zusammengesetzte Zahlen m so, daß $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$; $(a-1, m) = 1$ gilt.

H. J. Kanold.

Duparc, H. J. A.: On almost primes of the second order. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1955—013, 13 p. (1955).

Verf. betrachtet die rekurrente Folge zweiter Ordnung $u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots, a, b$ ganz). Sei $D = a^2 + 4b$ und p eine Primzahl, $p \nmid b$. Dann gilt A. $u_{p-\left(\frac{D}{p}\right)} \equiv 0 \pmod{p}$; B. $v_p \equiv a \pmod{p}$; C. $u_p \equiv \left(\frac{D}{p}\right) \pmod{p}$.

Hierbei ist v_n ein Element der „assoziierten rekurrenten Folge“ $v_0 = 2, v_1 = a, v_{n+2} = a v_{n+1} + b v_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Zusammengesetzte Zahlen M , die wenigstens eine der Bedingungen A., B., C. erfüllen, nennt der Verf. „Fastprimzahlen zweiter Ordnung“. Einfache Beispiele zeigen, daß eine zusammengesetzte Zahl, die eine dieser Bedingungen erfüllt, nicht notwendig auch die anderen erfüllt. Daher kann man drei Arten von Fastprimzahlen zweiter Ordnung unterscheiden. Die folgenden Sätze seien erwähnt: Es sei $M = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}$ (p_1, \dots, p_s sind verschiedene Prim-

zahlen), $M_\sigma = M/p_\sigma$, $j_\sigma = M_\sigma - \left(\frac{D}{M_\sigma}\right)$ ($\sigma = 1, \dots, s$). 1. M erfüllt genau dann A., wenn $p_\sigma^{r_\sigma} \mid u_{j_\sigma}$; 2. M erfüllt genau dann B., wenn $v_{M_\sigma} \equiv a \pmod{p_\sigma^{r_\sigma}}$; 3. M erfüllt genau dann C., wenn $p_\sigma \nmid D$, $u_{M_\sigma} \equiv \left(\frac{D}{M_\sigma}\right) \pmod{p_\sigma^{r_\sigma}}$. Weiterhin betrachtet Verf. die spezielle Folge von Fibonacci und zeigt, daß in bezug auf diese Folge unendlich viele Fastprimzahlen zweiter Ordnung von jeder der drei Arten existieren.

H. J. Kanold.

Berg, Lothar: Über eine Differenzengleichung aus der Theorie der Partitionen. *Wiss. Z. Univ. Rostock, math.-naturw. R. 5*, 269—278 (1955).

Einige klassische Partitionsfunktionen genügen der (bekannten) Rekursionsformel $f_\nu(n) = f_{\nu-1}(n) + f_\nu(n-\nu)$ (n, ν beide ganz). In der vorliegenden Arbeit verfolgt Verf. das Ziel, aufbauend auf dieser Rekursionsformel mit möglichst „einfachen“ Hilfsmitteln (d. h. hier ohne Taubersche Sätze) bekannte Formeln wiederzugewinnen bzw. ihnen möglichst nahe zu kommen. Die Durchführung dieser Aufgabe ermöglicht zugleich eine zusammenfassende Darstellung verstreuter Ergebnisse. Hinsichtlich der zahlreichen Einzelresultate muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

H. Ostmann.

Frejman, G. A.: Eine elementare Methode zur Lösung von Aufgaben über die Zerlegung der Zahlen in eine unbeschränkte Anzahl von Summanden. *Trudy Moskovsk. mat. Obsč. 4*, 113—124 (1955) [Russisch].

Suppose f is a positive-valued strictly increasing function defined on $(0, +\infty)$ and having two continuous derivatives there. Suppose further that (I) $f'(x) = O(f(x)x^{-\frac{1}{2}-\epsilon})$ and $f''(x) = O(f(x)x^{-1-\epsilon})$ for large x , where $\epsilon > 0$, (II) $(\log x)f(r)/f(rx)$ tends to zero uniformly in r as $x \rightarrow +\infty$, provided $r \geq 1$. Under these assumptions the author obtains a (necessarily) complicated asymptotic formula for the number $q(N)$ of solutions of the inequality $n_1 f(1) + n_2 f(2) + \dots \leq N$ in non-negative integers n_1, n_2, \dots . The assumptions made are in particular satisfied when $f(x) = x^s$ for some given positive s , and the author applies his result in particular to that case.

P. T. Bateman.

Tatuzawa, Tikao: Additive prime number theory in an algebraic number field. *J. math. Soc. Japan 7*, 409—423 (1955).

Let K be an algebraic number field and I its ring of integers. An element π of I is called a prime if the ideal πI is a prime ideal in I . Let J be the additive group generated by the primes. The author carries over the method of proof used by Schnirelmann in the rational case [cf. E. Landau, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl.* 1930, 255—276 (1930)] and obtains the following results. (1) J is of finite index in the additive group of I . (2) There exists a positive integer c depending upon K such that every element ξ of J is expressible as a sum of at most c primes. (Note that if ξ is totally positive, the primes used are not asserted to be totally positive. Thus (2) as it stands does not include Schnirelmann's result for the rational case.)

P. T. Bateman.

Sierpinski, W.: Les nombres de Mersenne et de Fermat. *Matematyczne 10*, 80—91 (1955).

Survey of results on numbers of the form $2^n - 1$ (Mersenne numbers) and those of the form $2^{2^n} + 1$ (Fermat numbers). Methods and theorems on deciding to primality or non-primality of either kind of numbers are given, for instance the famous theorems of Lucas. Recent results obtained by the use of modern computing machines are given. Further Poulet numbers (these are composite numbers n with $n \mid 2^{n-1} - 1$) are mentioned with some of their properties.

H. J. A. Duparc.

Sierpiński, W.: Primzahlen. (Populärer Vortrag, gehalten in Warschau am 17. März 1953.) *Wiadom. mat. 1*, Nr. 1, 47—64 (1955) [Polnisch].

Eine Zusammenstellung wichtiger neuerer Ergebnisse auf dem Gebiet der Primzahlen. Um eine Vorstellung der tiefgründigen Literaturkenntnis des Verf. zu geben, seien einige angeführt: Die größte bisher bekannte Mersennesche Zahl ist $2^{2281} - 1$; es werden die Fastprimzahlen, d. h. die Zahlen n mit $2^n \equiv 2 \pmod n$ und auch die Carmichaelschen Zahlen, die in Verallgemeinerung der vorhergehenden $a^n - a \equiv 0 \pmod n$ für jedes a mit $(a, n) = 1$ erfüllen, kurz besprochen. Auch ungelöste Probleme werden erwähnt, z. B. die Frage, ob mit p_j als j -ter Primzahl die Folge $a_n = \prod_{j=1}^n p_j + 1$ unendlich viele Primzahlen enthält.

L. Holzer.

Sierpinski, W.: Sur la lacunarité au sens de S. Hartman de la suite de tous les nombres premiers. *Matematika* **10**, 67—70 (1955).

Eine Menge \mathfrak{M} wachsender, positiver ganzer Zahlen erfüllt die Lückenbedingung von Hartman, wenn ein natürliches m existiert, so daß für alle natürlichen l in \mathfrak{M} Sequenzen $m_n, m_{n+1}, \dots, m_{n+l}$ vorhanden sind mit $m_{n+i+1} - m_{n+i} < m$ für $i = 0, 1, 2, \dots, l-1$. Eine Menge, die die erwähnte Lückenbedingung nicht erfüllt, heißt lückenhaft. Verf. zeigt auf einfache Weise, daß die Primzahlmenge lückenhaft ist. Der Beweis wird indirekt geführt und auf folgende Primzahleigenschaft gestützt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\mu(\varepsilon)$, so daß $\pi(n+k) - \pi(n) < k\varepsilon$ für $k > \mu(\varepsilon)$ ist ($\pi(x)$ Anzahlfunktion der Primzahlmenge), $n = 1, 2, \dots$ ($\mu(\varepsilon)$ unabhängig von n).

H. Ostmann.

Ward, Morgan: The laws of apparition and repetition of primes in a cubic recurrence. *Trans. Amer. math. Soc.* **79**, 72—90 (1955).

The author gives a detailed investigation on „the laws of apparition and repetition“ of primes and powers of primes in a cubic recurring sequence. Though not all his results can be formulated here, one important theorem may be mentioned: If the cubic sequence (w) is also a divisibility sequence, i. e. if $w_n | w_m$ whenever $n | m$, and if moreover the characteristic polynomial $f(x)$ of the sequence is irreducible, then the sequence is degenerated (i. e. any of the ratios of the roots of $f(x)$ is a unity) and $w_{n+3} = r w_n$, where r is not a cube.

H. J. A. Duparc.

Golomb, Salomon W.: Sets of primes with intermediate density. *Math. Scand.* **3**, 264—274 (1955).

Ist \mathfrak{P}_1 eine Teilmenge der Primzahlmenge, so heiße die Gesamtheit \mathfrak{G} der ganzzahligen Potenzprodukte von Primzahlen (einschließlich der „1“) aus \mathfrak{P}_1 eine arithmetische Halbgruppe. \mathfrak{G} heiße reguläre Halbgruppe, wenn für quadratfreies $n \in \mathfrak{G}$ stets $(n, \varphi(n)) = 1$ und überdies \mathfrak{G} maximal ist. [Daß umgekehrt aus $(n, \varphi(n)) = 1$ folgt, daß n quadratfrei ist, ist trivial.] Verf. beweist für reguläre Halbgruppen die folgenden zum Teil leicht einsichtigen Eigenschaften: Die erzeugende Primzahlmenge \mathfrak{P}_1 von \mathfrak{G} besteht entweder aus der „2“ allein oder aus unendlich vielen ungeraden Primzahlen. — Es gibt unendlich viele verschiedene reguläre Halbgruppen. — \mathfrak{P}_1 enthält alle Fermatschen Primzahlen $2^{2^k} + 1$. — Für die Anzahlfunktion $\pi_1(x)$ von \mathfrak{P}_1 gilt $\pi_1(x) = o(x/\log x)$ [Verf. nennt allgemein eine unendliche Menge \mathfrak{P}' von Primzahlen, für deren Anzahlfunktion $\pi'(x) = o(x/\log x)$ gilt, eine „Zwischenmenge“ (intermediate set), bzw. sagt: \mathfrak{P}' habe eine „Zwischendichte“ (intermediate density)]. — Bezeichnet \mathfrak{P}^* die Menge der größten Primteiler aller Fermatschen Zahlen, so konvergiert $\sum_{p \in \mathfrak{P}^*} \frac{1}{p}$ und \mathfrak{P}^* ist eine intermediate set. Verf. wirft die Frage auf, ob die Menge aller Primteiler von Fermatschen Zahlen eine intermediate set ist.

H. Ostmann.

Erdős, Paul: Some problems on the distribution of prime numbers. *C. I. M. E., Teoria dei numeri*, 8 p. (1955).

In diesem Vortrag referiert Verf. über einige neuere Resultate über die Verteilung der Primzahlen und er erwähnt viele unbewiesene Vermutungen. Die meisten

beziehen sich auf die Differenz $d_n = p_{n+1} - p_n$, wo p_n die n -te Primzahl ist. Er vermutet z. B.: 1. Es existiert ein c derart, daß $\sum_{k=1}^n d_k^2 < c n (\log n)^2$ [dies wäre eine bestmögliche Abschätzung, weil aus dem Primzahlsatz die Existenz eines c' folgt, derart daß die linke Seite $> c' n (\log n)^2$ ist]; 2. Es hat $d_n/\log n$ eine stetige Verteilungsfunktion; 3. Es hat $d_{n+2} > d_{n+1} > d_n$ unendlich viele Lösungen n . — Verf. beweist: Die Menge der Häufungspunkte von $d_n/\log n$ hat ein positives Maß. Er erwähnt weiter einige ungelöste additive Probleme wie z. B.: Falls $f(n)$ die Anzahl der Lösungen von $n = p + 2^k$ ist, so vermutet er, daß $f(n)/\log n \rightarrow 0$. Schließlich: Ist es wahr, daß zu gegebenen c_1, c_2 und für genügend großes x mehr als $c_1 \log x$ aufeinander folgende Primzahlen $\leq x$ existieren, derart, daß die Differenz von irgend zwei dieser Primzahlen größer als c_2 ist? H. D. Kloosterman.

Erdős, Paul and H. N. Shapiro: The existence of a distribution function for an error term related to the Euler function. Canadian J. Math. 7, 63—75 (1955).

Es sei $\varphi(n)$ die Eulersche zahlentheoretische Funktion (n ganz ≥ 1) und $H(x) = \sum_{n \leq x} \varphi(n)/n - 6x/\pi^2$. Für jedes reelle u sei $N(n, u)$ die Anzahl der positiven ganzen Zahlen $m \leq n$ derart, daß $H(m) \geq u$ ist. Verff. zeigen, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} N(n, u)/n = F(u)$ existiert und die nicht-zunehmende Funktion $F(u)$ stetig ist für jedes u . H. D. Kloosterman.

Popken, J.: On convolutions in number theory. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 10—15 (1955).

Let $f(n)$ and $g(n)$ be two arithmetical functions. We define $\sum_{d|n} f(d) g(n/d)$ to be the convolution of $f(n)$ and $g(n)$ and denote it by $f(n) * g(n)$. By means of the convolution, the author simplifies the detail of the proof of the Selberg identity for prime-number theorem. He develops also a certain calculus for convolutions. L. K. Hua.

Ricci, Giovanni: Sul reticolo dei punti aventi per coordinate i numeri primi. C. I. M. E., Teoria dei numeri, 5 p. (1955).

Es sei (u, v) ein cartesisches Koordinatensystem in der Ebene und \mathcal{G} ein Gebiet in dieser Ebene mit dem Inhalt $I(\mathcal{G})$. Es werden die Punkte $A = (p_i, p_j)$ und speziell $B = (p_i, p_{i+1})$ betrachtet, wobei p_i, p_j Primzahlen sind und p_{i+1} die auf p_i folgende Primzahl ist. Es sei $n(A)$ bzw. $n(B)$ die Anzahl der Punkte A bzw. B in dem Gebiet \mathcal{G} . Gefragt wird nach einem Zusammenhang zwischen $I(\mathcal{G})$ und $n(A)$ bzw. $n(B)$. Durch eine Transformation, die mit dem Primzahlsatz im Zusammenhang steht, wird die (u, v) -Ebene in die (x, y) -Ebene übergeführt. Für den Fall, daß das Gebiet \mathcal{G} ein Parallelogramm ist, dessen Seiten zu den Geraden $y = x, x = 0$ parallel sind, werden einige Sätze ohne Beweis angegeben, die Beziehungen zwischen $I(\mathcal{G})$ und $n(A)$ bzw. $n(B)$ beinhalten. N. Hofreiter.

Rusu, Eugen: Des nombres représentables par la forme $F = a^2 + kb^2, (a, b) = 1$. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 7, 273—286, russ. u. französ. Zusammenfassg. 285—286 (1955) [Rumänisch].

Elementare Betrachtungen über die Darstellbarkeit gewisser natürlicher Zahlen durch die (positiv) definite quadratische Form $x^2 + ky^2$, mit k prim. Die meisten Resultate ergeben sich aber ohne weiteres entweder aus der idealtheoretischen oder aus der formentheoretischen klassischen Lehre der algebraischen quadratischen Zahlen. D. Barbilian.

Springer, T. A.: Quadratic forms over fields with a discrete valuation. I. Equivalence classes of definite forms. II. Norms. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 352—362 (1955), 59, 238—246 (1956).

I. Es sei k ein diskret bewerteter perfekter Körper, p ein Primelement und G die (multiplikative) Gruppe der Werte $|a|$ der Elemente $a \in k$. Wenn G^2 die Gruppe der

Quadrate aus G bezeichnet, so gilt die Zerlegung $G = G^2 + |p| G^2$. Nun sei $f(x)$ eine die Null nicht eigentlich darstellende quadratische Form, aufgefaßt als die metrische Fundamentalform eines Vektorraumes R . Dieser zerfällt in eine direkte Summe $R = R_1 + R_2$, wobei für alle $x_1 \in R_1$ bzw. $x_2 \in R_2$ gilt: $|f(x_1)| \in |p| G^2$, $|f(x_2)| \in G^2$. Wählt man maximale Gitter in R_1 und R_2 , so ergeben die Restklassen von deren metrischen Fundamentalformen modulo p^2 bzw. modulo p zwei quadratische Formen \bar{f}_1, \bar{f}_2 im Restklassenkörper \bar{k} der Bewertung, welche ebenfalls die Null nicht eigentlich darstellen. Umgekehrt kann man zwei solchen Formen \bar{f}_1, \bar{f}_2 in \bar{k} eine Form \bar{f} in \bar{k} zuordnen. Falls die Charakteristik $\neq 2$ ist, ist für die Äquivalenz zweier Formen \bar{f} in \bar{k} die Äquivalenz der zugeordneten Formen \bar{f}_1, \bar{f}_2 in \bar{k} notwendig und hinreichend. Im Falle der Charakteristik 2 herrschen kompliziertere Verhältnisse, die noch unter der Zusatzvoraussetzung studiert werden, daß \bar{k} vollkommen ist. — II. Von der quadratischen Form $f(x)$ wird jetzt nur noch vorausgesetzt, daß sie nicht entartet ist. Eine Norm in R wird durch die drei Postulate $\|x\| > 0$ für $x \neq 0$, $\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ eingeführt. Eine Norm heißt f -Norm, wenn erstens $\|f(x)\| \leq \|x\|$ gilt, und wenn es zweitens keine Norm $\|x\|' \neq \|x\|$ mit $\|f(x)\| \leq \|x\|' \leq \|x\|$ gibt. Alle möglichen f -Normen lassen sich mittels der Darstellung von R als direkte Summe wechselseitig orthogonaler einfacher Teilräume bzw. $f(x) = f_0(x_0) + x_1 x_2 + \dots$ wie folgt angeben: $\|x\| = \max(|f_0(x_0)|^{1/2}, |x_1|, |p|^{1/2} |x_2|, \dots)$. Der Beweis benutzt die vom Ref. studierten maximalen Gitter [M. Eichler, Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, § 9 (Berlin, 1952)]. Das Resultat kann als die sinngemäße Übertragung der von Hermite herrührenden Zuordnung einer definiten quadratischen Form zu einer indefiniten angesehen werden.

M. Eichler.

Springer, T. A.: Some properties of cubic forms over fields with a discrete valuation. Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A 58, 512—516 (1955).

k habe dieselben Eigenschaften wie in den vorstehenden Referaten. Verf. überträgt einige der dort referierten Resultate auf kubische Formen $f(x)$, welche die Null nicht eigentlich darstellen. Z. B. ist $\|x\| = |f(x)|^{1/3}$ eine Norm im Sinne des vorhergehenden Referats. Wenn der Restklassenkörper \bar{k} die Eigenschaft hat, daß jede kubische Form in \bar{k} in mehr als n Variablen die Null eigentlich darstellt, so hat k dieselbe Eigenschaft mit $3n$ an Stelle von n . Dasselbe wurde auf anderem Wege von V. B. Demjanov bewiesen, falls die Charakteristik $\neq 3$ ist (dies. Zbl. 37, 310).

M. Eichler.

Redheffer, R. M.: Approximation by enumerable sets. Amer. math. Monthly 62, 573—576 (1955).

Eine Menge E reeller Zahlen wird durch eine abzählbare Menge reeller Zahlen $\{r_n; n = 1, 2, \dots\}$ innerhalb der Folge positiver reeller Zahlen $\{d_n; d_n > 0, n = 1, 2, \dots\}$ approximiert, wenn die Ungleichung $|x - r_n| < d_n$ ($x \in E$) für unendlich viele Indizes erfüllt wird. Verf. zeigt u. a.: läßt sich E durch $\{r_n\}$ innerhalb $\{d_n\}$ approximieren, so hat E dann und nur dann das Maß Null, wenn $\sum d_n < \infty$. Wird aber $\{d_n\}$ mit $\sum d_n < \infty$ vorgegeben, so gibt es eine Nullmenge E , die sich durch kein $\{r_n\}$ innerhalb $\{d_n\}$ approximieren läßt. Ferner: Zu $\{d_n\}$ mit $\sum d_n = \infty$ läßt sich eine (nur von der Folge abhängige) abzählbare Menge $\{r_n\}$ so angeben, daß jede Menge E durch $\{r_n\}$ innerhalb $\{d_n\}$ approximiert werden kann. Alle vom Verf. verwendeten Schlüsse sind kurz und elementar.

H. Hadwiger.

Sudan, Gabriel: Interprétation géométrique d'une certaine équation en nombres entiers. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. Bucureşti, Ser. Şti. Natur. 4, Nr. 6/7, 23—29, russ. u. französ. Zusammenfassg. 29—30 (1955) [Rumänisch].

Veranschaulichung des arithmetischen Beweises eines Satzes von Zeitz [vgl. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 38, 73 (1929), 42, 110—111 (1933)] unter Benutzung

der ersten affinen geometrischen Eigenschaften über Gitterpunkte. Bei Heranziehung des Kleinschen Streckenzuges ergeben sich gewisse Auskünfte über die Entwicklung des Lösungsquotienten in einen Kettenbruch. D. Barbilian.

Analysis.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

● **Lebesgue, Henri:** *La mesure des grandeurs.* (Monographies de l'Enseignement mathématique. No. 1.) Genève: Institut de Mathématique, Université 1955. 184 p. 20 fr. suisses; \$ 5,—.

Diese Monographie ist eine Zusammenfassung von Aufsätzen, welche in den Jahren 1932—1935 unter dem gleichen Titel in *L'Enseignement mathématique* erschienen; die Überschriften der Kapitel lauten: I. Comparaison des collections. Nombres entiers. II. Longueurs. Nombres. III. Aires planes. IV. Volumes. V. Longueurs des courbes. Aires des surfaces gauches. VI. Grandeurs mesurables. VII. Intégration et dérivation. VIII. Conclusions. Von den teilweise revolutionären Auffassungen des Autors nennen wir: 1° die Mathematik ist eine empirische Wissenschaft; 2° „unmittelbar“ nach den natürlichen Zahlen folge (in Grund- und Mittelschule) die Einführung der reellen Zahlen, und zwar im Zusammenhang mit dem Längenbegriff und unter Zugrundelegung der Dezimalbruchentwicklung; 3° jeder Begriff soll, in engem Anschluß an die Erfahrung (siehe insbesondere Kap. V), auf jeder Altersstufe nach den gleichen Prinzipien eingeführt werden; je nach dem Alter sei die Behandlung mehr mitteilend oder mehr logisch-legitimierend. Da das Ziel in erster Linie pädagogisch ist, bleibt der Maßbegriff auf den Jordanschen (die Mengen auf die „domaines quarrables“) beschränkt, während Mengen- und Punktfunktionen Stetigkeitsbedingungen unterworfen sind. Statt seine Auffassungen dem Leser apodiktisch vorzuführen, hegt der Autor vielmehr die Hoffnung, durch seine Auseinandersetzungen den Leser, insbesondere den angehenden Lehrer, zu eigenem Nachdenken zu bringen. J. Ridder.

Finetti, Bruno de: *La struttura delle distribuzioni in un insieme astratto qualsiasi.* Giorn. Ist. Ital. Attuari 18, 15—28 (1955).

Unter einer Distribution oder Masse versteht der Verf. hier eine endlich additive auf dem System aller Teilmengen einer Menge C definierte reelle endliche und nicht negative Funktion. Er nennt eine Masse konzentriert, wenn sie die Summe endlich oder abzählbar vieler Punktmassen ist, agglutiniert, wenn sie die Summe endlich oder abzählbar vieler zweiwertiger Massen bildet, die keine Punktmassen sind, und stetig, wenn sich jede Teilmenge von C in endlich viele Mengen beliebig kleiner Masse zerlegen läßt. Jede Masse läßt sich eindeutig als Summe einer konzentrierten, einer agglutinierten und einer stetigen Masse darstellen. Bei gegebener stetiger Masse m und beliebigem positivem ε kann jede stetige Masse geschrieben werden als Summe dreier Massen γ_1 , γ_2 und γ_3 und einer absolut unterhalb von ε gelegenen Funktion, wobei γ_1 auf einer Menge von einer m -Masse Null und γ_2 auf Mengen von beliebig kleiner m -Masse „kondensiert“ ist, während γ_3 eine hinsichtlich m „diffuse“ Masse darstellt, die das m -Integral einer Dichte bildet. Anmerkung des Ref.: Es kann zwar jede auf einer Booleschen Mengenalgebra in C definierte endlich additive Funktion zu einer Masse fortgesetzt werden, doch scheinen die Beispiele auf den Seiten 20 und 21, in denen nicht unbeschränkt definierte additive Funktionen auftreten, ihren Zweck nicht ohne weiteres zu erfüllen. K. Krickeberg.

Caffiero, Federico: *Sulla teoria della misura in un insieme astratto.* Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 40, 269—283 (1955).

S : ensemble abstrait. \mathcal{O} : sous-ensemble vide de S . \mathcal{C} : famille de sous-ensembles de S , contenant S , close relativement à l'union finie et l'intersection dénombrable, et telle que pour tout ensemble H de \mathcal{C} existent deux suites d'ensembles H_k, H'_k

($k = 1, 2, \dots$) de \mathfrak{C} telles que $\lim H_k = H$ et $H_k \supset S - H'_k \supset H_{k+1}$. \mathfrak{A} : famille des ensembles $A = S - C$ où $C \in \mathfrak{C}$. Fonction additive sur \mathfrak{C} : fonction numérique φ de signe quelconque, finie, définie sur \mathfrak{C} et telle que $\varphi(\emptyset) = 0$, $\varphi(H_1 \cup H_2) = \varphi(H_1) + \varphi(H_2) - \varphi(H_1 \cap H_2)$ pour tout couple H_1, H_2 d'ensembles de \mathfrak{C} , $\lim \varphi(H_k) = \varphi(\lim H_k)$ pour toute suite H_k décroissante d'ensembles de \mathfrak{C} . Théorème. — Toute fonction φ additive sur \mathfrak{C} peut être prolongée d'une manière et d'une seule en une fonction finie, complètement additive, définie sur l'extension borélienne \mathfrak{B} de \mathfrak{C} . Etapes de la démonstration. φ est définie sur \mathfrak{A} par $\varphi(A) = \varphi(S) - \varphi(S - A)$. Il est montré que φ est bornée sur la famille des ensembles de \mathfrak{C} inclus dans un ensemble quelconque de \mathfrak{A} , d'où il résulte que φ est bornée sur \mathfrak{C} . La variation supérieure $W_1(H)$ et la variation inférieure $W_2(H)$ de φ sur $H \in \mathfrak{C}$ sont définies comme borne supérieure et borne inférieure de $\varphi(C)$ pour $C \subset H$ et $C \in \mathfrak{C}$ respectivement. Il est montré que $\varphi = W_1 - W_2$ et que W_1 et W_2 sont des fonctions additives sur \mathfrak{C} non négatives. D'après un théorème précédent de l'A. (ce Zbl. 50, 278), W_1 et W_2 peuvent être prolongées sur \mathfrak{B} en fonctions complètement additives dont la différence est le prolongement annoncé.

Chr. Pauc.

Fuglede, Bent: On a theorem of F. Riesz. Math. Scand. 3, 283—302 (1955).

Soient: 1. X un ensemble abstrait; 2. μ une mesure définie sur un σ -corps \mathfrak{M} de parties de X , tel que $X \in \mathfrak{M}$; 3. \mathfrak{A} une partie de \mathfrak{M} , telle que les réunions finies d'ensembles de \mathfrak{A} forment un corps qui engendre \mathfrak{M} et que $0 < \mu(A) < \infty$ pour $A \in \mathfrak{A}$. L'A. démontre le théorème suivant: La fonction φ additive d'ensemble admet une représentation intégrale $\varphi(A) = \int_A f(x) \mu(dX)$ avec $f \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$

pour $A \in \mathfrak{A}$, si et seulement si $\sum_{v=1}^n \frac{|\varphi(A_v)|^p}{\mu(A_v)^{p-1}} \leq c$ pour tout système d'ensembles disjoints $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$. Ce théorème a été démontré aussi par R. Fullerton (ce Zbl. 56, 339) dans le cas où $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}$. Pour $p = \infty$, la condition se réduit à $|\varphi(A)| \leq c \mu(A)$. Dans le cas $p = 1$ on a des conditions tout à fait différentes: $\sum_{v=1}^n \varphi(A_v) \leq c$ et la continuité absolue de φ . L'A. montre comment

on peut étendre ses résultats aux fonctions φ à valeurs dans un espace de dimension finie et aux fonctions f satisfaisant une condition de la forme $\int F(f(x)) \mu(dX) < \infty$, où F est une fonction convexe et $F(t) \rightarrow \infty$ pour $|t| \rightarrow \infty$.

G. Marinescu.

Daboni, Luciano: Estensione del teorema di Riemann-Dini, sulle serie, alle funzioni non sommabili nella teoria astratta della integrazione. Rivista Mat. Univ. Parma 6, 293—300 (1955).

In questo lavoro l'A. consegue un'estensione del noto teorema di Riemann-Dini sulle serie, secondo il quale una serie a termini reali tale che la serie dei suoi termini positivi e quella dei suoi termini negativi siano divergenti e tale inoltre che il suo termine generale sia infinitesimo, può essere ordinata in modo da riuscire convergente ad un qualunque prefissato numero reale. L'estensione di questo teorema, ottenuta dall'Autore, è nell'ambito della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue-Stieltjes nella quale, com'è noto, resta inclusa quella delle serie. L'A. ricorre, per questo, alla teoria astratta della misura e dell'integrazione qual'è stata esposta da G. Fichera. Sia $f(x)$ una funzione reale definita in un insieme L , misurabile rispetto ad una misura μ ; tale funzione sia misurabile rispetto a μ in L e sia ivi non sommabile rispetto a μ . Indicato con L_1 l'insieme dei punti di L in cui $f \geq 0$, L_2 quello in cui $f < 0$, \mathfrak{L}^+ ed \mathfrak{L}^- due insiemi relativi alla decomposizione di Hahn di L e posto $L^+ = L_1 \mathfrak{L}^+ + L_2 \mathfrak{L}^-$ e $L^- = L_1 \mathfrak{L}^- + L_2 \mathfrak{L}^+$, l'A. suppone che la funzione f non sia sommabile nè in L^+ nè in L^- . Egli inoltre suppone che, in corrispondenza ad ogni numero positivo ε , sia possibile determinare un insieme misurabile K_ε avente misura μ finita, contenuto in L e tale che, comunque si consideri un insieme

K di misura finita tale che $K_e \subset K \subset L$, l'insieme $K - K_e$ riesca decomponibile in un numero finito di insiemi misurabili per ciascuno, H , dei quali l'integrale $\int_H |f(x)| dv_\mu$ sia minore di ε , ove con v_μ si è indicata la variazione totale di μ . In tali ipotesi l'A. dimostra che, fissato comunque un numero reale a , è possibile costruire una successione $\{K_n\}$ di insiemi misurabili contenuti in L tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} f(x) d\mu = a$. L. de Vito.

Morse, Marston and William Transue: *C-bimeasures Λ and their superior integrals Λ^** . Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 4, 270—300 (1955).

Sind E' und E'' lokal kompakte Räume und K'_c und K''_c die Räume der komplexwertigen stetigen Funktionen auf E' und E'' mit kompaktem Träger, so verstehen die Verf. unter einem C -Bimaß Λ über $E' \times E''$ ein komplexwertiges Funktional auf $K'_c \times K''_c$ mit der Eigenschaft, daß $\Lambda(u, v)$ bei festem u ein Radonsches Maß über E'' und bei festem v ein Radonsches Maß über E' darstellt (dies. Zbl. 65, 344). Sie nennen nun Λ beschränkt, wenn die Norm

$$\|\Lambda\| = \sup \{ |\Lambda(u, v)| \mid U(u)^{-1} U(v)^{-1}; u \in K'_c, v \in K''_c \} \text{ mit } U(w) = \max |w|$$

endlich ist, und sie beweisen, daß dies sicher dann zutrifft, wenn E' und E'' kompakt sind. Sodann wird das obere Integral Λ^* von Λ im Bereich I'_+ und I''_+ der positiven unterhalb stetigen Funktionen p und q über E' und E'' durch

$$\Lambda^*(p, q) = \sup \{ \Lambda(u, v) \mid |u| \leq p, |v| \leq q, u \in K'_c, v \in K''_c \}$$

und für beliebige positive Funktionen h und k durch $\Lambda^*(h, k) = \inf \{ \Lambda^*(p, q) \mid p \geq h, q \geq k, p \in I'_+, q \in I''_+ \}$ definiert. Λ^* ist in jedem Argument konvex, jedoch, wie ein Beispiel zeigt, selbst im Bereich K'_+ und K''_+ der positiven stetigen Funktionen auf E' und E'' mit kompaktem Träger nicht additiv (linear). Ein Grenzwertsatz, neben dem sich andere finden, lautet: Filtriert eine Teilmenge G' von I'_+ hinsichtlich \leq nach rechts mit $p = \sup \{ p_1 \mid p_1 \in G' \}$ und ist $q \in I''_+$ und $\Lambda^*(p, q) < +\infty$, so gilt $\lim_{p_1 \in G'} \Lambda^*(p - p_1, q) = 0$. — Eine entsprechende Theorie bezieht sich auf den

reellen Fall. Die Verf. geben ein Beispiel eines beschränkten reellen Bimaßes, das nicht als Differenz zweier positiver Bimaße geschrieben werden kann. Das obere Integral eines positiven Bimaßes Λ_R fällt in $K'_+ \times K''_+$ mit Λ_R zusammen und ist über $I'_+ \times I''_+$ additiv. — Die Verf. haben inzwischen [Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 89—95 (1956)] bewiesen, daß sich im Fall von zwei Intervallen E' und E'' der Zahlengeraden jedes C -Bimaß Γ in der Form

$$\Gamma(u, v) = \int_{E'} u(s) d_s \int_{E''} v(t) d_t k(s, t)$$

mit einer „regulären“ Verteilungsfunktion k darstellen läßt, wobei $\|\Gamma\|$ gleich der Fréchet'schen Variation $P_c(k, E' \times E'')$ von k über $E' \times E''$ ist. Hier wird nun gezeigt, daß $P_c(k, X' \times X'')$ bei beliebigen in E' und E'' offenen Intervallen X' und X'' gleich dem oberen Integral $I^*(\varphi_{X'}, \varphi_{X''})$ ist, worin φ_X die charakteristische Funktion von X bedeute. Aus dem oben genannten Grenzwertsatz ergibt sich damit $\lim P_c(k, X^a \times E'') = 0$ für $a \rightarrow 0+$, wenn $X^a =]0, a[$. K. Krickeberg.

Kestelman, H.: *Riemann equivalence of functions*. Mathematika 2, 97—104 (1955).

$f(x)$, $g(x)$ seien in $-\infty < x < \infty$ definierte endliche reelle Funktionen. Es sei $f \sim g$, wenn $|f - g|$ in jedem endlichen Intervall verschwindendes Riemann-Integral besitzt. Bekannt ist: Aus $f(x + h) \sim f(x)$ für jedes reelle h folgt $f \sim c$ (c konstant). (Erdős, dies. Zbl. 47, 62. Dort finden sich auch weitere Literaturangaben.) Sei $P(f)$ die Menge aller reellen h , für die $f(x + h) \sim f(x)$. $P(f)$ ist, wie man sofort sieht, eine (additive) Gruppe und falls $P(f)$ diskret ist, gilt $f \sim \varphi$, wobei φ periodisch mit der Periodengruppe $P(f)$ ist. Dieselbe Aussage wird aber unter Heranziehung der Beweismethode von Erdős auch erhalten für $\bar{M}(P(f)) > 0$ (\bar{M} = Äußeres,

\underline{M} = Inneres Lebesguesches Maß) oder wenn $P(f)$ von zweiter Kategorie ist. Ist nicht $f \sim c$, dann folgt übrigens aus einem bekannten Satz von Steinhaus [Fundamenta Math. 1, 93—104 (1920)], daß stets $\underline{M}(P(f)) = 0$. Andererseits existieren Funktionen f , so daß für kein φ , dessen Periodengruppe $P(f)$ enthält, $f \sim \varphi$ gilt. Weiter zeigt sich, daß sich die „interessanten“ Aussagen auf nichtmeßbare Funktionen f beziehen, denn es gilt: Wenn f in $(-\infty, +\infty)$ meßbar ist, und $P(f)$ nicht diskret ist, dann ist f fast überall konstant.

L. Schmetterer.

Plessis, Nicolaas du: Some theorems about the Riesz fractional integral. Trans. Amer. math. Soc. 80, 124—134 (1955).

Etude des potentiels de M. Riesz dans R^m , $f_\alpha(x) = \int |x - y|^{\alpha-m} f(y) dy$ ($0 < \alpha < m$) lorsque f est dans $L^q(R^m)$ ($q \geq 1$); après quelques résultats sur le comportement lipschitzien de f , on démontre: (1) Si $f \in L^q$ et $0 < \alpha < m/q$, alors $f_\alpha \in L^r$, avec $1/r = 1/q - \alpha/m$. (2) Si $f \in L^q$, alors: (a) pour $2 < q < \infty$, $f_{\alpha/q}(x)$ est finie sauf sur un ensemble de β -capacité nulle pour tout $\beta > m - \alpha$; (b) pour $1 \leq q \leq 2$, $f_{\alpha/q}(x)$ est finie sauf sur un ensemble de $(m - \alpha)$ -capacité nulle. Le théorème 2 étend aux potentiels de Riesz un résultat établi antérieurement pour les intégrales de Riemann-Liouville (N. du Plessis, ce Zbl. 48, 38). [Note du Rap.: Le résultat (1) est connu sous le nom de théorème de Soboleff, ce Zbl. 22, 148.]

J. Deny.

Plessis, Nicolaas du: Spherical fractional integrals. Trans. Amer. math. Soc. 84, 262—272 (1957).

Soit f une fonction sommable sur la sphère-unité S de R^m , et soit $f(\varrho, P)$ l'intégrale de Poisson définie par $f(P \in S, 0 < \varrho < 1)$. Lorsque ϱ tend vers 1, la fonction

$f_\alpha(\varrho, P) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\varrho (\varrho - r)^{\alpha-1} f(r, P) dr$ ($0 < \alpha < m$) admet presque partout sur

S une limite radiale $f_\alpha(P)$. La fonction f_α est appelée intégrale sphérique fractionnaire (d'ordre α) de f . L'A. démontre, pour ces intégrales sphériques, des propriétés de régularité et de sommabilité toutes semblables à celles qu'il avait établies pour les potentiels de M. Riesz dans une note récente (voir le rapport précédent).

J. Deny.

Besicovitch, A. S.: On limits of the area of a polygon inscribed in a simple closed curve. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 6, 135—142 (1955).

C sei eine ebene einfach geschlossene Kurve, die das Gebiet G positiv orientiert umschließt. Es sei $\lambda > 0$ und $P(\lambda)$ bezeichne ein der Kurve C einbeschriebenes geschlossenes Polygon, dessen Seitenlängen alle kleiner als λ sind; $|P(\lambda)|$ bedeute den von $P(\lambda)$ umschlossenen orientierten Flächeninhalt, der durch das längs der Polygonlinie erstreckte Integral $\frac{1}{2} \int (x dy - y dx)$ gegeben ist. Es sei ferner A die Menge der reellen Zahlen α , die sich als Grenzwert $\alpha = \lim_{\lambda \rightarrow 0} |P(\lambda)|$ gewinnen lassen. Verf.

konstruiert ein Beispiel, für welches A mit dem Intervall $-\infty < \alpha < \infty$ übereinstimmt. Verlangt man aber zusätzlich, daß die einbeschriebenen Polygone auch einfach geschlossen sind, so wird mit dem Hauptergebnis des Verf. ausgesagt, daß A stets mit dem Intervall $|G| \leq \alpha \leq |G \cup C|$ identisch ist, wo die Vertikalstriche das ebene Lebesguesche Maß anzeigen. Falls also $|C| = 0$ ist, besteht A aus dem einzigen Wert $\alpha = |G|$.

H. Hadwiger.

● **Centro Internazionale Matematico Estivo (C. I. M. E.): Quadratura delle superficie e questioni connesse.** (2° Ciclo, Varenna, Villa Monastero, 16—25 agosto 1954.) Roma: Istituto Matematico dell'Università 1955. 3 nr.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

Cesari, Lamberto: Appunti sulla teoria delle superficie continue. C. I. M. E., Quadratura delle superficie e questioni connesse, 86 + 3 p. (1955).

The paper under review is an expository treatise on the main theorems of surface area theory and should constitute for the beginner in the field a useful companion

paper to the author's very comprehensive book: *Surface Area*, Princeton (1956) (hereafter referred to as SA). The paper is very lucidly written and the author takes great pain in developing and presenting the theory in its natural setting, motivating abstract notions and new concepts. The paper will certainly be greeted by all those who wish to acquaint themselves with the main aspects of surface area theory and who do not intend to penetrate into the more delicate and sometimes complex details. The treatise begins with a discussion of the analytic properties of surface area theory, i. e., those properties that are independent of a „differential“ element. After the preliminary definitions of equivalence of two mappings (Lebesgue, Fréchet, and Kerékjarto equivalence), the Lebesgue area $L(T, A)$ of a parametric surface $S = (T, A)$ is defined, where (T, A) is a continuous mapping from an admissible set $A \subset E_2$ into E_3 . The topological index $o(p; C)$ of a point p with respect to a curve C (in E_2) is defined, and after the reader has been introduced to some of the properties of $o(p; C)$, the author proceeds to define the Geöcze area $V(T, A)$ of (T, A) , a very useful tool in studying $L(T, A)$, and a multiplicity function $N(p; T, A)$ for a plane mapping (T, A) . A discussion of the theory of arc length of a continuous curve precedes the statement of the first theorem, the author's celebrated inequality $V(T_r, A) \leq L(T, A) \leq V(T_1, A) + V(T_2, A) + V(T_3, A)$, $r = 1, 2, 3$, involving the Lebesgue area and the plane areas of the projections (T_r, A) of (T, A) on the coordinate planes E_2^r , $r = 1, 2, 3$. The proof is omitted and can be found in SA. The next paragraph is devoted to nonparametric surfaces (Tonelli's theory) and to some extensions of this theory to discontinuous nonparametric surfaces. Various other areas are introduced, as the Peano area $P(T, A)$ and a variant of the Geöcze area, $U(T, A)$. The deep equality, first proved in all its generality by the author, is stated: $L(T, A) = V(T, A) = P(T, A)$. In case $L(T, A) < \infty$, also $L = V = U = P$. The author proceeds then to an interpretation of Lebesgue area as a measure. Let (T, A) be a continuous mapping from a compact A into E_3 and let $\Gamma = \Gamma(T, A)$ be the collection of the continua of constancy for (T, A) . Let \mathfrak{M}_0 be the collection of all sets $M \subset A$ which are sums of $g \in \Gamma$ and denote by \mathfrak{G}_0 the subclass of \mathfrak{M}_0 consisting of all sets in \mathfrak{M}_0 open in A . For $M \in \mathfrak{M}_0$, a set function on \mathfrak{M}_0 is defined by $\varphi(M) = \inf [V(T, G), G \supset M, G \in \mathfrak{G}_0]$. The set function φ is a measure on a σ -algebra which includes all Borel sets in \mathfrak{M}_0 . A more detailed discussion of the „middle space“ space $\Gamma(T, A)$ follows and the section concludes with the statement of a cyclic additivity theorem of the Lebesgue area. Let $S = (T, A)$ be a continuous surface, where A is now a simple closed Jordan region. For a Lipschitz mapping f with constant K from E_3 into the real line, the author considers the sets M_t (contour of the surface), D_t^- , D_t^+ in A consisting of the points for which respectively $f T = t$, $< t$, $> t$. If $F(D_t^-)$ is the frontier of D_t^- relative to A , the author introduces (using prime ends) a generalized length $l(t)$ of the image of $F(D_t^-)$ under T . If $l(t) < \infty$, it is a countable sum of Jordan lengths of ordinary continuous curves. The section concludes with the statement of the Cavalieri inequality $K L(T, A) \geq \int_{-\infty}^{\infty} l(t) dt$. The second part of the paper consists of a survey of the geometric properties of a surface, i. e., properties that involve a „differential“ element. For (T, A) a plane mapping, the author introduces a generalized Jacobian $J(w)$ of (T, A) defined a. e. on A^0 [if $V(T, A) < \infty$]. Let now (T, A) be any continuous mapping from A into E_3 with $V(T, A) < \infty$ and let T_r , $r = 1, 2, 3$, be the three projections of (T, A) on the coordinate planes. If J_r is the generalized Jacobian of T_r , the second theorem (proved independently by T. Radó and the author) asserts that $L(T, A) \geq \int (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)^{\frac{1}{2}} dw$, with „ $=$ “ if and only if (T, A) is AC. The author proceeds then with a discussion of tangential properties of a surface. Formulas for the change of variable of double integrals are also included. In the third part of the paper the author discusses the problem

of representation of a surface (T, A) . If $L(T, A) < \infty$, does there exist a representation (T', A) , conformal in a suitable generalized sense, such that $L(T, A) = L(T', A)$ is given by the classical area integral? C. B. Morrey's well-known representation theorem for open nondegenerate surfaces precedes the statement of the third theorem giving an affirmative answer to the above question. This deep theorem was first proved by the author, and for the proof the reader is referred to SA. A very welcome feature in the treatise is the inclusion of several examples of surfaces for which the author constructs suitable representations. The fourth part of the paper is devoted to the author's surface integral $I(S)$. $I(S)$ is a Weierstrass type integral and several definitions of $I(S)$ are given. Some important theorems of $I(S)$ are included without proof. The Gauss-Green theorem as well as Stokes theorem, both due to J. Cecconi, are stated. The author proceeds then to present conditions under which $I(S)$ is lower semi-continuous. A discussion of some of V. E. Bononcini's theorems concerning „linear“ integrals follow, and the isoperimetric inequality between the volume $V(S)$ and the area $L(S)$ of a closed continuous surface is presented. A brief reference is made of an application to the calculus of variations. A very welcome feature and one which will be greeted by all those who will read this paper, is a final section of some carefully drawn pictures of surfaces. A sufficiently comprehensive bibliography concludes the paper.

C. J. Neugebauer.

Federer, Herbert: An addition theorem for Lebesgue area. Proc. Amer. math. Soc. 6, 911—914 (1955).

Let X be the space of a finite 2-dimensional cell complex K , i. e., K is a finite set of compact topological cells of dimensions ≤ 2 with disjoint interiors and union X and suppose that the boundary of each element of K is the union of certain lower dimensional elements of K . Let f be a continuous map of X into E_n , $n \geq 2$. If L_1, L_2 denote as usual the one and two dimensional Lebesgue areas, then the following theorem is proved: If $L_1(f|B) < +\infty$ for each 1-cell B in K , then $L_2(f) = \sum L_2(f|A)$ where the summation extends over all 2-cells A in K .

L. Cesari.

Pauc, Christian: Dérivés et intégrants. Fonctions de cellule. C. I. M. E., Quadratura delle superficie e questioni connesse, 76 + 4 p. (1955).

Soient: R un ensemble abstrait, \mathfrak{B} une σ -algèbre de sous-ensembles de R , $R \in \mathfrak{B}$, μ une mesure sur \mathfrak{B} , \mathfrak{F} une famille non vide d'ensembles de \mathfrak{B} , appelés cellules. On suppose que $I \in \mathfrak{F}$ implique $0 < \mu(I) < +\infty$. Une décomposition dénombrable $E = \bigcup_n I_n$ de l'ensemble E en cellules I_n telles que $\mu(I_n \cap I_m) = 0$ pour $n \neq m$ s'appelle partition cellulaire si toute cellule ne rencontre qu'un nombre fini de I_n . On dit qu'une partition cellulaire \mathfrak{P}' de E est plus fine qu'une partition cellulaire \mathfrak{P}'' de E si toute cellule de \mathfrak{P}' est comprise dans une seule cellule de \mathfrak{P}'' et on admet que la famille des partitions cellulaires de R est un système dirigé d'après l'ordre de finesse. En substituant les cellules aux intervalles, on définit, en suivant le modèle des fonctions d'intervalles, les fonctions de cellules additives, sous-additives et sur-additives, absolument continues, singulières, les intégrales supérieure et inférieure de Burkill (la convergence des sommes approchées étant entendue d'après le système dirigé des partitions cellulaires) et la variation totale d'une fonction de cellule, puis on étend à ces fonctions les théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions d'intervalle, en particulier celui sur la représentation en forme d'intégrales de Lebesgue des intégrales extrêmes de Burkill d'une fonction d'intervalle absolument continue et celui sur la décomposition de Lebesgue d'une fonction d'intervalle additive et de variation finie. Pour arriver à la notion de dérivé d'une fonction de cellule ψ , on fait correspondre à toute partition cellulaire \mathfrak{P} , disons $R = \bigcup_n I_n$, de R une fonction $D(\psi, \mathfrak{P})(x) = \psi(I_n)/\mu(I_n)$ pour $x \in I_n$. $D(\psi, \mathfrak{P})$ étant univoquement déterminée à un ensemble de mesure nulle près, le L^p -dérivé de ψ est la limite, quand elle existe, de $D(\psi, \mathfrak{P})$, prise dans la métrique de l'espace fonc-

tionnel L^p ($p \geq 1$), d'après le système dirigé des partitions cellulaires. Pour la μ -intégrale indéfinie d'une fonction $f \in L^p$ ce processus de dérivation nous ramène à la fonction f . ψ étant une fonction de cellule absolument continue, ses intégrales extrêmes de Burkill coïncident sur toute cellule si et seulement si elle est L^1 -dérivable: s'il en est ainsi, l'intégrale de Burkill est la μ -intégrale de ce dérivé. On examine ensuite le cas où la finesse des partitions cellulaires est caractérisée par une norme. — Pour les démonstrations, le lecteur est renvoyé au livre Otto Haupt-G. Aumann-Chr. Pauc: Differential- und Integralrechnung, IIIe volume (ce Zbl. 64, 48), où une théorie analogue est développée sous des hypothèses plus restrictives. En revanche, l'A. donne toute une foule de commentaires qui touchent les rapports de son exposé à d'autres théories plus ou moins proches et d'applications en géométrie différentielle, en analyse vectorielle, en calcul des variations, etc. *A. Császár.*

Corominas Vigneaux, Ernesto: Über die Charakterisierung der als Grenzwerte von Differenzenquotienten definierten Ableitungen. *Revista Acad. Ci. Madrid* 49, 115—212 (1955) [Spanisch].

L'A. riprendre e generalizza alcuni risultati di Stieltjes e di Hopf i quali indicavano la validità dell'uguaglianza $\lim_{x_j \rightarrow x_\omega} \Delta^n[x_j, x_\omega; f(x)] = (1/n!) f^{(n)}(x_\omega)$ in cui $\Delta^n[x_j, x_\omega; f(x)]$ indica la differenza d'ordine n della $f(x)$ relativa agli $n+1$ punti x_j, x_ω . Precisamente, l'A. si pone e discute ampiamente il problema della caratterizzazione dei coefficienti differenziali (v. Denjoy, questo Zbl. 12, 346) di una funzione $f(x)$, ispirandosi, fra l'altro, ad alcuni metodi topologici di Denjoy. Non è possibile riportare qui, sia pur brevemente, gli interessanti risultati che l'A. stabilisce. Ci limitiamo a rilevare che i ragionamenti si fondano, soprattutto, su una generalizzazione dello stesso A. del criterio di Stolz sulle serie e sulle successioni [Stolz, *Math. Ann.* 33, 237—245 (1888/9); Jensen, *Tidskr. for Mat.*, V. Ser. 2 (1884)]. *L. Giuliano.*

Popović, V.: Sur un théorème de N. Obrechhoff. *Srpska Akad. Nauka, Zbornik Radova* 43, mat. Inst. 4, 57—60, français. Zusammenfassg. 61 (1955) [Serbo-kroatisch].

En s'appuyant sur le théorème de L'Hospital-Stolz, l'A. démontre ceci: Soit $f(x)$ une fonction réelle définie dans R (= l'ensemble des nombres réels) et telle que pour un entier $n > 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(n-1)}(x) = \delta_1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{(n-1)}(x) = \delta_2$, alors $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x^{n-1} = \delta_1/(n-1)!$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)/x^{n-1} = \delta_2/(n-1)!$ ($\delta_1, \delta_2 \in R$ ou $\pm \infty$). A partir de cela, l'A. démontre ce théorème d'Obrechhoff (v. ce Zbl. 43, 282): si $f^{(n)}(x) \geq 0$ dans R et si pour certaine suite $y_{-k} \rightarrow -\infty$, $y_k \rightarrow \infty$ et un entier $m < l$ on a $\lim_{n \rightarrow \pm \infty} f(y_n)/y_n^m = 0$, alors f est un polynôme de degré $\leq m-1$. *G. Kurepa.*

Matorin, A. P.: Über Ungleichungen zwischen den größten Werten der absoluten Beträge von Funktionen und ihren Ableitungen auf einer Halbgeraden. *Ukrain. mat. Žurn.* 7, 262—266 (1955) [Russisch].

Soit f une fonction réelle définie et n fois dérivable sur la demi-droite I . Soit $k < n$. Posons $M_0(f) = \sup_{x \in I} |f(x)|$, $M_k(f) = \sup_{x \in I} |f^{(k)}(x)|$, $M_n(f) = \sup_{x \in I} |f^{(n)}(x)|$. En améliorant un résultat de A. Gorny (ce Zbl. 22, 154), l'auteur établit la relation (1) $M_k(f) \leq P_{nk} M_0^{(n-k)/n}(f) M_n^{k/n}(f)$, où

$$P_{nk} = \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2) \dots [n^2-(k-1)^2] [(2n-1)!!]^{k/n}}{\{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2) \dots [n^2-(n-1)^2]\}^{k/n} (2k-1)!!}$$

Pour $n=2$, la relation (1) coïncide avec une inégalité établie en 1914 par J. Hadamard. *S. Marcus.*

Motchane, Léon: Sur la construction effective de fonctions de classe quelconque. *Bull. Sci. math.*, II. Sér. 79, 180—190 (1955).

Application de la théorie des systèmes essentiels de l'A. (ce Zbl. 44, 118) à la des-

cription de procédés de construction effective de fonctions de classe de Baire quelconque.

A. Revuz.

Marcus, S.: Sur la détermination d'une fonction partiellement continue par des valeurs prises sur un ensemble dense. Comun. Acad. Republ. popul. Romîne 5, 1563—1568, russ. u. französ. Zusammenfassg. 1567—1568, 1568 (1955) [Rumänisch].

L'A. étend à n variables, une variante du théorème bien connu de Sierpinski-Tolstov sur la détermination unique de $f(x, y)$ réelle sur le domaine G , lorsque f est connue sur un E dense en G et continue par rapport à chaque variable. Or l'A. note qu'il suffit d'avoir cette dernière condition vérifiée sur $G - E$ (ce qui est évident).

A. Froda.

Delange, Hubert: Sur un théorème de Karamata. Bull. Sci. math., II. Ser. 79, 9—12 (1955).

L'A. ricorda un teorema di J. Karamata [Mathematica 4, 38—53 (1930)] relativo alle funzioni „a crescita lenta“, rimproverando all'enunciato stesso oscurità e imprecisione, perchè Karamata aveva omessa la definizione di funzione a crescita lenta. L'A. rinuncia e dimostra il teorema di Karamata sotto una nuova forma che evita ogni equivoco, perchè non fa affatto uso della denominazione a crescita lenta. La nuova forma è la seguente: „Sia $L(x)$ una funzione positiva definita almeno per $x \geq$ ad un certo $x_0 > 0$, e misurabile in ogni intervallo $[x_0, x_1]$ ove x_1 è un numero qualunque $> x_0$. Supponiamo che, per ogni $x > 0$, il rapporto $L(rx)/L(r)$ tenda ad 1 per $r \rightarrow +\infty$. Allora, qualunque siano a e b tali che $0 < a < b$, la convergenza del detto rapporto ad 1, per $r \rightarrow +\infty$, è uniforme nell'intervallo chiuso $[a, b]$ “.

T. Viola.

Niculescu, Lilly-Jeanne: Sur une extension du critère de compacité d'Arzela. Acad. Republ. popul. Romine, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 7, 545—552, russ. u. französ. Zusammenfassg. 551—552 (1955) [Rumänisch].

Dans l'ensemble des fonctions $f(x, y)$, hyperboliquement continues dans le carré $I: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ et dans lequel on ne distingue pas entre deux fonctions f et g , dont la différence est une constante hyperbolique (c'est-à-dire la somme d'une fonction arbitraire de x et d'une fonction arbitraire de y), l'A. introduit une norme par la formule

$$(1) \quad \|f\| = \sup_{(x, y) \in I} |f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y)|$$

et une métrique par la formule

$$(2) \quad d(f, g) = \|f - g\|.$$

[Rappelons qu'une fonction $f(x, y)$, définie dans I , est hyperboliquement continue au point $(x, y) \in I$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$, tel que $|\Delta_2 f| = |f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)| < \varepsilon$ pour $|h|, |k| < \delta$.] L'espace ainsi métrisé est appelé par l'A. espace C_H . Un ensemble $E \subset C_H$ est borné, s'il existe un nombre M tel que $|f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y)| < M$ pour tout $f \in E$. Les fonctions de E sont également continues hyperboliquement, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que, pour $|h| < \delta, |k| < \delta$, on ait $|\Delta_2 f| < \varepsilon$ pour tout $f \in E$ et pour tout point $(x, y) \in I$. S'il existe pour tout $f \in E$ une fonction $Df(x, y)$, telle que, dans les mêmes conditions, on ait $|\Delta_2 f/hk - Df| < \varepsilon$, les fonctions f sont également dérivables hyperboliquement. On démontre les théorèmes suivants: (I) L'espace C_H , métrisé par (2), est complet. (II) Les éléments de toute partie compacte E de C_H sont des fonctions également continues hyperboliquement dans I . (III) Toute partie bornée E de C_H , dont les éléments sont des fonctions également continues hyperboliquement et également dérivables hyperboliquement dans I , est compacte.

F. Albrecht.

Allgemeine Reihenlehre:

Agnew, Ralph Palmer: Permutations preserving convergence of series. *Proc. Amer. math. Soc.* **6**, 563—564 (1955).

Verf. gibt eine verblüffend einfache Charakterisierung derjenigen Permutationen (Umordnungen) p_1, p_2, p_3, \dots der Reihe der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$, für welche mit jeder konvergenten unendlichen Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ komplexer Zahlen auch

die umgeordnete Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_{p_v}$ konvergent ausfällt und die nämliche Summe aufweist. Die Permutation hat dann und nur dann die genannte Eigenschaft, wenn eine natürliche Zahl N so existiert, daß die Menge der im Abschnitt p_1, \dots, p_n enthaltene Elemente für jedes $n = 1, 2, \dots$ in N oder weniger Teilmengen (Blöcke) aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen zerlegt werden kann. H. Hadwiger.

Shanks, Daniel: Non-linear transformations of divergent and slowly convergent sequences. *J. Math. Physics* **34**, 1—42 (1955).

Der Verf. betrachtet die nichtlinearen (nichtpermanenten) Matrixtransformationen (k fest, $n \rightarrow \infty$)

$$B_{k,n} = e_k(A_n) = \frac{\begin{vmatrix} A_{n-k} & \dots & A_n \\ \Delta A_{n-k} & \dots & \Delta A_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \Delta A_{n-1} & \dots & \Delta A_{n-1+k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Delta A_{n-k} & \dots & \Delta A_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \Delta A_{n-1} & \dots & \Delta A_{n-1+k} \end{vmatrix}}$$

(mit speziellen Festsetzungen, falls der Nenner verschwindet) und ihre Iterationen $C_{k,n} = e_k(B_{k,n})$, $D_{k,n} = e_k(C_{k,n})$. Fragen der Limitierbarkeit und Konvergenzverbesserung durch diese Transformationen werden bei zahlreichen Klassen von Folgen A_n (auch numerisch) untersucht. Als Beispiel greifen wir heraus: Ist $f(m) = \sum_{i=0}^{M_1} f_i m^i$, $g(m) = \sum_{i=0}^{M_2} g_i m^i$, $f_{M_1} \neq 0$, $g_{M_2} \neq 0$, $g(m) \neq 0$ ($m = 0, 1, \dots$) und

$A_n = \sum_{m=0}^n (-1)^m f(m)/g(m)$, so gilt: (a) Ist $M_1 < M_2$, so konvergiert A_n und die Folgen $B_n = e_1(A_n)$, $C_n = e_1(B_n) \dots$ konvergieren immer besser (im Sinne von $\Delta B_n = o(\Delta A_n)$) zu demselben Grenzwert, (b) ist $M_1 \geq M_2$, so divergiert A_n und die Folgen B_n, C_n, \dots divergieren immer langsamer, bis bei einer von $M_1 - M_2$ abhängigen Iterationsordnung Konvergenz eintritt. A. Peyerimhoff.

Vermes, P.: Infinite matrices summing every periodic sequence. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **58**, 627—633 (1955).

The problem of the summability of divergent periodic sequences was introduced by R. H. C. Newton (this Zbl. **57**, 292), who gave a necessary and sufficient condition for a T -matrix (regular matrix) to sum every periodic sequence to its „right“ value. In the present paper, necessary and sufficient conditions are obtained for a general infinite matrix to transform every periodic sequence into a convergent sequence; such matrices need not be T -matrices or K -matrices, the rows need not be absolutely convergent, the elements can be unbounded, and column limits need not exist. The last section gives several cases of combinations of two or more matrices, sums, products, convolutions, which preserve the efficiency for periodic sequences. A matrix that sums every periodic sequence is called a P -matrix. If A is a P -matrix and the A -limit of every periodic sequence is zero, A is called a PO -matrix. If A is a P -matrix and the A -limit of every periodic sequence is its Abel limit, A is called a PA -matrix. The main theorem is then as follows. The matrix A is a P -matrix if, and only if, at every rational point z on the unit circle, and for $n = 0, 1, 2, \dots$,

(1) the series $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} z^k$ converges; (2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} z^k = a_n(z)$ tends to a finite limit. The P -matrix A is a PO -matrix if, and only if, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z) = 0$ at rational points

on the unit circle; it is a PA -matrix if, and only if, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(1) = 1$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z) = 0$ at all other rational points on the unit circle. — Several examples of the theorem are given.

R. G. Cooke.

Gaier, Dieter: On modified Borel methods. Proc. Amer. math. Soc. 6, 873—879 (1955).

Verf. betrachtet die Borel-Verfahren $B: e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k x^k}{k!}$ und $B': \int_0^x e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k t^k}{k!} dt$, sowie die daraus entstehenden Verfahren B_1 und B'_1 , bei denen x durch $n = 1, 2, \dots$ ersetzt ist. Für $a_n = O(n^K)$, $K < (\pi^2 + 1)^{1/2}$ gelten die Vergleichssätze $B_1 \rightarrow B$, $B_1 \rightarrow B'$, $B_1 \rightarrow B'_1$; $B'_1 \rightarrow B'$, $B'_1 \rightarrow B$, $B'_1 \rightarrow B_1$. Alle diese Sätze werden falsch für $K = (\pi^2 + 1)^{1/2}$. Die Beweise stützen sich auf einen Satz über ganze Funktionen. Der (im Spezialfall) besagt: Ist $f(z)$ regulär für $\Re z \geq 0$ und vom Exponentialtyp $< (\pi^2 + a^2)^{1/2}$, so folgt aus $f(n) \cong e^{an}$ ($a \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$) die Beziehung $f(x) \cong e^{ax}$ ($x \rightarrow \infty$) (für $a = 0$ findet sich dieser Sachverhalt bei A. J. Macintyre, dies. Zbl. 20, 377). Um etwa $B_1 \rightarrow B$ zu beweisen, wird hier $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k x^k}{k!}$ gesetzt; die Voraussetzung über den Typus von $f(z)$ ergibt sich aus der Koeffizientenbedingung $a_n = O(n^K)$. — Diese Ergebnisse lassen sich verwenden, um die Frage der Indexverschiebung bei den Verfahren B_1 und B'_1 zu klären: Indexverschiebung ist möglich für $a_n = O(n^K)$, $K < (\pi^2 + 1)^{1/2}$, während $K = (\pi^2 + 1)^{1/2}$ nicht zulässig ist.

A. Peyerimhoff.

Jurkat, W. and A. Peyerimhoff: The consistency of Nörlund and Hausdorff methods. (Solution of a problem of E. Ulrich.) Ann. of Math., II. Ser. 62, 498—503 (1955).

Es wird bewiesen, daß die Nörlundschen und die Hausdorffschen Limitierungsverfahren jede Folge zum gleichen Werte limitieren, welche überhaupt von beiden Verfahrensklassen erfaßt werden kann. Für jede der Klassen für sich war das lange bekannt. Ref. stellte die Frage allgemein für den Vergleich beider Klassen untereinander und beantwortete sie teilweise durch den Nachweis, daß die Cesarovverfahren den Durchschnitt beider Klassen erschöpfen [Math. Z. 25, 382—387 (1926)]. Dieses Ergebnis wurde mehrfach wiedergefunden. Der allgemeine Beweis erfordert Mittel, die erst seitdem entwickelt worden sind. Die Übertragung auf funktionale Methoden ist möglich.

E. Ulrich.

Debi, Sobha: Some results on total inclusion for Nörlund summability. Bull. Calcutta math. Soc. 47, 135—141 (1955).

Die Summierungsverfahren A und B heißen total äquivalent, wenn aus $A\text{-}\lim s_n = l$ (l endlich oder $\pm \infty$) stets $B\text{-}\lim s_n = l$ folgt. (Alle auftretenden Größen sind als reell vorausgesetzt.) Analog ist totale Inklusion erklärt. Diese Begriffe werden auf Nörlund-Verfahren angewandt. Z. B. kommt für die totale Inklusion $(N, p_n) \subseteq (N, q_n)$ der regulären N -Verfahren (N, p_n) und (N, q_n) zu den Bedingungen, die für die gewöhnliche Inklusion notwendig und hinreichend sind [vgl. Hardy, Divergent series (dies. Zbl. 32, 58), S. 67, Theorem 19] noch die weitere Bedingung $k_n \geq 0$ hinzu, wobei die k_n durch $(\sum p_n x^n)(\sum k_n x^n) = \sum q_n x^n$ erklärt sind. Der Beweis ergibt sich mit Hilfe des Satzes, daß die Transformation $t_m = \sum_{n=0}^m c_{mn} s_n$ genau dann total regulär ist, wenn sie regulär und positiv ist (Hardy, a. a. O., S. 53, Theorem 10). Erwähnt sei noch: Die regulären Verfahren (N, p_n) und (N, q_n) sind genau dann total äquivalent, wenn $p_n = \lambda q_n$ ($n = 0, 1, \dots$; λ eine Konstante).

W. Meyer-König.

Knopp, K. and B. Vandenburg: Functional Nörlund methods. I. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 4, 5—32 (1955).

Das Ziel dieser Arbeit ist, eine Theorie der Nörlundverfahren für Funktionen in systematischer Weise zu entwickeln. Der vorliegende erste Teil ist dabei hauptsächlich dem Studium der Vergleichssätze gewidmet. — Zur Limitierung zugelassen wird die Klasse S aller komplexwertigen Funktionen $s(t)$, $t \geq 0$, die in jedem Intervall $(0, c)$ beschränkt und meßbar sind. Bedeutet P die Klasse aller reellwertigen $p(t)$, $t \geq 0$, die in jedem Intervall $0 < a \leq t \leq b < \infty$ beschränkt und meßbar sind und für die die Integrale $P(x) = \int_0^x p(t) dt$ absolut konvergent und > 0 sind, so ist $s \in S$ Nörlund-limitierbar zum Wert s durch das Verfahren N_p , $p(t) \in P$ falls $\sigma(x) = \frac{1}{P(x)} \int_0^x p(x-t) s(t) dt \rightarrow s$ gilt für $x \rightarrow \infty$. Die N_p -Summierbarkeit eines Integrales $\int_0^\infty a(t) dt$ wird durch die N_p -Limitierbarkeit der Teilintegral $s(x) = \int_0^x a(t) dt$ erklärt. Ein $s \in S$ heißt zum Wert s Abel-summierbar, falls $x \int_0^\infty e^{-xt} s(t) dt \rightarrow s$ für $x \rightarrow +0$ (bei vorausgesetzter Konvergenz des Laplace-Integrals für $x > 0$ — Anwendbarkeit). — Die Nörlundverfahren gestatten Indexverschiebung in beide Richtungen. Sind N_p und N_q zwei positive permanente Nörlundverfahren, so ist auch das durch $r(x) = \int_0^x p(x-t) q(t) dt = p * q$ erklärte Verfahren regulär und es ist $N_p \subseteq N_r$. Als Spezialfall ergibt sich daraus die Verträglichkeit positiver und permanenter Nörlundverfahren. Für jedes permanente N_q mit $q'(t) \geq 0$, $q' \in S$ ist $C_1 \subseteq N_q$; ist $q(t) > 0$, $q(0) = 1$ stetig differenzierbar und $q' < 0$, so ist $N_q \subseteq C_1$. Bei vorausgesetzter Anwendbarkeit enthält das Abelverfahren jedes Verfahren N_q , dies gilt auch für absolute Summierbarkeit. — Für gewöhnliche Nörlundverfahren N_p und N_q wird die Frage der Inklusion $N_q \supseteq N_p$ — grob gesagt — durch Einführung des zu N_p inversen Verfahrens behandelt. Dieses Vorgehen stößt bei Funktionen auf Schwierigkeiten (z. B. fehlt eine Einheitsintegraltransformation). Die Berechnung des $s(t)$ aus $\sigma(x) P(x) = \int_0^x p(x-t) s(t) dt$ ist (unter passenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen und $p(0) \neq 0$) möglich durch Differentiation dieser Beziehung — es ergibt sich eine Volterrassche Integralgleichung — und Lösen der sich ergebenden Integralgleichung. Dies führt auf die Frage, wann für $q(t)$ eine Darstellung $q = c p + p * k$ möglich ist. Eine eingehende Untersuchung dieser Integralgleichung (für k) lehrt, daß für Inklusionssätze die Funktion $k(t)$ eine entsprechende Rolle spielt, wie bei gewöhnlichen Nörlundverfahren die durch $\sum q_n x^n = \sum p_n x^n \cdot \sum k_n x^n$ erklärte Folge $\{k_n\}$. [Für gewöhnliche Nörlundverfahren vgl. etwa Hardy, Divergent series (dies. Zbl. 32, 58), Kapitel IV. Ein Eingehen auf die zahlreichen Einzelheiten verbietet sich aus Platzgründen.

A. Peyerimhoff.

Knopp, Konrad: Nörlund-Verfahren für Funktionen. II. Math. Z. 63, 39—52 (1955).

Vgl. die vorstehend besprochene Arbeit von K. Knopp und B. Vandenburg. Jetzt werden insbesondere Multiplikationssätze aufgestellt. Seien N_p und N_q funktionale Nörlund-Verfahren mit den Gewichtsfunktionen $p(t)$ und $q(t)$,

$$r(t) = p * q = \int_0^t p(t-u) q(u) du, \quad P(t) = \int_0^t p(u) du, \dots;$$

weiter seien die Integrale (1) $\int_0^\infty a(t) dt$ und (2) $\int_0^\infty b(t) dt$ vorgelegt und (3) $c(t) = a * b$.

Die auftretenden Funktionen müssen gewissen Klassen angehören.) (I) Sind N_p und N_q positiv und regulär und sind (1) und (2) beziehentlich N_p - und N_q -summierbar zu den Werten A und B , so ist (3) N_R -summierbar zum Wert AB . (II) Macht man in (I) die Zusatzvoraussetzung $(q(x))^{-1} (q * b)_x = O(1)$ oder die Zusatzvoraussetzung, daß (1) $|N_p|$ -summierbar ist, so kann man in der Behauptung N_R durch N_r ersetzen. Wegen entsprechender Multiplikationssätze im Fall unendlicher Reihen

$c_\nu = \sum_{\rho=0}^{\nu} a_{\nu-\rho} b_\rho$ vgl. Fl. M. Mears, dies. Zbl. 13, 261; 17, 162; Ann. of Math., II. Ser.

44, 401—410 (1943) und 46, 563—566 (1945). Die Beweise der Multiplikationssätze werden vorbereitet durch für sich interessante Sätze über allgemeine Integraltransformationen (z. B. hinreichende und notwendige Bedingungen dafür, daß die

Transformation $\sigma(x) = \int_0^\infty \alpha(x, t) s(t) dt$ absolut konvergenztreu ist) und über absolute Inklusion bei N -Verfahren (hinreichende Bedingungen für $|N_p| \subseteq |N_r|$).

W. Meyer-König.

Tanzi Cattabianchi, Luigi: Criteri di inversione per la convergenza delle successioni perturbate. Rivista Mat. Univ. Parma 6, 375—388 (1955).

Die Arbeit gibt eine einheitliche Behandlung des Mercer-Vijayaraghavanschen Problems. $\{\alpha_n\}$ und $\{\beta_n\}$ seien zwei reelle Zahlenfolgen; ihnen seien die folgenden Folgen zugeordnet: $X_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i$ und $v_n = x_n + \beta_n X_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Falls $x_n \rightarrow 0$, so ist auch X_n eine Nullfolge; wenn weiterhin auch $|\beta_n| < K$ (unabhängig von n) erfüllt ist, so ist $v_n \rightarrow 0$ gültig. Aus $v_n \rightarrow 0$ folgt aber im allgemeinen $x_n \rightarrow 0$ natürlich nicht. Es handelt sich um Kriterien, welche sichern, daß aus $v_n \rightarrow 0$ die Relation $x_n \rightarrow 0$ folgt. Alle Kriterien (die Arbeit enthält 15) sind von folgender Form: „aus $v_n \rightarrow 0$ und \mathfrak{M} folgt $x_n \rightarrow 0$ “. \mathfrak{M} bedeutet eine Kombination von Voraussetzungen a) über die Folge $\{\beta_n\}$ (eventuell über $B_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \beta_i$);

b) über die Folge $\{v_n\}$ (eventuell $V_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n v_i$); c) über die Monotonität von X_n ; d) über die Menge der Indizes r und s , für welche $x_r X_r \geq 0$, $x_s X_s < 0$ ist.

S. Fenyő.

Rajagopal, C. T. and T. Vijayaraghavan: One-sided Tauberian theorems for Borel, Abel and Riemann second-order transforms. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Serie 4, 309—322 (1955).

Die Verf. betrachten reguläre Transformationen einer reellen Folge s_n vom Typus $\tau(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n(x) s_n$ mit $c_n(x) \geq 0$, $c_n(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ und $\sum c_n(x) = 1$, welche die Riemannsche Transformation 2. Ordnung und die Borelsche und Abelsche Transformation als Spezialfall enthalten. Hardy [Divergent Series (dies. Zbl. 32, 58), Theorem 238, p. 306—307] bewies unter gewissen weiteren Einschränkungen, daß aus der Beschränktheit der Transformation und dem Bestehen einer einseitigen Tauber-Bedingung die Beschränktheit der Folge s_n selbst folgt. Verf. beweisen, daß bei $\tau(x) < O(1)$ und (1) $(s_n - s_{n-1}) \varphi(n) \geq -1$, $n \geq 1$ und bei geeigneter Einschränkung der c_n die s_n im allgemeinen nach oben nicht beschränkt zu sein brauchen, jedoch von einer bis auf ein $O(1)$ -Glied in der Differenz bestimmten äußersten

Größenordnung sind: $\tau(x) - s_M \sum_{n=M}^\infty c_n(x) \geq -\mu \Phi(\log M) + O(1)$ ($M \rightarrow \infty$). Hierbei sind $\varphi(u)$ und später $\varphi^*(u) = \varphi(u) \Phi(\log u)$ positive monoton wachsende Funk-

tionen mit $\varphi(u) \rightarrow \infty$, $\int_{u_0}^u \varphi^{-1}(t) dt \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow \infty$), $\Phi(u) = \int_1^u \varphi^{-1}(t) dt$; $\Phi(x) - \Phi(M) = \mu \Phi(\log M)$, $\mu > 0$. Bei Verschärfung der Bedingung (1) zu (2): $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) \varphi^*(n) = -1$ läßt sich $s_n < O(1)$ aus $\tau(x) < O(1)$ folgern und insbesondere $s_n \rightarrow -\infty$ aus $\tau(x) \rightarrow -\infty$. (2) erweist sich als die weiteste Bedingung mit dieser Eigenschaft. Die Ergebnisse werden aus zwei Typen von Ungleichheiten hergeleitet, die in Spezialfällen von Pennington (dies. Zbl. 49, 44) und Rajagopal (dies. Zbl. 50, 285) erhalten wurden. Anschließend werden die allgemeinen Sätze auf die oben genannten speziellen Verfahren angewandt. *V. Garten.*

Rajagopal, C. T.: Additional note on some Tauberian theorems of O. Szász. Pacific J. Math. 5, Suppl. II, 971—975 (1955).

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 46, 291) gab der Verf. verschiedene Tauber-Sätze für allgemeine (Φ, λ) -Summierbarkeit an. Hier wird nachgetragen, daß der dortige Schluß von Theorem II auf Corollary III' umgekehrt werden kann. Die Annahmen von Theorem II implizieren nämlich

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{v=n+1}^m \lambda_v a_v \geq 0 \quad \text{für } m > n, \quad \frac{\lambda_m}{\lambda_n} \rightarrow 1,$$

und mit Corollary III' folgt $\sum a_n = s$ aus $(\Phi, \lambda) \cdot \sum a_n = s$ und der Tauber-Bedingung (1), so daß sich daraus der neue Zugang zu Theorem II ergibt. *D. Gaier.*

Freud (Frejd), Geza: Einseitige L_1 -Approximationen und ihre Anwendung auf Sätze vom Tauberschen Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR 102, 689—691 (1955) [Russisch].

Let $K_m(a, b)$ be a class of functions with derivatives up to order $m-1$ defined on the interval (a, b) and let $f^{(m-1)}(x)$ be the integral of a function with bounded variation. The author proves that if $f \in K_m(a, b)$, then there exist the polynomials $p_n(x)$, $P_n(x)$ of degree n satisfying the conditions (1) $p_n(x) \leq f(x) \leq P_n(x)$, $a \leq x \leq b$,

$$(2) \quad \int_a^b [P_n(x) - p_n(x)] \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right).$$

The estimation (2) is the best possible. Applying this result the author formulates a theorem of Tauberian type for Laplace-Stieltjes transforms. *J. Górski.*

Korenbljum, B. I.: Über das asymptotische Verhalten der Laplace-Integrale in der Nähe der Grenze des Konvergenzgebietes. Doklady Akad. Nauk SSSR 104, 173—176 (1955) [Russisch].

Par une méthode apparentée à celle de J. Karamata (ce Zbl. 1, 273), l'A. établit un théorème taubérien dont voici l'énoncé dans le cas des séries: $f(x) = \sum a_n x^n$ et $g(x) = \sum b_n x^n$ étant convergentes pour $-1 < x < 1$, on pose $s_n = \sum_1^n a_j$,

$\sigma_n = \sum_1^n b_j$; si l'on a $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $\lim \sigma_m / \sigma_n = 1$ pour $n \rightarrow \infty$ et $1 < m/n \rightarrow 1$, alors $f(x) \sim g(x)$ pour $x \rightarrow 1 -$ implique $s_n \sim \sigma_n$ pour $n \rightarrow \infty$. *G. Bourion.*

Stenberg, Warren: On sequences with divergent total variation. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 178—190 (1955).

The total variation of a finite sequence a_1, a_2, \dots, a_n is defined as $\sum_{p=1}^{n-1} |a_p - a_{p+1}|$ and that of the infinite sequence as a_n , $n = 1, 2, \dots$ as $\sum_{p=1}^{\infty} |a_p - a_{p+1}|$. For any sequence a_n , $n = 1, 2, \dots$, a rearrangement of the sequence is defined as any permutation of a subsequence of the given sequence. With these definitions the author proves the following result. Let $\sum_1^{\infty} a_n$ be a positive term divergent series whose

terms tend to zero. Then there exists a rearrangement b_n , $n = 1, 2, \dots$ of the sequence $a_n = 1, 2, \dots$ with $\sum_1^\infty b_n$ divergent such that for each subsequence c_1, c_2, \dots of b_1, b_2, \dots it is true that $\sum_{p=1}^{n-1} |c_p - c_{p+1}| > 2 \sum_{p=1}^n c_p - 5d$ where d is the greatest term in b_n , $n = 1, 2, \dots$. The above result implies that if $\sum c_n$ is divergent, the total variation of the sequence c_n , $n = 1, 2, \dots$ is infinite. This special case answers in the affirmative a problem of J. Weihe (Thesis, Univ. of California 1954) which generalizes the problem posed by A. P. Morse whether there exists a positive term divergent series $\sum b_n$ whose term tends to zero such that every subsequence c_n , $n = 1, 2, \dots$ with $\sum c_n$ divergent has total infinite variation. This last problem was answered in the affirmative by Besicovitch and Erdős though their results were unpublished.

V. Ganapathy Iyer.

Clunie, J.: Series of positive terms. J. Univ. Bombay, n. Ser. 24, Nr. 3 (38), 10—12 (1955).

Unter $\varphi(x)$ irgendeine nicht-negative, nicht-wachsende Funktion von x mit $\sum \varphi(n) < \infty$ verstanden, gilt für jede nicht-negative Funktion $f(x)$, deren Variation $V_x \{f(x)\} \leq \varphi(x)$ ist, auch noch der Cauchysche Verdichtungssatz, d. h. $\sum f(n)$ und $\sum 2^n f(2^n)$ besitzen dasselbe Konvergenzverhalten. Das ist aber im allgemeinen nicht mehr der Fall, wenn $\sum \varphi(n)$ divergiert. — Für eine wie oben beschaffene Reihe $\sum f(n)$ gilt aber nicht mehr notwendig die Bedingung $nf(n) \rightarrow 0$, d. h. der Satz von Olivier (vom Verf. als Satz von Abel bezeichnet).

V. Garten.

Orloff, Constantin: Une interprétation géométrique des séries alternées. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 7, 3—7 (1955).

Es werden die alternierenden Reihen geometrisch veranschaulicht. Aus den erhaltenen Figuren wird auf die absolute und bedingte Konvergenz, sowie auf die Summabilität der Reihen geschlossen. Die Sätze sind ohne Beweis mitgeteilt, nicht alle benutzte Begriffe sind definiert.

S. Fenyő.

Sikkema, P. C.: On linear recursion formulae. Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A 58, 596—607 (1955).

Es seien $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) zwei Zahlenfolgen mit den Eigenschaften $a_0 = b_0 = 1$, $\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Formal gilt also $(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) = 1$. Verf. beweist: Es werde vorausgesetzt, daß eine nicht von n abhängige reelle Zahl λ existiert derart, daß (A) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{n!^{-\lambda} |a_n|\}^{1/n} = \nu$, wo $0 \leq \nu < \infty$. Dann gilt: 1. Falls $\lambda > 0$ ist, ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{n!^{-\lambda} |b_n|\}^{1/n} = \nu$;

2. Falls $\lambda \leq 0$ ist, sei K eine (nach (A) existierende) nicht von n abhängige positive Zahl derart, daß $|a_n| \leq K(\nu + \varepsilon)^n n!^\lambda$ ($n = 1, 2, \dots$), wo ε beliebig > 0 ist. Dann ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{1/n} \leq (\nu + \varepsilon)(1 + K)$. — Falls weiter die a_n für $n \geq 1$ reell und negativ sind (die b_n sind dann alle > 0), so bleibt im Falle $\lambda > 0$ der Satz richtig, wenn man in Voraussetzung und Behauptung \limsup durch \lim ersetzt. — Einige weitere Sätze ähnlicher Art beschäftigen sich mit den Fällen $\nu = 0$ und $\nu = \infty$.

H. D. Kloosterman.

Orts, José Ma.: Über einige nichtlineare Rekursionsformeln. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 15, 115—120 (1955) [Spanisch].

Verf. betrachtet Funktionen $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$, deren Koeffizienten $\{a_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) der Rekursionsgleichung (*) $a_{n+1} = k \sum_{v=0}^n a_v a_{n-v}$ genügen, wobei k eine von n unabhängige Konstante ist. Rekursionsgleichungen dieses Typus treten bei gewissen gewöhnlichen Differentialgleichungen auf, wenn man eine Lösung mit

Hilfe des Potenzreihenansatzes zu erhalten versucht. Verf. betrachtet insbesondere das Beispiel $y^{(r)} = k y^2 + P(x)$, k Konstante und $P(x)$ Polynom. Setzt man hierin $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, so ist die für die Koeffizienten $\{a_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) sich ergebende Rekursionsformel vom Typus (*), nur erscheint $\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} a_{n-\nu}$ mit einem von n abhängigen Faktor multipliziert.

E. Lammel.

Wheelon, Albert D.: Note on the summation of finite series. *J. Math. Physics* **34**, 182—186 (1955)

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **58**, 53) gab Verf. ein Verfahren an, um unendliche Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ für Funktionen $f(s)$, die Laplacetransformierte sind, durch Vertauschung von Summation und Integration formal zu summieren:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nt} F(t) dt = \int_0^{\infty} F(t) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} dt = \int_0^{\infty} \frac{F(t)}{1 - e^{-t}} dt.$$

Dieses Verfahren wird nun ausgedehnt auf endliche Reihen mit konstanten Koeffizienten, die vor allem aus Binomialkoeffizienten und Faktoriellen aufgebaut sind. Es werden zunächst Binomialkoeffizienten durch Fakultäten ersetzt, Fakultäten im Zähler durch $n! = \int_0^{\infty} e^{-u} u^n du$ ersetzt, Fakultäten im Nenner oder andere Funktionen des Index wie oben durch Laplacetransformationen über Hilfsfunktionen im Zähler dargestellt und die Summation mittels der Formeln

$$\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \quad \text{oder} \quad \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} = e^x \left[1 - \frac{x^{N+1}}{N!} \int_0^1 e^{-xv} v^N dv \right]$$

vorgenommen. Hiermit werden einige endliche Reihen, insbesondere aus der Statistik, summiert.

J. Heinhold.

Smith, David Eugene: The history and transcendence of π . *Monographs on Topics of modern Mathematics*, 387—416 (1955).

Pour les caractères généraux des Monographs v. O. Veblen, ce Zbl. **67**, 124. Cette monographie présente un historique succinct mais très documenté du nombre π — estimations successives, expressions diverses (produits infinis, fractions continues illimitées, etc.), relations avec e , nature (irrationalité, transcendance) —, ainsi qu'une démonstration élémentaire de la transcendance de e et de π , s'inspirant des mêmes principes que celle donnée par Enriques dans les „Questioni riguardanti le matematiche elementari“.

J. Tits.

Brun, Viggo: On the problem of partitioning the circle so as to visualized Leibniz' formula for π . *Nordisk mat. Tidskrift* **3**, 159—166 (1955).

Nach einer kurzen, durch historische Hinweise belegten Ausführung über die Bedeutung der Anschauung in der Mathematik leitet der Verf. eine nach seiner Ansicht „anschauliche“ Formel für π her. Er unterteilt den Umfang eines dem Einheitskreis umschriebenen Quadrats in 2^n Teile und summiert die von den Verbindungslinien der Teilpunkte mit dem Kreismittelpunkt und den Parallelen zur jeweiligen Quadratseite durch die auf den Verbindungslinien gelegenen Schnittpunkte des Kreises gebildeten Dreiecke. Es ergibt sich so eine Doppelreihe für $\pi/4$. Vertauschung der Summation liefert unter der Annahme, daß die unter dem Kurvenstück $y = x^n$, ($0 \leq x \leq 1$) gelegene Fläche $A_n = 1/(n+1)$ bekannt sei, die Leibnizsche Reihe für $\pi/4$.

J. Heinhold.

Macon, N.: A continued fraction for e^z . *Math. Tables Aids Comput.* **9**, 194—195 (1955).

Barsotti, L.: Reihenentwicklung der Funktion \arcsin . *Soc. Paranaense Mat., Anuário* **2**, 1—2 (1955) [Portugiesisch].

Spezielle Funktionen:

Rossum, H. van: Systems of orthogonal and quasi orthogonal polynomials connected with the Padé table. I—III. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 517—525, 526—534, 675—682 (1955).

I. The Padé table for a given pair of power series is introduced and the systems of orthogonal and quasi orthogonal polynomials connected with it are studied. All numbers here are real. Orthogonal is used here in the following sense (cf., for example, Frank, this Zbl. 40, 27): Let a sequence of real numbers $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$, be given, and let Ω be a linear operator applied to any polynomial $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ such that $\Omega[p(x)] = a_0 \mu_0 + a_1 \mu_1 + \dots + a_n \mu_n$. If a system of polynomials $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots$, has the property

$$\Omega[p_m(x) \cdot p_n(x)] = 0 \text{ for } m \neq n, \neq 0 \text{ for } m = n,$$

then the polynomials are said to form an orthogonal system with respect to the operator Ω or with respect to the sequence $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$. 1. Conditions are shown for a pair of polynomials $\{V_{\mu\nu}^{(1)}(x), V_{\mu\nu}^{(2)}(x)\}$ or a reduced pair $\{Q_{\mu\nu}^{(1)}(x), Q_{\mu\nu}^{(2)}(x)\}$ to be a Padé pair for two given power series $S_1(x)$ and $S_2(x)$. Conditions are also shown for $\{V_{\mu\nu}^{(1)}(x), V_{\mu\nu}^{(2)}(x)\}$ to be normal and to be a regular set. 2. Conditions are shown for polynomials $x^n Q_{n,k+n}^{(1)}(x^{-1})$ to be orthogonal with respect to the sequence a_{k+1}, a_{k+2}, \dots , where $S_1(x)/S_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, and for polynomials $x^n q_{k+n,n}^{(2)}(x^{-1})$ to be orthogonal with respect to the sequence $\bar{a}_{k+1}, \bar{a}_{k+2}, \dots$, where $S_2(x)/S_1(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 x^2 + \dots, k \geq 0$. Such orthogonal polynomials are defined as „associated with the diagonal of the Padé table of order k of the first kind and of the second kind, respectively“. 3. Polynomials $B_n(x)$ are defined as quasi orthogonal of order k with respect to the sequence $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots$, if

$$\bar{\Omega}^{(k)}[B_n(x) \cdot B_m(x)] = 0 \text{ for } |m - n| > k, \neq 0 \text{ for } |m - n| = k,$$

$n, m = k, k + 1, \dots$, where $\bar{\Omega}^{(k)}(x^n) = \bar{a}_{n+1}, n = 0, 1, 2, \dots$. It is shown that $x^{k+n} Q_{k+n,n}^{(1)}(x^{-1})$ and $x^{k+n} Q_{n,k+n}^{(2)}(x^{-1}), n = 0, 1, \dots$, are quasi orthogonal of order k with respect to the sequences a_1, a_2, \dots , and $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots$, respectively. These are quasi orthogonal polynomials associated with the diagonal of order k of the second and first kind, respectively. — II. 4. The Padé table for one power series $S(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots, (c_0 \neq 0), (S_2(x) \equiv d_0 = 1)$, is discussed, and the definitions and properties of part I are transferred to this case. 5. Let $S_1(x)$ and $S_2(x)$ be formal power series with a set of regular Padé pairs $\{V_{\mu\nu}^{(1)}(x), V_{\mu\nu}^{(2)}(x)\}$ with $\mu < \nu + 1$ (a regular set of the first kind). Recurrence relations are obtained for the Padé pairs on three consecutive squares of the stepline of order k of the first kind and for the consecutive Padé pairs belonging to the diagonal of order k of the first kind. 6. Conditions are obtained for the polynomials $x^n V_{n,k+n}^{(1)}(x^{-1}), n = 0, 1, 2, \dots$, to form an orthogonal system in the strict sense. A system of polynomials $B_0(x), B_1(x), B_2(x), \dots$, is called orthogonal in the strict sense if in a real interval (a, b) a bounded nondecreasing function $\psi(x)$ exists such that $\int_a^b B_n(x) \cdot B_m(x) d\psi(x) = 0$ for $m \neq n, \neq 0$ for $m = n$. Finally, Padé fractions of special series are considered. — III. This section deals with applications of the theory developed in the preceding parts 7, 8. The Padé tables are studied for certain special functions which lead to Laguerre, Hermite, Jacobi, and ultraspherical polynomials. 9. Orthogonality of polynomials connected with the Padé table for certain functions is considered.

E. Frank.

Weisner, Louis: Group-theoretic origin of certain generating functions. *Pacific J. Math.* **5**, Suppl II, 1033—1039 (1955).

Sia (*) $L(x, d/dx, n) v = 0$ un'equazione differenziale nella funzione incognita v , dove n è un parametro e L un polinomio in n . Se $v = v_n(x)$ è una soluzione della (*) e per n poniamo $A = y \partial/\partial y$ e indichiamo con L l'operatore $L(x, d/dx, A)$ la funzione $u = v_n(x) y^n$ è una soluzione del sistema $Lu = 0$, $Au = nu$ e inversamente. Supposto che l'equazione $Lu = 0$ possieda una soluzione $g(x, y)$ rappresentabile con una serie $\sum_n g_n(x) y^n$, e che le operazioni di derivazione terminino a termine per questa serie siano lecite, allora $v = g_n(x)$ è una soluzione della (*) e $g(x, y)$ è una funzione generatrice della stessa equazione. Da questa proprietà deriva che quando l'equazione alle derivate parziali $Lv = 0$ è invariante rispetto a un gruppo continuo di trasformazioni si può costruire una funzione generatrice. Ad esempio l'A. applicando questo metodo prova che la funzione ipergeometrica $F(\alpha - n, \beta; \gamma; x)$ ha la funzione generatrice

$$\frac{(1-y)^{\alpha+\beta-\gamma}}{[1+(x-1)y]^\beta} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{x}{1+(x-1)y}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma-\alpha+n-1}{n} F(\alpha-n, \beta; \gamma; x) y^n.$$

Altre funzioni generatrici sono date dall'A. per la funzione di Kummer $F(-n; \gamma; x)$ e per i polinomi di Laguerre e ultrasferici.
G. Sansone.

Nørlund, N. E.: Hypergeometric functions. *Acta math.* **94**, 289—349 (1955).

In dieser sehr ausführlichen Arbeit werden die verschiedenen Lösungen der linearen Differentialgleichungen n -ter Ordnung

$$\prod_{\nu=1}^n (\partial - \gamma_\nu) y - z \prod_{\nu=1}^n (\partial + \alpha_\nu) y = 0 \quad \left(\partial y = z \frac{dy}{dz} \right)$$

mit den $2n$ willkürlichen Parametern $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ in der Umgebung der drei singulären Punkte $z = 0, 1$ und ∞ hergeleitet und untersucht. Im Falle $n = 2$ läßt sich die Lösung in der Umgebung der Stelle $z = 1$ bekanntlich durch die hypergeometrische Funktion von Gauß mit dem Argument $1 - z$ ausdrücken. Ist jedoch die Ordnung der Differentialgleichung größer als 2, so ist das nicht mehr der Fall. Da sich im übrigen die obige Differentialgleichung nicht mehr verändert, wenn z mit $1/z$ und α mit γ vertauscht wird, so ergibt sich aus jeder Lösung eine neue, wenn man α durch γ und z durch $1/z$ ersetzt. Die Lösung, die nach steigenden Potenzen von z oder $1/z$ fortschreitet, wird im ersten und dritten Abschnitt der Arbeit bestimmt. Sie ist Logarithmen-behaftet, wenn die Differenz $\gamma_i - \gamma_j$ gleich einer ganzen Zahl ist. Die Lösungen um die Stelle $z = 0$ oder $z = \infty$ herum können auch in Form von Integralen vom Mellin-Barnes-Typus dargestellt werden. Integrale dieser Art, die sich bekanntlich über Γ -Funktionen erstrecken, erweisen sich überhaupt in den vorliegenden Untersuchungen als sehr wirksam. Es lassen sich auch die in besonderen Fällen im Punkte $z = 1$ regulären Lösungen der obigen Differentialgleichung durch solche Integrale darstellen. Aus ihnen können dann Lösungen in Form von Reihen mit hypergeometrischen Polynomen als Reihengliedern gewonnen werden. Die Reihenentwicklungen um die Stelle $z = 1$ herum weisen unter anderem logarithmische Singularitäten auf, wenn die Differenz $n - 1 - \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \gamma_i)$ eine ganze Zahl ist.
H. Buchholz.

Nørlund, N. E.: Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. *Mat.-fys. Skr., Danske Vid. Selsk.* **1**, Nr. 2, 47 p. (1956).

Die Arbeit beschäftigt sich mit den Lösungen einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit den $2n$ willkürlichen Parametern α_ν, γ_ν mit $\nu = 1, 2, \dots, n$ und den drei singulären Punkten $z = 0, 1$ und ∞ . Die Lösungen stellen hypergeometrische Funktionen höherer Ordnung dar. Mit diesem Aufsatz werden die Untersuchungen desselben Verf. in einer älteren Arbeit (s. oben-

stehendes Referat) fortgesetzt. Da über die Ergebnisse der älteren Arbeit zu Beginn der Abhandlung kurz referiert wird, so kann diese zweite Arbeit auch ohne gleichzeitige Benützung der älteren Arbeit studiert werden. Es werden wiederum Integraldarstellungen für die Lösungen hergeleitet und mit ihrer Hilfe verschiedene Potenzreihenentwicklungen aufgestellt. Die Konvergenzbedingungen der Integrale und Reihen werden untersucht. Bemerkenswert ist wiederum die häufige Verwendung von Integralen des Mellin-Barnes-Typus. *H. Buchholz.*

Saran, Shanti: Integrals associated with hypergeometric functions of three variables. *Proc. nat. Inst. Sci. India* **21**, 83—90 (1955).

Für die zehn Funktionen F_E, \dots, F_T (dies. Zbl. **58**, 296) gibt Verf. Integraldarstellungen vom Pochhammerschen und Mellin-Barnesschen Typus, wie z. B.:

$$F_E(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1; \beta_1, \beta_2, \beta_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; x, y, z) = (2\pi i)^{-2} \Gamma(\gamma_2) \Gamma(\gamma_3) \Gamma(2 - \gamma_2 - \gamma_3) \times \\ \times \int (-t)^{-\gamma_3} (t-1)^{-\gamma_3} F_2(\alpha_1; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2 + \gamma_3 - 1; x, y/t + z/(1-t)) dt,$$

wo der Integrationsweg eine Pochhammersche Doppelschleife $(1+, 0+, 1-, 0-)$ ist und $|x| + |y/t + z/(1-t)| < 1$;

$$\frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\beta_1)}{\Gamma(\gamma_1)} F_E = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} F_4(x_1+t, \beta_2; \gamma_1, \gamma_3; x, z) \frac{\Gamma(\alpha_1+t) \Gamma(\beta_1+t)}{\Gamma(\gamma_1+t)} \Gamma(-t) (-y)^t dt.$$

O. Volk.

Toscano, Letterio: Osservazioni, confronti e complementi su particolari polinomi ipergeometrici. *Matematiche* **10**, 121—133 (1955).

Ausgehend von der Kummerschen Transformationsformel

$$(1) {}_2F_1(-n, \alpha; \gamma; x) = [(\alpha, n)/(\gamma, n)] (-x)^n {}_2F_1(-n, -\gamma - n + 1; -\alpha - n + 1; x^{-1})$$

mit der Ausartung:

$$(2) {}_2F_0(-n, \alpha; x) = (\alpha, n) (-x)^n {}_1F_1(-n; -\alpha - n + 1; -x^{-1}),$$

die Verf. erweitert in:

$$(3) {}_{p+1}F_q \left[\begin{matrix} -n, \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ \gamma_1, \dots, \gamma_q; \end{matrix} x \right] \\ = \frac{(x_1, n) \dots (x_p, n)}{(\gamma_1, n) \dots (\gamma_q, n)} (-x)^n {}_{q+1}F_p \left[\begin{matrix} -n, -\gamma_1 - n + 1, \dots, -\gamma_q - n + 1; \\ \alpha_1 - n + 1, \dots, \alpha_p - n + 1; \end{matrix} (-1)^{p+q} x^{-1} \right],$$

zeigt Verf., daß verschiedene, unabhängig untersuchten Polynome eng mit den klassischen Polynomen zusammenhängen, wie z. B. die von H. L. Krall und O. Frink (dies. Zbl. **31**, 297) und R. P. Agarwal (dies. Zbl. **55**, 301) eingeführten und untersuchten Besselschen Polynome

$$y_n(x, a, b) = {}_2F_0(-n, n + a - 1; -x/b) = n! (-x/b)^n L_n^{(-a-2n-1)}(b/x),$$

für die er im Falle $a = b = 2$ (einfache Besselsche Polynome) mittels der neu gewonnenen Formel $L_n^{-(2n+1)}(-2x) = (2^{2n}/n!) x^{2n+1} e^{-x} D_{x^2}^n(e^x/x)$ eine neue Darstellung ableitet. Außerdem folgt daraus eine Operatorenrelation und eine Darstellung der Besselschen bzw. Hankelschen Funktion $J_{n+1/2}(ix)$, $H_{n+1/2}^{(j)}(ix)$, $j = 1, 2$, durch Laguerresche Polynome. Die Anwendung von (1) und einer quadratischen Transformation auf die Legendreschen Polynome $P_n(x)$ führt auf eine Darstellung, die aber bekannt ist [vgl. Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi, Higher transcendental functions I (dies. Zbl. **51**, 303), S. 131, (31)]. Mittels (3)

zeigt Verf., daß die Polynome $R_n(x) = x^n {}_{p+1}F_q \left[\begin{matrix} -n, \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ \gamma_1, \dots, \gamma_q; \end{matrix} x^{-1} \right]$ zur Klasse der Appellschen Polynome gehören, d. h. daß $D_x R_n = n R_{n-1}(x)$ ist und die Polynome

$${}_{p+1}F_p \left[\begin{matrix} -n, \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ -\alpha_1 - n + 1, \dots, \alpha_p - n + 1; \end{matrix} x \right] \text{ reziprok sind.} \quad O. Volk.$$

Bose, B. N.: On certain integrals involving Legendre and ultraspherical polynomials. *Ganita* **6**, 27—37 (1955).

In Verallgemeinerung von Ergebnissen von Sharma (dies. Zbl. 44, 292) wird das Integral

$$\int_0^1 P_n^\lambda (1 - 2y^2) (1 - y^2)^{\lambda-1/2} y^{2\lambda+2\nu} {}_nF_q \left[\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \end{matrix} ; - (yz)^2 \right] dy$$

ausgewertet; es wird dann $P_{2n}(z)$ bzw. $P_n^\lambda(1 - 2z^2)$ durch eine Reihe von $P_n(1 - 2z^2)$ bzw. $P_n^\lambda(z)$ dargestellt; damit wird unter Anwendung von sechs Integralformeln von Sharma (l. c.) eine Reihe von Integralen wie z. B.

$$\int_0^{\pi/2} P_n^\lambda(\cos(4\vartheta)) J_{-\lambda}(2z \sin \vartheta) \sin^2 \vartheta \cos^{2\lambda} \vartheta d\vartheta$$

ermittelt.

O. Volk.

Badaljan, G. V.: Eine Verallgemeinerung der Legendreschen Polynome mit einigen Anwendungen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija Ser. fis.-mat. estestv. techn. Nauk 8, Nr. 5, 1—28 (1955) [Russisch].

$\{\gamma_n\}$ étant une suite d'exposants réels et x une variable positive, un pseudopolynôme d'ordre n est une combinaison linéaire de $x^{\gamma_0}, x^{\gamma_1}, \dots, x^{\gamma_n}$ [si un même exposant γ figure dans la suite aux rangs p, q, r, \dots , on remplace x^q par $x^q \log x$, x^r par $x^r (\log x)^2$, etc.]. L'A. exprime par une intégrale de contour les pseudopolynômes $\{P_n(x)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$, P_n d'ordre n) qui forment un système orthonormal sur $[0, 1]$ relativement au poids x^α ($\alpha \geq 0$). Les formules obtenues se prêtent (pour $\alpha = 0$) à l'étude de la convergence en moyenne quadratique du développement de Fourier d'une puissance x^k selon les $P_n(x)$, d'où une démonstration du théorème de Müntz. Un changement exponentiel de variable permet des applications au problème des moments. — La publication analysée ici ne constitue que la première partie de l'article, d'autres applications figurent au sommaire.

G. Bourion.

Ragab, F. M.: Some formulae for the product of three modified Bessel-functions of the second kind. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 621—626 (1955).

Es werden die Integrale $\int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{k-1} K_l(\lambda) f(\lambda) d\lambda$,

$$f(\lambda) = \begin{cases} K_m(e^{i\tau} x\lambda^j) K_n(x\lambda^j) \\ K_m(x\lambda^j) K_n(x\lambda^j), \end{cases} \quad j = \pm 1,$$

ausgewertet und zwar mittels der E -Funktion bzw. verallgemeinerter hypergeometrischer Funktionen, die die Grundlage für die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Integrale bei großem $|x|$ bilden können.

O. Volk.

Kazarinoff, Nicholas D.: Asymptotic expansions for the Whittaker functions of large complex order m . Trans. Amer. math. Soc. 78, 305—328 (1955).

Asymptotic expression for the two Whittaker functions $M_{k,m}(x)$ and $W_{k,m}(x)$ with respect to the parameter m are given. It is supposed that x, k and m are complex and that k is bounded. The arguments of x and m are restricted to the respective regions $-\pi < \arg x \leq \pi$; $-\frac{3}{2}\pi < \arg m \leq \frac{3}{2}\pi$. The leading terms of asymptotic expansion are explicitly obtained and tabulated.

F. Oberhettinger.

Ragab, F. M.: Some formulae for the product of two Whittaker functions. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 430—434 (1955).

Vermöge bekannter Ergebnisse über E -Funktionen (vgl. T. M. MacRobert, Functions of a complex variable, dies. Zbl. 56, 291) werden Integrale ausgewertet, deren Integranden Produkte von Whittakerschen Funktionen und modifizierten Besselfunktionen enthalten.

E. Kreyszig.

Halphen, Étienne: Les fonctions factorielles. Avantpropos par G. Morlat. Note de M. P. Larcher. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 4, 21—39 (1955).

Ausführliche Darstellung der vom Verf. früher (dies. Zbl. 47, 71) im Auszug gegebenen Darlegungen über die von ihm eingeführten faktoriellen Funktionen mit

Erweiterungen, Ergänzungen und Anwendung in den Wahrscheinlichkeitsgesetzen *B* des Verf.; letztere ist von P. Larcher angefügt, während G. Morlat im Vorwort über E. Halphens Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie berichtet (vgl. zur Halphenschen Identität dies. Zbl. 51, 305). *O. Volk.*

Funktionentheorie:

Ricci, Giovanni: Su un problema di massimo per le funzioni maggioranti delle serie di potenze. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 609—613 (1955).

Die Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiere mindestens für $|z| \leq r$. Setzt man wie üblich

$$M_2(f; r) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \right]^{1/2}, \quad \mathfrak{M}(f; r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n,$$

so wird bewiesen, daß es keine Konstante $\gamma > 0$ gibt, mit der alle $f(z)$ die Bedingung $\mathfrak{M}(f; \gamma r) \leq M_2(f; r)$ erfüllen. Nach dieser negativen Feststellung folgen aber mehrere positive Aussagen. Zu ihrer Formulierung wird zusätzlich definiert: ist R der Konvergenzradius von $f(z)$ (der auch $+\infty$ sein kann), und ist $r > R$, so werde $\mathfrak{M}(f; r) = M_2(f; r) = +\infty$ gesetzt. Dann kommt Verfasser zu folgenden Ergebnissen: 1. Es existiert eine Konstante $\gamma > 0$ derart, daß für alle $f(z)$ und alle r stets $\mathfrak{M}(f; \gamma r) - |f(0)| \leq \{M_2^2(f; r) - |f(0)|^2\}^{1/2}$ gilt. 2. Diese Konstante ist genau $\gamma = 1/\sqrt{2}$. 3. Ist \mathfrak{C}_h ($h \geq 1$) die Klasse aller Funktionen $f(z) = \sum_{n=h}^{\infty} a_n z^n$ mit einer Nullstelle im Ursprung von mindestens h -ter Ordnung, so gilt für $f(z) \in \mathfrak{C}_h$ eine Konstante γ_h , und zwar die positive Wurzel der Gleichung $\gamma_h^{2h} + \gamma_h^h = 1$. *K. Bögel.*

Ricci, Giovanni: Una osservazione sulle funzioni maggioranti delle serie di potenze di norma finita. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 147—153 (1955).

Es bedeute \mathfrak{F}_2 die Klasse aller analytischer Funktionen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, deren Reihe mindestens für $|z| < 1$ konvergiert, und für welche außerdem die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ konvergent ist. Setzt man noch $\mathfrak{M}(f, r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$, so gilt für $f \in \mathfrak{F}_2$ die Beziehung $\lim_{r \rightarrow 1} \sqrt{1-r} \mathfrak{M}(f, r) = 0$ [Hardy, Quart. J. Math., Oxford Ser. 44, 147—160 (1913)]. Verf. betrachtet nun Ausdrücke von der Form $F(r) = \sqrt{(1-r) \varphi(1/(1-r))} \mathfrak{M}(f; r)$, in denen $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$ ist, und beantwortet drei von ihm selbst gestellte Fragen dahingehend: a) Zu jeder (noch so langsam divergierenden) Funktion $\varphi(t)$ gibt es eine Funktion $f \in \mathfrak{F}_2$, für welche $\limsup_{r \rightarrow 1-} F(r) = +\infty$ ist. b) Ist $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t\varphi(t)}$ divergent, so ist $\liminf_{r \rightarrow 1-} F(r) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{F}_2$. c) Ist $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t\varphi(t)}$ konvergent, so existieren Funktionen $f \in \mathfrak{F}_2$, für welche $\lim_{r \rightarrow 1-} F(r) = +\infty$ ist. *K. Bögel.*

Ricci, Giovanni: Emisimmetria di tratti e teorema di Vivanti-Pringsheim-Hadamard-Fabry relativo ai punti critici. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 126—135 (1954).

Die Lückensätze von Hadamard und Fabry besagen, daß eine Potenzreihe, wenn die Folge ihrer Koeffizienten genügend lange Serien von Nullen aufweist, den Konvergenzkreis zur natürlichen Grenze hat. Statt der Nullen dürfen natürlich auch

von Null verschiedene Koeffizienten stehen, falls die mit ihnen gebildete Potenzreihe einen größeren Konvergenzradius hat; das ist trivial. Aber schon Fabry hat die Lücken auch mit nichttrivialen Koeffizienten ausgefüllt und für sie Bedingungen angegeben, unter denen der Schnittpunkt des Konvergenzkreises mit der positiven Achse sicher singulär ist. Verf. erreicht dasselbe, indem er die Lücken mit Koeffizienten ausfüllt, die etwas modifizierten Bedingungen genügen und insbesondere gewisse Symmetrien aufweisen. Die Beweismethode orientiert sich hauptsächlich an E. Landau (Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1929). *O. Perron.*

Ricci, Giovanni: Variazioni di segno condizionate e teorema di Fabry. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 38, 1—31 (1955).

Ricci, Giovanni: Fluttuazione relativa e punti singolari delle serie di potenze. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 88 (III. Ser. 19), 3—24 (1955).

In diesen beiden Arbeiten kreisen die Gedanken des Verfs. ähnlich wie in einer früheren (s. vorstehendes Referat) wieder um den Hadamard-Fabryschen Lückensatz und orientieren sich an der Darstellung von E. Landau (Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1929). Die Lücken zwischen den Hauptkoeffizienten werden mit Gliedern ausgefüllt, die etwas allgemeiner sind als bei Fabry-Landau. Verhältnismäßig einfach ist das in der zweiten Arbeit enthaltene Kriterium: Für die Potenzreihe $\sum a_n z^n$ mit dem Konvergenzradius 1 ist der Punkt $z = 1$ sicher singulär, wenn die Koeffizienten den folgenden Bedingungen genügen: Es gibt eine Indexfolge n_1, n_2, \dots und eine Zahl ϑ zwischen 0 und 1 derart, daß (1) $\lim_{h \rightarrow \infty} |a_{n_h}|^{1/n_h} = 1$ und daß (2) $\lim_{h \rightarrow \infty} n_h^{-1} \cdot$

$\sum_m |\arg a_{m+1} - \arg a_m| = 0$ ist, wobei die Summe sich über alle Indizes m des Intervalles $(1 - \vartheta) n_h < m < (1 + \vartheta) n_h$ erstreckt. Das ist eine Verallgemeinerung des bekannten Kriteriums, bei dem an Stelle von (2) die stärkere Forderung $\lim_{m \rightarrow \infty} (\arg a_{m+1} - \arg a_m) = 0$ tritt. Die anderen Kriterien sind wesentlich unständlicher, und zwar werden in der ersten Arbeit die bei Landau-Fabry auftretenden Vorzeichenwechsel der Realteile von $a_m e^{-i \gamma_n}$, wenn m das obige Intervall durchläuft, durch etwas Allgemeineres und wesentlich Komplizierteres ersetzt, was Verf. als φ_h -Variationen bezeichnet, und in der zweiten Arbeit durch „Fluktuationen“, was ein noch etwas allgemeinerer und komplizierterer Begriff ist. *O. Perron.*

Korevaar, Jacob: Entire functions as limits of polynomials. Lectures on Functions of a complex Variable, 421—423 (1955).

Vergleiche die Besprechung der ausführlichen Veröffentlichung, dies. Zbl. 56, 293. *H. Grunsky.*

Rahman, Q. I.: A note on entire functions (defined by Dirichlet's series) of perfectly regular growth. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 6, 173—175 (1955).

Für ganze Funktionen $f(s)$, gegeben durch $f(\sigma + i t) = \sum_1^\infty a_n e^{s \lambda_n}$, wird die dem Zentralindex entsprechende Größe $\lambda_{\nu(\sigma)}$ mit $M(\sigma) = \overline{\lim} |f(\sigma + i t)|$ verglichen. *H. Wittich.*

Crum, M. M.: Note on functions of exponential type in a half-plane. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 6, 283—287 (1955).

Sia $f(z)$ analitica nel semipiano $\Re z \geq 0$, e verifichi ivi la relazione $\log |f(z)| \leq c \Re z$ (per un certo c reale). Sia $\{\zeta_n\}$ una successione di numeri complessi verificante le seguenti condizioni: (a) la serie $\sum (\Re \zeta_n)^2 / |\zeta_n|^3$ diverge; (b) esiste un numero positivo B tale, che per ogni numero complesso z e per ogni numero positivo t la disuguaglianza $|\zeta_n - z| < t$ non è verificata da più di $1 + B t$ termini della successione $\{\zeta_n\}$. L'A. dimostra che, se per ogni n si verifica la disuguaglianza $\log |f(\zeta_n)| \leq a \Re \zeta_n$ (a reale e minor di c), allora si ha $\log |f(z)| \leq a \Re z$ in tutto il semipiano

$\Re z \geq 0$. La dimostrazione si basa su un teorema di rappresentazione di Nevanlinna e su un teorema di Carleman. I risultati di questa nota vanno messi in relazione con il teorema „dei momenti limitati“ di Mikusiński e Ryll-Nardzewski, e con il teorema di Titchmarsh sul prodotto integrale. *F. Bertolini.*

Tomić, M.: Remarque sur les zéros d'une classe des fonctions méromorphes. Srpska Akad. Nauka, Zbornik Radova 43, mat. Inst. 4, 73—80, französ. Zusammenfassg. 80 (1955) [Serbisch].

Unter Benutzung der geometrischen Methode zur Untersuchung der Eigenschaften der Transformationen $1/z$ beweist Verf. die folgenden Sätze für die Verteilung der Nullstellen der meromorphen Funktionen der Art (1) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{A_n}{z - a_n} + \lambda_n \right)$: (I) Wenn $a_n \leq a_{n+1}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $A_i > 0$, $i = k-1, k-2, k-3, \dots$, $A_l < 0$, $l = k, k+1, k+2, \dots$ und $\lambda_n \geq 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, so haben die Funktionen (1) keine komplexe Nullstelle. (II) Die meromorphe Funktion

$$\dots + \frac{A_2}{z + a_2} + \frac{A_1}{z + a_1} - \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z - a_1} + \frac{A_2}{z - a_2} + \dots$$

worin $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$, $A_0 > A_i$, $A_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$ hat außer rein imaginären keine anderen komplexen Nullstellen. (III) Wenn $A_n \geq 0$, $\lambda_n \geq 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ und alle a_n auf einer, der reellen Achse nicht parallelen Geraden liegen, so liegen alle Nullstellen der Funktion (1) in der Halbebene rechts von dieser Geraden. Als Folgerungen werden manche bekannten Ergebnisse hergeleitet.

L. Ilieff.

Bagemihl, F. and W. Seidel: Some remarks on boundary behavior of analytic and meromorphic functions. Nagoya math. J. 9, 79—85 (1955).

Die Verf. geben explizit, in Form eines unendlichen Produktes, eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$ an, für die für jedes ϑ gilt: Auf fast allen in $e^{i\vartheta}$ mündenden Sehnen strebt $f(z) \rightarrow \infty$ bei $z \rightarrow e^{i\vartheta}$. Die Aussage über die Existenz einer gewissen in $|z| < 1$ meromorphen Funktion, die man erhält, wenn man $g(z) = 1/f(z)$ betrachtet, ist interessant im Hinblick auf einen Satz von K. Meier [Commentarii math. Helvet. 24, 238—259 (1950; dies. Zbl. 41, 52, 661), insbesondere S. 241], der insbesondere besagt, daß jene Existenzaussage falsch wird, wenn man „meromorph“ durch „regulär“ ersetzt. — Ferner wird gezeigt, daß es eine Menge von Spiralen in $|z| < 1$ gibt, die dieses Gebiet einfach überdecken, und sich an $|z| = 1$ asymptotisch annähern, derart, daß längs jeder derselben $f(z) \rightarrow \infty$ bei $|z| \rightarrow 1$ gilt. Daß die Aussage nicht richtig bleibt, wenn man die Menge der Spiralen ersetzt durch eine Menge von Kurven, deren jede in einem Punkt von $|z| = 1$ endet und die $|z| < 1$ einfach überdecken, folgt aus einem allgemeinen Einzigkeitssatz über meromorphe Funktionen, der aus einem von den Verff. früher fruchtbar gemachten Beweisprinzip (dies. Zbl. 53, 45, insbesondere Satz 2) erschlossen wird. *H. Grunsky.*

Constantinescu, Corneliu: Quelques applications du principe de la métrique hyperbolique. Acad. Republ. popul. Romîne, Studii Cerc. mat. 6, 529—566, russ. u. französ. Zusammenfassg. 565—566 (1955) [Rumänisch].

Die Arbeit enthält zahlreiche Anwendungen des Prinzips des hyperbolischen Maßes. So gibt Verf. zuerst einen einfachen Beweis des großen Theorems von Picard. Dann untersucht er das hyperbolische Maß des zu den Punkten a, b, c komplementären Gebietes $D(a, b, c)$. Diese Punkte werden veränderlich angenommen, doch soll ihre gegenseitige Entfernung größer als eine beliebige positive Zahl sein. Weiter definiert der Verf. die Zerstreung eines Systems von drei Punkten a, b, c ,

$$\varepsilon(a, b, c) = \min \{ \varrho(a, b), \varrho(b, c), \varrho(c, a) \},$$

wo ϱ die sphärische Entfernung auf der Riemannschen Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}$ ist, und die Zerstreung der abgeschlossenen Menge F , $\varepsilon(F) = \sup \varepsilon(a, b, c)$, wo a, b, c drei Punkte von F sind. Durch eine untere Abschätzung der hyperbolischen Metrik

$d\sigma_z$ für $D(a, b, \infty)$ wird das Julia'sche Theorem bewiesen und verallgemeinert. Es sei D ein Gebiet mit mindestens drei Randpunkten, $d\sigma_z$ die hyperbolische Metrik von D , ds_z die sphärische Metrik und $I(z, CD) = d\sigma_z/ds_z$. Mit Hilfe einer unteren Abschätzung von $I(z, CD)$ werden verschiedene Sätze über die Überdeckungen durch die im Einheitskreise meromorphen Funktionen bewiesen. Als Spezialfall enthalten diese Resultate die Theoreme von Koebe und Berman. Dann untersucht der Verf. die Abhängigkeit der Funktion I von dem Gebiete D . Es sei F eine abgeschlossene Menge mit mindestens drei Randpunkten. Wenn die D_n die zusammenhängenden Komponenten der zu F komplementären Menge sind, so ist definitionsgemäß $I(z, F) = I(z, CD_n)$ für $z \in D_n$, und $I(z, F) = \infty$ für $z \in F$. Falls F höchstens zwei Punkte enthält, gilt $I(z, F) = 0$. Jeder abgeschlossenen Menge F entspricht auf diese Weise eine Metrik auf der komplexen Kugel. $I(z, F)$ ist eine stetige Funktion von F , und die Stetigkeit ist in bezug auf F gleichmäßig, wenn $\varepsilon(F) \geq \varepsilon$. Die Variation der Menge F wird durch die gegenseitige Abweichung gemessen. Die Abweichung der Menge A in bezug auf B ist die kleinste Zahl α , so daß jeder Punkt aus A eine Entfernung von B kleiner als α hat. Die gegenseitige Abweichung zwischen A und B ist die größte der Abweichungen von A in bezug auf B und von B in bezug auf A . Daraus folgen die Sätze von Landau und Schottky in einer präzisierten Form. Zum Beispiel beweist Verf. in bezug auf den Landauschen Satz, daß die obere Grenze des Radius des Kreises $|t| < R$, in dem eine meromorphe Funktion $n \geq 3$ Werte ausläßt, nur von der Zerstreuung dieser Werte und von der sphärischen Ableitung der Funktion in $t = 0$ abhängt. — Es seien a, b, c die Eckpunkte eines Dreiecks und $l_1 \leq l_2 \leq l_3$ die euklidischen Längen seiner Seiten. Dann ist:

$$I[\infty, D(a, b, c)] \geq \min [B l_3 / \log (l_2 / l_1), B l_3],$$

wo B eine positive, absolute Konstante ist. Mit diesem Hilfssatz stellt der Verf. Eigenschaften der Mengen von ausgelassenen Werten einer in $|t| < 1$ meromorphen Funktion $z = f(t)$, mit $f(0) = 0$ und $|f'(0)| = 1$, fest. So wird ein von Valiron früher erlangtes Resultat präzisiert. — Es sei D ein Gebiet, z_0 ein Randpunkt von D , A und B Teilmengen von D , für die z_0 Häufungspunkt ist. Bezeichnen wir, für jede Menge M mit $M_r = M \cap (|z - z_0| < r)$, mit $\alpha_{D_{r_0}}(A_r, B)$ die in der Metrik von D_{r_0} gemessene Abweichung der Menge A_r in bezug auf B und mit

$$\alpha(A, B) = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left[\lim_{r \rightarrow 0} \alpha_{D_{r_0}}(A_r, B) \right].$$

Ebenso, sei $f(z)$ eine in D meromorphe Funktion und E eine Teilmenge von D , für die z_0 Häufungspunkt ist. Dann ist $S_{z_0}^{(E)} = \bigcap_{r>0} f(E_r)$ und $R_{z_0}^{(E)} = \bigcap_{r>0} f(E_r)$. Mit diesen Bezeichnungen erweitert der Verf. das Prinzip des hyperbolischen Maßes für den Rand des Gebietes folgendermaßen:

$$\alpha'(S_{z_0}^{(A)}, S_{z_0}^{(B)}) \leq \alpha(A, B),$$

wo $\alpha'(S_{z_0}^{(A)}, S_{z_0}^{(B)})$ die in der zu $\overline{CR_{z_0}^{(B)}}$ entsprechenden Metrik gemessene Abweichung der Menge $S_{z_0}^{(A)}$ in bezug auf $S_{z_0}^{(B)}$ ist. Mit Hilfe dieses erweiterten Prinzips studiert der Verf. die in der oberen Halbebene meromorphen Funktionen. Er führt folgende Definition ein: Der Randpunkt z_0 von D heißt einsam, wenn $l(z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\inf_{\lambda} l_r(\lambda) \right] < \infty$, wo λ eine in D_r liegende, geschlossene Kurve ist, die z_0 umschließt und $l_r(\lambda)$ die in der Metrik von D_r gemessene Länge von λ ist. Die Arbeit enthält verschiedene Sätze über die einem einsamen Punkte entsprechenden, asymptotischen Werte einer meromorphen Funktion. Zum Beispiel: Es sei $f(z)$ eine im Gebiete D meromorphe Funktion und z_0 ein einsamer Randpunkt von D , in deren Umgebung $f(z)$ mindestens drei Werte ausläßt. Ist einer dieser Werte asymptotisch in z_0 , so ist er der einzige asymptotische Wert. Die Resultate werden dann in der Wertverteilungstheorie angewandt. So ergeben sich verschiedene Sätze, von

denen wir zitieren: Eine meromorphe Funktion, deren charakteristische Funktion die Beziehung $\lim_{r \rightarrow \infty} T(r)/(\log r)^2 < \infty$ befriedigt, hat höchstens einen asymptotischen Wert. — Schließlich wird eine Ungleichung über das Maximum und Minimum der harmonischen Funktionen bewiesen. Weitere Anwendungen des hyperbolischen Maßes finden sich in einer späteren Arbeit desselben Verf. (s. dies. Zbl. 71, 67, 2. Referat).

C. Andreian-Cazacu.

Čao, T. I.: Über ganze algebraische Funktionen mit zwei Zweigen. Mat. Sbornik, n. Ser. 37 (79), 573—576 (1955) [Russisch].

The author has given a theorem concerning integral algebroid functions of two branches in this paper, but the Russian translator (not the author himself) has mistaken the terminology „algebroid“ to „algebraic“ in the topic and also in the whole paper. Let $F(x, y) = x^2 + 2a_1(y)x + a_2(y)$ (being irreducible), where $a_1(y)$ and $a_2(y)$ are integral functions of the complex variable y degenerated or non when at least one of the two $a_1(y)$, $a_2(y)$ is non degenerated, then the multiple valued analytic function $x(y)$ defined by $F(x, y) = 0$ is called non-degenerated integral algebroid function of two branches. This is the principal subject investigated by the author. In his thesis published in 1928, the author has begun the theory of the inverse functions of integral algebraic functions of two branches. In the present paper, the author by discussing the expression $\sqrt{a_1^2(y) - a_2(y)}$ precisely, has established that, if a branch $x_1(y)$ of the function $x(y)$ is holomorphic and taking the value α at ∞ on the Riemann surface, then either α is the limit of the double points of the analytic curve defined by the equation $F(x, y) = 0$, or α is an asymptotic value of the other branch $x_2(y)$. It is important to generalize this result to the case of integral algebroid functions of n branches.

Lee Kwok-ping.

Lebedev, N. A.: Einige Abschätzungen für Funktionen, die in einem Kreise regulär und schlicht sind. Vestnik Leningradsk. Univ. 10, Nr. 11 (Ser. mat. fiz. chim. 4) 3—21 (1955) [Russisch].

Mit Hilfe der Löwnerschen Methode löst Verf. eine Reihe extremaler Aufgaben in der Theorie der im Kreise $|z| < 1$ schlichten Funktionen. Er bestimmt bei festem z im Kreise $|z| < 1$ den Wertebereich des Systems $[\alpha, \ln(f(z)/z)]$ für die Funktionen (1) $f(\zeta) = \alpha\zeta + \alpha_2\zeta^2 + \dots$, die im Kreise $|\zeta| < 1$ schlicht sind und für die $|f(\zeta)| < 1$ gilt. Es werden ferner auch die Wertebereiche von $\ln(zf'(z)/f(z))$, $\ln(\alpha z^2 f'(z)/f^2(z))$ und $\ln(\alpha f'(z))$ für die Funktionen (1), bei denen $|f(\zeta)| < 1$ gilt und $|f(z)|$ im festen Punkte z einen gegebenen Wert besitzt, bestimmt.

L. Ilieff.

Jenkins, James A.: On circumferentially mean p -valent functions. Trans. Amer. math. Soc. 79, 423—428 (1955).

$f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \dots$, $|z| < 1$ und $p \geq 1$ eine natürliche Zahl, gehört zur Klasse F_p , wenn die auf der von $f(z)$ erzeugten Riemannschen Fläche über $|w| = r$ gelegenen Bögen für alle $r > 0$ höchstens die Länge $2\pi pr$ haben. Für $f(z) \in F_p$ gilt $|a_{p+2}/p + (1/p - 1)a_{p+1}^2/2p| \leq 3$ und $|a_{p+2}| \leq 2p^2 + p$. Die Beweismittel wurden bereits in einer früheren Arbeit des Verf. entwickelt (dies. Zbl. 53, 49).

H. Wittich.

Hayman, W. K.: The asymptotic behaviour of p -valent functions. Proc. London math. Soc., III. Ser. 5, 257—284 (1955).

Betrachtet werden die Funktionen (1) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < 1$, und (2) $f(z) = z^\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $r_0 < |z| < 1$ und $0 \leq \mu < 1$. Die Gesamtlänge der über $|w| = R$ auf der von $f(z) = w$ erzeugten Riemannschen Fläche gelegenen Bögen sei $2\pi R p(R)$ (falls $f(z)$ mehrdeutig ist, wird ein im radial zerschnittenen Kreisring eindeutiger Zweig betrachtet). $f(z)$ heißt im Mittel p -wertig, wenn für festes $p > 0$ und für

$0 < R < \infty$ $p(R) \leq p$ gilt. Verf. untersucht für diese Funktionen das asymptotische Verhalten der Koeffizienten a_n und der Größen $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$,

$J_1(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})| d\varphi$. Im Falle (2) existiert der endliche Grenzwert $\alpha = \lim_{r \rightarrow 1} (1-r)^{2p} M(r, f)$, wobei für $p > \frac{1}{4}$ die Relation $\lim_{r \rightarrow 1} |a_n|/n^{2p-1} = \alpha/\Gamma(2p)$ besteht. Weiter gilt für diese Klasse bei $r \rightarrow 1$

- (1) $J_1(r, f) = O(1)$, für $p < \frac{1}{2}$,
- (2) $J_1(r, f)/\log(1/(1-r)) \rightarrow \alpha/\pi$, für $p = \frac{1}{2}$,
- (3) $J_1(r, f)(1-r)^{2p-1} = \alpha \Gamma(p - \frac{1}{2})/2 \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(p)$ für $p > \frac{1}{2}$.

Eine asymptotische Beziehung für a_n gibt Auskunft über das Verhalten von $|a_n|$ und $\arg a_n$ bei $n \rightarrow \infty$. H. Wittich.

Rudin, Walter: *Analytic functions of class H_p* . Lectures on Functions of a complex Variable, 387—397 (1955).

In $U: |z| < 1$ bezeichnet H_p ($0 < p < \infty$) die Klasse der dort analytischen Funktionen mit beschränktem $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta$. Die Definition läßt sich auf eindeutige Funktionen in einem beliebigen Gebiet D ausdehnen, am einfachsten in der Form: $f(z) \in H_p(D)$ genau dann, wenn $|f(z)|^p$ in D eine harmonische Majorante $u(z)$ besitzt. Gilt dies für $\log^+ |f|$, so spricht Verf. von der Klasse $\text{Log}^+(D)$, $H_\infty(D)$ ist die Klasse der beschränkten Funktionen. Durch $\|f\|_p = (u(t))^{1/p}$ ($t \in D$, fest) wird bei $p \geq 1$ eine Norm definiert, H_p ist ein Banachraum; bei $0 < p < 1$ erhält man einen vollständigen, separablen, linearen Hausdorff-Raum, wenn man $\|f\|_p$ in naheliegender Weise zur Umgebungsdefinition verwendet. Allgemeine Begriffe und Sätze aus der Theorie dieser Räume werden übertragen, Beziehungen zwischen $H_p(D)$ und $H_p(U)$ aufgestellt. [Betr. $H_p(U)$ vgl. S. S. Walters, dies. Zbl. 40, 62; 43, 113.] Probleme aus $H_p(U)$ und $H_\infty(D)$ werden übertragen; so insbesondere das Problem des „Schwarzschen Lemmas“ in $H_1(D)$, das von Ref. (dies. Zbl. 24, 222; 28, 405), Ahlfors (dies. Zbl. 30, 30), Garabedian (dies. Zbl. 35, 54) u. a. in $H_\infty(D)$ untersucht worden war. Methodisch schließt sich Verf. an Garabedian an. — Die Beweise sind nur skizziert. H. Grunsky.

Shapiro, Harold S.: *Applications of normed linear spaces to function-theoretic extremal problems*. Lectures on Functions of a complex Variable, 399—404 (1955).

Eine ausführliche Darstellung der (nach derselben Methode) unabhängig vom Verf. auch von W. W. Rogosinski gefundenen Hauptergebnisse der in dies. Zbl. 51, 56 besprochenen Arbeit. H. Grunsky.

Sario, Leo: *Functionals on Riemann surfaces*. Lectures on Functions of a complex Variable, 245—256 (1955).

Verf. betrachtet auf einer offenen Riemannschen Fläche W die Klasse C aller eindeutigen harmonischen Funktionen $p(z)$ mit einer endlichen Anzahl q von (allen Funktionen aus C gemeinsamen) Singularitäten z_k mit Entwicklungen der Form

$$p = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} a_v^{(k)} z^v + \lambda \sum_{v=1}^m b_v^{(k)} z^{-v} \right\} + \lambda c^{(k)} \log \frac{1}{|z|}.$$

z bezeichnet dabei einen uniformisierenden Parameter für die Umgebung der betrachteten Singularität, die $b_v^{(k)}$ (komplex) und $c^{(k)}$ (reell) sind innerhalb C fest, λ ist ein reeller Parameter; die zu einem festen λ gehörige Teilklasse heiße C_λ . In C wird das Funktional betrachtet:

$$m(W, p) = \int_{\beta} p dp^* + 2\pi(h-k) \sum_k \operatorname{Re} \left(c^{(k)} a_0^{(k)} + \sum_{v=1}^m v b_v^{(k)} a_v^{(k)} \right).$$

β bezeichnet den idealen Rand von W , p^* die zu p konjugierte Funktion, h, k zwei Parameter mit $h + k = \lambda$. Gefragt wird nach $\min_{p \in C_\lambda} m(W, p)$. Dieses Problem ist

eine Zusammenfassung und vielseitige Verallgemeinerung einer Reihe von Extremalproblemen in schlichten Gebieten. Sind z. B. bei schlichtartigem W nur zwei Singularitäten zugelassen, für die alle $b_p^{(k)} = 0$ sind und ist $c^{(1)} = 1$, $c^{(2)} = -1$, so wird man auf Probleme geführt, als deren Lösungen Kreisbogenschlitzabbildungen T_1 bzw. Radialschlitzabbildungen T_2 von W erscheinen, oder die Funktionen $\sqrt{T_1 T_2}, \sqrt{T_1/T_2}$ (vgl. Ref., dies. Zbl. 5, 362). In ähnlicher Weise erscheinen bei $c^{(k)} = 0$ die Realteile von Parallelschlitzabbildungen (die schlicht sein können: $q = m = 1$, oder nicht) und ihre Linearkombinationen als Extremalfunktionen (vgl. Ref., dies. Zbl. 22, 151). Verschiedene Stufen der Verallgemeinerung werden aus einem umfassenden Satz hergeleitet [vgl. Verf., Trans. Amer. math. Soc. 79, 362—377 (dies. Zbl. 66, 58), insbes. S. 366]. Ein entsprechender Satz bei $\sum c^{(k)} \neq 0$ wird hier bewiesen.

H. Grunsky.

Sario, Leo: Positive harmonic functions. Lectures on Functions of a complex Variable, 257—263 (1955).

Es bezeichne O_F die Klasse der Riemannschen Flächen, auf denen es keine nicht konstante Funktion $f \in F$ gibt, wo F eine gewisse Funktionsklasse bedeutet. G, HB, HP, HD bezeichne bzw. die Klassen der Greenschen, der beschränkten harmonischen, der positiv harmonischen Funktionen, der harmonischen Funktionen (mit endlichem Dirichletintegral. Dann ist bekannt: $O_G \subset O_{HP} \subset O_{HB}$. Verf. zeigt (in anderer Weise als Tôki in einer während der Drucklegung der vorliegenden erschienenen Arbeit: dies. Zbl. 51, 62), daß es sich hier beide Male um echte Teilmengen handelt. Er konstruiert zu diesem Zweck eine hyperbolische Riemannsche Fläche (die also eine Greensche Funktion besitzt), auf der jede Funktion $u \in O_{HP}$ eine und dann auch unendlich viele Symmetrieachsen hat und damit konstant ist; es folgt $O_G \neq O_{HP}$. Tilgung eines inneren Punktes dieser Fläche gibt ein Beispiel, das $O_{HP} \neq O_{HB}$ belegt. Schließlich wird noch ein Beweis für die Echtheit der Teilmengenbeziehung $O_{HB} \subset O_{HD}$ in Vereinfachung eines solchen von Tôki gegeben (dies. Zbl. 48, 59). H. Grunsky.

Kusunoki, Yukio: Note on the continuation of harmonic and analytic functions. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 29, 11—16 (1955).

Bemerkungen zu der Frage, wann eine Punktmenge E auf einer Riemannschen Fläche F hebbbar ist für die auf $F - E$ definierten Funktionsklassen HB, HD, AB oder AD .

H. Wittich.

Heins, Maurice: Remarks on the elliptic case of the mapping theorem for simply-connected Riemann surfaces. Nagoya math. J. 9, 17—20 (1955).

Detaillierte Konstruktion einer auf einer kompakten einfach-zusammenhängenden Riemannschen Fläche harmonischen Funktion mit dem Hauptteil $\Re[\alpha/t(p)]$, $t(p)$ Ortsuniformisierende im Flächenpunkt p_0 , nach der Perronschen Methode. Auf diese Konstruktion hatte Verf. bereits früher (dies. Zbl. 37, 55) hingewiesen.

H. Wittich.

Heins, Maurice: Lindelöfian maps. Ann. of Math., II. Ser. 62, 418—446 (1955).

Ce Mémoire est la suite d'un travail antérieur de l'A. (ce Zbl. 65, 311). Les deux surfaces de Riemann F et G , la première représentée par f conformément dans l'autre, ne sont plus ici supposées nécessairement à frontière > 0 . Si notamment F seule est à frontière > 0 , les représentations pour lesquelles on a $S(p, q) = \sum_{f(r)=q} n(r) \mathfrak{G}_F(p, r) < +\infty$ sont appelées „Lindelöfian Maps“ (LM). Elles constituent une généralisation des fonctions méromorphes dans $|z| < 1$ à caractéristique bornée. — Au moyen d'une fonction auxiliaire $D(s, q_1, q_2)$ harmonique en s et ayant des singularités logarithmiques positive et négative en q_1 et q_2 respectivement, l'A. étend le premier théorème fondamental de Nevanlinna au cas de f , ainsi que le théorème de Riesz-

Frostman-Nevanlinna. Parmi les très nombreux résultats de l'A. citons: Si f est de type Bl et h est (LM), où $h = g \circ f$, avec g représentation conforme de G dans H (surf. de Riemann à frontière nulle), alors g est (LM). De même: si g est (LM) il en est de même de h et si h est (LM) il en est de même de f . Si O_L désigne la classe de surfaces de Riemann qui n'admettent pas de fonction méromorphe (LM) on a:
 $O_{HB} \subsetneq O_L \subsetneq O_{AB}$.
S. Stoilow.

Radojčić, M.: Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen nach algebraischen oder gewissen endlich vieldeutigen transzendenten Funktionen. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 8, 93—122 (1955).

Ist R irgendeine Riemannsche Fläche, so heißt R grenzweise in einer Folge $\{A_n\}$ von kompakten Riemannschen Flächen enthalten, wenn es zu jeder relativ-kompakten offenen Teilmenge R' von R ein n_0 gibt, so daß für alle $n \geq n_0$ jeweils R' zu einer offenen Menge von A_n konform äquivalent ist. Zu jeder Riemannschen Fläche R gibt es eine Folge $\{A_n\}$ von kompakten Riemannschen Flächen, so daß R grenzweise in $\{A_n\}$ enthalten ist; ist insbesondere R eine Teilfläche einer kompakten Riemannschen Fläche A , so ist R grenzweise in der konstanten Folge $\{A_n\} = \{A\}$ enthalten. Verf. hat früher bewiesen: Ist G das Holomorphiegebiet einer analytischen Funktion f , und ist $G' \subset G$ grenzweise in der Folge $\{A_n\}$ von kompakten Riemannschen Flächen A_n enthalten, so gibt es eine Folge $\{a_n\}$ von algebraischen Funktionen a_n , wobei A_n jeweils die Riemannsche Fläche von a_n ist, so daß die a_n in G' kompakt gegen f konvergieren. Diese Aussage läßt sich verschärfen; Verf. zeigt z. B., daß man an die Pole der meromorphen Funktionen a_n noch gewisse Zusatzforderungen stellen kann. Mittels der so gewonnenen Verallgemeinerungen des klassischen Rungeschen Approximationssatzes werden Existenzsätze vom Mittag-Lefflerschen und Weierstraßschen Typus hergeleitet. Verf. betont dabei, daß seine Beweismethode nur „einfachste“ Mittel benutzt, da im Prinzip nur algebraische Funktionen in die Konstruktionen eingehen.

R. Remmert.

Andreian Cazacu, Cabiria: Rapports entre les surfaces riemanniennes normalement exhaustibles et les surfaces riemanniennes algébriques qui se rapprochent de $\infty : A_\infty$. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 7, 529—542, russ. u. französ. Zusammenfassg. 540—541 (1955) [Rumänisch].

Eine ausführliche Untersuchung über die Verhältnisse zwischen normal ausschöpfbaren Riemannschen Überlagerungsflächen (N. A.) (Stoilow, dies. Zbl. 22, 366) und Flächen vom Typus A_∞ [Volkovyskij, Trudy mat. Inst. Steklov 34 (1950)]. Es zeigt sich, daß die (N. A.) von erster Art (d. h. mit einem einzigen lakunären Punkt) immer vom Typus A_∞ sind, daß also das parabolische Kriterium von Volkovyskij hier anwendbar ist. Die Flächen A_∞ sind entweder (N. A.) oder sie können durch „partiell reguläre“ Gebiete (S. Stoilow, Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, 2^{ème} éd., Paris 1956, chap. VI) ausgeschöpft werden. Andererseits sind die A_∞ -Flächen immer regulär ausschöpfbar (im Sinne von Ahlfors). Für den A_∞ -Typus von Flächen wird festgestellt, daß die Maximalzahl der vollständig verzweigt überdeckten Scheiben ≤ 3 ist, und daß dieses Maximum erreicht werden kann. Bemerkung: In der französischen Übersetzung des Titels der Arbeit müssen zwischen den Wörtern „riemanniennes“ und „algébriques“, die Wörter: „à points de ramification“ eingeschaltet werden.

S. Stoilow.

Andreian Cazacu, Cabiria: Le théorème d'Iversen pour des surfaces riemanniennes normalement exhaustibles. Comun. Acad. Republ. popul. Romîne 5, 1145—1150, russ. u. französ. Zusammenfassg. 1148—1149 (1955) [Rumänisch].

Anwendungen von Definitionen und Ergebnissen von Stoilow (dies. Zbl. 49, 63) auf normal ausschöpfbare Riemannsche Flächen (Stoilow, dies. Zbl. 22, 366). Es werden verschiedene Eigenschaften der Grenzelemente im Zusammenhang mit der Überlagerung bei normal ausschöpfbaren Riemannschen Flächen festgestellt.

S. Stoilow.

Andreian Cazacu, Cabiria: Sur la classe des surfaces de Riemann normalement exhaustibles et ses relations avec d'autres classes. C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 2281—2283 (1956).

Mitteilung der in den beiden vorstehend referierten Arbeiten erhaltenen Resultate. *S. Stoilow.*

Rauch, H. E.: On the transcendental moduli of algebraic Riemann surfaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 42—49 (1955).

Rauch, H. E.: On moduli in conformal mapping. Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 176—180 (1955).

Rauch, H. E.: On the moduli of Riemann surfaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 236—238; Errata. Ibid. 421 (1955).

Let S be a compact Riemann surface of genus p , a_i, b_i $i = 1, \dots, p$ retrosections, and $d\zeta_i$ differentials of the first kind with $\int_{a_i} d\zeta_j = \delta_{ij}$. Then the periods $\pi_{ij} = \int_{b_i} d\zeta_j$ are known to be a set of moduli for S but their number is too great.

It is a classical problem to find for $p > 1$ exactly $3p - 3$ moduli determining S . In the first of these papers the author asserts but gives a false proof of the following proposition for the non-hyperelliptic case: Let a set I of $3p - 3$ pairs of indices (i, j) be chosen so that the quadratic differentials $d\zeta_i d\zeta_j$, $(i, j) \in I$, form a basis for the holomorphic quadratic differentials on S . Then the corresponding π_{ij} will serve as moduli for S . The author attempts to prove this by showing that if one has a homeomorphism h of S onto S' such that relative to corresponding retrosections on S' , $\pi_{ij} = \pi'_{ij}$ for $(i, j) \in I$, then there is a mapping homotopic to h which is conformal. This is false. The reviewer has shown that a surface of genus ≥ 2 has homeomorphisms onto itself which carry any set of retrosections into a homologous set but which can not be homotopic to any conformal transformation. Since the periods depend only on the homology classes of the retrosections, taking $S = S'$ and h such a homeomorphism, one has $\pi_{ij} = \pi'_{ij}$ for all i and j , but the conclusion still fails. — In the second paper the author extends his „main theorem“ to surfaces with boundaries by considering their doubles, and in the third paper considers the hyperelliptic case. The last paper, Errata, corrects some trivial errors in the third but not the major error in the proof of the main theorem of the first paper.

M. Gerstenhaber.

Royden, H. L.: Conformal deformation. Lectures on Functions of a complex Variable, 309—313 (1955).

Der vom Verf. an anderer Stelle bewiesene Satz, daß konforme Isotopie und Homotopie zusammenfallen (dies. Zbl. **58**, 65; für die Erklärung der benutzten Begriffe vgl. dieses Referat), wird in der Weise verallgemeinert, daß an Stelle des mehrfach punktierten z -Einheitskreises und der entsprechend vielfach punktierten w -Ebene Gebiete endlicher Zusammenhangszahl treten, wobei ein Paar entsprechender Randkomponenten aus Punkten besteht. — Außerdem finden sich einige allgemeine Bemerkungen zu dem Problemkreis.

H. Grunsky.

Titus, C. J.: The image of the boundary under a local homeomorphism. Lectures on Functions of a complex Variable, 433—435 (1955).

Ein das folgende Problem betreffender Satz wird angekündigt: Gegeben eine stetige Abbildung eines Kreisrandes auf eine orientierte Kurve. Unter welchen Bedingungen läßt sie sich zu einer in der Kreisscheibe holomorphen Funktion fortsetzen?

H. Grunsky.

Baum, Walter: A topological problem originating in the theory of Riemann surfaces. Lectures on Functions of a complex Variable, 405—407 (1955).

Hersch, Joseph: Sur une forme générale du théorème de Phragmén-Lindelöf. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 641—643 (1953).

Verf. gibt hier eine einfache wichtige Ungleichung für die extremalen Längen: wenn $\{c_1\}$ und $\{c_2\}$ zwei Kurvenscharen in einem Gebiet sind, so gilt $L_{\{c_1\} \cup \{c_2\}}^{-1} \leq L_{\{c_1\}}^{-1} + L_{\{c_2\}}^{-1}$. Mit Hilfe dieser Ungleichung werden asymptotische Formeln für den Modul und das harmonische Maß sowie gewisse Darstellungen für die Theoreme von Phragmén-Lindelöf gewonnen. Zum Schluß wird noch darauf hingewiesen, wie die obengenannte Ungleichung und ihre Folgerungen in den dreidimensionalen Raum übertragen werden können. Y. Juve.

Hersch, Joseph et Albert Pfluger: Principe de l'augmentation des longueurs extrémales. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1205—1207 (1953).

Es sei $\{c\}$ eine Kurvenschar mit der extremalen Länge $L_{\{c\}}$ auf einer Riemannschen Fläche G . [Vgl. z. B. Verf., *ibid.* **235**, 569—571 (1952).] Wenn die analytische Funktion $z' = f(z)$ die Schar $\{c\}$ auf die Schar $\{c'\}$ mit der extremalen Länge $L_{\{c'\}}$ abbildet, so gilt $L_{\{c'\}} \geq L_{\{c\}}$. Weiter gilt die folgende Verallgemeinerung: es sei $\{c_1\}, \{c_2\}, \dots, \{c_k\}$

ein System von Kurvenscharen in G und es sei $M = M(a_1, a_2, \dots, a_k) = \inf_{\varrho} \int_G \varrho^2 d\tau$,

wo ϱ eine nicht-negative Funktion mit der Eigenschaft $\int \varrho ds \geq a_v > 0, v = 1, 2, \dots$

\dots, k , ist, und die Integrale ein oberes bzw. ein unteres Darboux-Integral sind. Bei einer analytischen Abbildung $\{c\} \rightarrow \{c'\}$, wo M' mit denselben Konstanten wie M definiert ist, gilt $M' \leq M$. — Mit Hilfe des gewonnenen Prinzips werden ein Resultat über den Modul des Vierecks und ein Resultat über den Modul des Ringgebiets hergeleitet. — Wenn $z' = f(z)$ eine D -pseudo-analytische, differenzierbare Abbildung ist, so gilt $L_{\{c'\}} \geq D^{-1} L_{\{c\}}$ bzw. $M' \leq DM$. Y. Juve.

Hersch, Joseph: A propos d'un problème de variation de R. Nevanlinna. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I **168**, 6 S. (1954).

Es sei G ein Gebiet mit den Randteilen β', β'', α und $\{c\}$ eine Kurvenschar in G , welche β' und β'' verbindet. ω_β sei das harmonische Maß des Bogens β . R. Nevanlinna definiert: $m_{\beta', \beta'', G} = \sup_{c \in \{c\}} m_{\beta', \beta'', G}^c$, wo $m_{\beta', \beta'', G}^c = \min_{p \in c} (\omega_{p\beta'} + \omega_{p\beta''})$. Verf. be-

trachtet hier den Fall, daß G ein Viereck Q mit den Seiten $\beta', \alpha', \beta'', \alpha''$ und mit dem Modul $\mu_{\beta', \beta'', Q}$ ist, und gibt den Zusammenhang zwischen den Größen $m_{\beta', \beta'', Q}^c$ und $\mu_{\beta', \beta'', Q}$. Mit Hilfe des gefundenen Zusammenhangs werden gewisse in der Dissertation des Verf. (s. nachfolgendes Referat) gegebene Abschätzungen elementar dargestellt. Weiter wird $\mu_{\beta', \beta'', Q}$ mit Hilfe der Werte der harmonischen Maße $\omega_{p\beta'}$ und $\omega_{p\beta''}$ in einem Punkte von Q nach oben abgeschätzt und zum Schluß mit Hilfe der Werte von $\omega_{p\beta'}$ und $\omega_{p\beta''}$ auf einem Bogen γ , welcher α' und α'' verbindet, ausgedrückt. Y. Juve.

Hersch, Joseph: Longueurs extrémales et théorie des fonctions. Commentarii math. Helvet. **29**, 301—337 (1955).

Der Verf. stellt in seiner Dissertation manche schon früher von ihm publizierten Resultate zusammen. [Vgl. dies Zbl. **49**, 63; C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 569—571 (1952) sowie die drei vorstehend besprochenen Arbeiten.] Die Beurling-Ahlforssche Definition der extremalen Länge wird etwas modifiziert, wodurch der Verf. gewisse Vorteile in der Darstellung gewinnt. Bekanntlich ist die extremale Länge eine konform-invariante Größe. An die Tatsache lehrend, daß man mit ihrer Hilfe einige andere konform-invarianten Größen wie den Modul eines Vierecks, den Modul eines Ringgebiets, das harmonische Maß eines Randbogens und die hyperbolische Distanz zweier Punkte charakterisieren kann, leitet Verf. einheitlich und schön manche bekannten Resultate der Funktionentheorie her, oft entweder verschärft oder verallgemeinert. Im ersten Kapitel werden die wichtigsten Eigenschaften der extremalen Länge behandelt sowie eine Verallgemeinerung — der Modul einer „numerischen Familie“ — eingeführt. Im zweiten Kapitel wird der Zusammenhang des Prinzips der extremalen Länge mit den Prinzipien des harmonischen Maßes und des hyperbolischen

Maßes dargelegt. Im dritten Kapitel folgen die verschiedenen Anwendungen. Es seien hier nur die Verallgemeinerung der Phragmén-Lindelöfschen Theoreme und gewisse Abschätzungen für die hyperbolische Distanz, das harmonische Maß und den Modul erwähnt.

Y. Juve.

Hersch, Joseph: Longueurs extrémales et géométrie globale. Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. **72**, 401—414 (1955).

Der Verf. bringt zuerst das folgende Resultat von Teichmüller in Erinnerung: es sei Q ein Viereck mit den Seiten $\beta', \alpha', \beta'', \alpha''$ und mit dem Flächeninhalt A . A sei die untere Grenze der Längen aller rektifizierbaren Kurven, welche β' und β'' bzw. α' und α'' verbinden. Dann gilt $A^2 \leq A$. Ein ähnliches Resultat von P. M. Pu wird auch vorgelegt. Der Zweck der obigen Arbeit ist, diese sowie manche andere Resultate durch die Methode der extremalen Länge einer Kurvenschar einheitlich herzuleiten. Dafür werden die extremalen Längen gewisser Kurvenscharen berechnet und geeignete geometrische Schlußfolgerungen — wie z. B. die obige — gezogen.

Y. Juve.

Ahlfors, Lars V.: Conformality with respect to Riemannian metrics. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I **206**, 22 S. (1955).

Die konforme Abbildung einer Fläche \mathfrak{F} mit der Riemannschen Metrik $ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$ auf eine passende Riemannsche Fläche wird gewöhnlich in zwei Schritten geleistet: a) Einführung lokaler isothermer Koordinaten ($E = G$, $F = 0$), b) \mathfrak{F} kann dann als abstrakte Riemannsche Fläche aufgefaßt werden und wird nach der Uniformisierungstheorie in ein Normalgebiet konform abgebildet. Mit $ds^2 = E |dz + h d\bar{z}|^2$, $dz = dx + i dy$ und $h < 1$, existieren nach Korn und Lichtenstein lokale isotherme Parameter, wenn h einer Hölder-Bedingung genügt. Verf. behandelt ausführlich die konforme Abbildung einer Kugel mit Riemannscher Metrik in eine euklidische Kugel und führt diese Aufgabe auf eine singuläre Integralgleichung zurück, die nach Bereitstellung von Sätzen über die Hilbert-Transformation durch Iteration gelöst wird. Durch Kombination zweier nichtkonformer Abbildungen zu einer konformen Abbildung wird abschließend eine Variationsformel für in $|z| < 1$ schlichte und normierte Funktionen abgeleitet.

H. Wittich.

Hitotumatu, Sin: A note on Levi's conjecture. Commentarii math. Univ. Sancti Pauli **4**, 105—108 (1955).

1954 bewies K. Oka (dies. Zbl. **53**, 243), daß die bekannte Levische Vermutung richtig ist: jedes pseudokonvexe Gebiet des komplexen Zahlenraumes C^n ist ein Holomorphiegebiet. Verf. beweist auf elementare Weise, daß der Okasche Satz zu folgender Aussage äquivalent ist: In jedem pseudokonvexen Gebiet gibt es zu sinnvoll vorgegebenen Hauptteilen immer eine meromorphe Funktion (Cousin I). Er hofft auf diese Weise zu einem weiteren, eventuell einfacheren Beweis des Okaschen Satzes zu gelangen. Eine dazu dienliche Vermutung ist angegeben.

H. Grauert.

Bremermann, H. J.: Holomorphic continuation of the kernel function and the Bergman metric in several complex variables. Lectures on Functions of a complex Variable, 349—383 (1955).

$z = (z_1, \dots, z_n)$ bedeute einen Punkt im Raume von n komplexen Veränderlichen. Es sei G ein Gebiet dieses Raumes, $K_G(z, t)$ seine Bergmansche Kernfunktion. Verf. beweist: Wenn die (reell positive) Funktion $K_G(z, \bar{z})$ überall auf dem Rande von G unendlich wird, so ist G ein Holomorphiegebiet, und G läßt sich durch eine aufsteigende Folge kompakter Teilgebiete H_M ausschöpfen, deren jedes eine Komponente der Teilmenge mit $K_G(z, \bar{z}) < M$ ist; jedes H_M ist selbst ein Holomorphiegebiet. Es wird gezeigt, daß die Voraussetzung insbesondere erfüllt ist, wenn G ein analytisches Polyeder ist. Daraus wird gefolgert, daß sich jedes schlichte Holomorphiegebiet durch eine aufsteigende Folge von kompakten, analytisch berandeten Holomorphiegebieten ausschöpfen läßt. — Es entsteht die Frage: Wenn H ein beliebiges Holomorphiegebiet ist, wird dann $K_H(z, \bar{z})$ überall auf dem Rande un-

endlich? Es werden Gegenbeispiele gegeben; die durch sie nahegelegte Vermutung, daß die negative Antwort an dem Vorhandensein einer Nebenhülle liege, wird wiederum durch ein Gegenbeispiel widerlegt. Hinreichende Bedingungen für das Unendlichwerden von $K_G(z, \bar{z})$ am Rande werden bewiesen. In diesem Zusammenhang wird der wichtige Satz benutzt und bewiesen: Die Kernfunktion eines Produktgebietes ist das Produkt der Kernfunktionen der Faktorgebiete. — Wenn $K_G(z, t)$ auf ein umfassenderes Gebiet $B_z \times B_t$ ($G \subset B$) fortgesetzt werden kann, so konvergiert die Darstellung durch ein vollständiges System orthogonaler Funktionen auch dort. Auch jede in G absolutquadratintegrable Funktion läßt sich dann nach B fortsetzen. Die reproduzierende Eigenschaft von K_G gilt auch in B in folgendem Sinne: Ist $z \in B$, so ist $f(z) = \int_G f(t) K_G(z, t) d\omega_t$; (nicht etwa ist also K_B Fortsetzung von K_G !).

— Schließlich werden die Ergebnisse für die mittels $K_G(z, \bar{z})$ definierte Bergmannsche Metrik $ds^2 = \sum_{\mu, \nu} (\log K_G)_{z_\mu \bar{z}_\nu} dz_\mu d\bar{z}_\nu$ interpretiert, und es werden ihre auszeichnenden Eigenschaften gegenüber anderen Metriken aufgestellt, die man erhält, indem man $\log K_G$ durch eine beliebige pseudokonvexe Funktion $V(z, \bar{z})$ ersetzt. Insbesondere ist die Bergmannsche Metrik positiv definit, nicht nur semidefinit, und dies gilt auch bei Fortsetzung von K_G in die Holomorphiehülle. — Wie Verf. erwähnt, besitzt die Arbeit einige Überschneidungen mit einer damals noch unveröffentlichten von J. Mehring und F. Sommer (dies. Zbl. 70, 303). *H. Grunsky.*

Džrbašjan, M. M.: Zur Theorie gewisser Klassen von ganzen Funktionen in mehreren Veränderlichen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fis.-mat. estest. techn. Nauk 8, Nr. 4, 1–23 (1955) [Russisch].

Die Arbeit enthält Aussagen über Ordnungen und Typen von ganzen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Ist f eine ganze Funktion von z_1, z_2 , so sei $M_f(r_1, r_2) = \max |f(z_1, z_2)|$ für $|z_1| = r_1, |z_2| = r_2$. Die ganze Funktion f besitze endliche Ordnung, wenn Konstanten $K_1 > 0, \mu_1 > 0, K_2 > 0, \mu_2 > 0$ existieren, derart daß es 1. für beliebiges festes $r_2 \geq 0$ eine Zahl $R_1 = R_1(K_1, \mu_1, r_2)$ mit (1) $M_f(r_1, r_2) < e^{K_1 r_1^{\mu_1}}$ für $r_1 \geq R_1$ gibt und derart daß 2. für beliebiges festes $r_1 \geq 0$ eine Zahl $R_2 = R_2(K_2, \mu_2, r_1)$ mit (2) $M_f(r_1, r_2) < e^{K_2 r_2^{\mu_2}}$ für $r_2 \geq R_2$ existiert. f gehöre zur Klasse A , wenn aus den Ungleichungen (1) und (2) die Existenz einer Zahl $R = R(K_1, \mu_1, K_2, \mu_2)$ folgt, so daß $M_f(r_1, r_2) < e^{K_1 r_1^{\mu_1} + K_2 r_2^{\mu_2}}$ für $r_1, r_2 > R$ ist. Die ganze Funktion f der Klasse A habe die Ordnungen (ϱ_1, ϱ_2) , wenn f die Ordnungen ϱ_1 und ϱ_2 bez. z_1 bzw. z_2 hat. Die ganze Funktion f mit den Ordnungen (ϱ_1, ϱ_2) sei von endlichem Typ, wenn Konstanten $K_1 > 0, K_2 > 0$ existieren, derart daß für beliebiges festes $r_2 \geq 0$ ein $R_1(K_1, r_2)$ und für beliebiges festes $r_1 \geq 0$ ein $R_2(K_2, r_1)$ existieren, so daß (3) $M_f(r_1, r_2) < e^{K_1 r_1^{\varrho_1}}$ für $r_1 \geq R_1(K_1, r_2)$ und (4) $M_f(r_1, r_2) < e^{K_2 r_2^{\varrho_2}}$ für $r_2 \geq R_2(K_2, r_1)$ gelten. Die untere Grenze von K_1 sei σ_1 , und K_2 habe als untere Grenze σ_2 . Die Zahlen σ_1, σ_2 heißen Typen von f . Es werden u. a. folgende Sätze bewiesen: Die ganze Funktion hat dann und nur dann die Ordnungen (ϱ_1, ϱ_2) wenn:

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log r_1} \right\} = \varrho_1, \quad \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log r_2} \right\} = \varrho_2 \quad \text{und} \\ \lim_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\varrho_1} + r_2^{\varrho_2})} \right\} = 1$$

gelten. Die ganze Funktion f der Ordnungen (ϱ_1, ϱ_2) hat dann und nur dann den Typ (σ_1, σ_2) , wenn

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{r_1^{\varrho_1}} \right\} = \sigma_1, \quad \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{r_2^{\varrho_2}} \right\} = \sigma_2 \quad \text{und} \\ \lim_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{\sigma_1 r_1^{\varrho_1} + \sigma_2 r_2^{\varrho_2}} \right\} = 1$$

gelten. Weitere Sätze drücken Ordnungen und Typen einer ganzen Funktion f durch Limeseigenschaften der Koeffizienten der Taylorentwicklung von f aus. Zum Schluß gibt Verf. eine Integraldarstellung einer ganzen Funktion von endlichen Ordnungen und Typen und die Umkehrung dieser Darstellung an.

W. Thimm.

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Cohn, Harvey: **Modular functions defined by perturbation mappings.** Lectures on Functions of a complex Variable, 341—348 (1955).

Verf. skizziert die Durchführung des folgenden Gedankens zur Gewinnung von Invarianten der Modulgruppe: Man „störe“ die obere Halbebene, indem man z. B. einen die reelle Achse in 0 berührenden Kreis vom Durchmesser ε und alle ihm nach der Modulgruppe äquivalenten entfernt; das entstandene Gebiet Π_ε ist invariant gegenüber der Modulgruppe. Bildet man es durch $\zeta = \zeta_\varepsilon(z)$ auf $\text{Im } \zeta > 0$ ab, so entspricht einer Substitution der Modulgruppe, ausgeübt auf z , eine lineare Substitution in ζ , die bei $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen jene konvergiert. $P(z) = (-12/\pi^2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(\zeta_\varepsilon(z) - z)/\varepsilon^2]$,

die Störungsfunktion (der Existenzbeweis des Limes macht einige Mühe), läßt sich durch Überlagerung der von den einzelnen entfernten Teilgebieten herrührenden Störungen darstellen. Die entstehende Reihe erweist sich als eng verwandt mit einer Eisensteinschen. — Ref. konnte der Darstellung in den Einzelheiten nicht folgen.

H. Grunsky.

Maaß, Hans: **Die Bestimmung der Dirichletreihen mit Größencharakteren zu den Modulformen n -ten Grades.** J. Indian math. Soc., n. Ser. 19, 1—23 (1955).

This paper is a contribution to the problem of generalizing to modular forms of degree $n \geq 2$ the Hecke theory concerning modular forms and Dirichlet series. As shown by the author in the case $n = 2$ (this Zbl. 38, 240), to every modular form belonging to Siegel's modular group correspond an infinity of Dirichlet series defined by means of generalized grössencharacters. Grössencharacters, studied first by Hecke, can be regarded as eigenfunctions of a ring of invariant differential operators. The generalization of grössencharacters to the space \mathfrak{S} of real positive n -rowed matrices Y is carried out by the author as follows: Let $ds^2 = \sigma(Y^{-1} dY Y^{-1} dY)$ be the metric in the space \mathfrak{S} , R_n the Minkowski fundamental region on the determinantal surface $|Y| = 1$ and dv_1 the volume element on the surface $|Y| = 1$ induced by the above metric. Let \mathfrak{R} be the ring of differential operators in \mathfrak{S} invariant under the transformations $Y \rightarrow C' Y C$, C nonsingular and real. According to a remark of A. Selberg this ring is generated by the operators

$$(*) \quad \sigma(Y \partial/\partial Y)_k + \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

where σ denotes trace and $\partial/\partial Y = (\frac{1}{2}(1 + \delta_{\mu\nu}) \partial/\partial y_{\mu\nu})$ with $Y = (y_{\mu\nu})$ and $\delta_{\mu\nu}$ is the Kronecker delta. A complex-valued function $u(Y)$ on \mathfrak{S} is said to be a grössencharacter if 1. $u(Y)$ is an eigenfunction of the operators $(*)$ 2. homogeneous of degree zero, that is, $u(t Y) = u(Y)$, $t > 0$, 3. bounded in \mathfrak{S} , 4. $u(V' Y V) = u(Y)$ for unimodular V , 5. square integrable in R_n with the measure dv_1 . The author proves the existence of eigenfunctions of \mathfrak{R} which satisfy 4. In order to associate with each grössencharacter a Dirichlet series the author shows that one is led to evaluate the integral

$$\Omega(s, T, u) = \int_{\mathfrak{S}} u(Y) |Y|^{s-n+1/2} e^{-2\pi\sigma(TY)} [dY]$$

where $[dY] = \prod_{\mu \leq \nu} dy_{\mu\nu}$ and $T > 0$ is the matrix of an integral quadratic form. It is shown that $\Omega(s, T, u) = |T|^{-s} u(T^{-1}) c_n$ where c_n is a constant depending on the eigenvalues $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

K. G. Ramanathan.

Myrberg, P. J.: Darstellung automorpher Funktionen durch Zusammensetzung von elliptischen und Fuchsoiden Funktionen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 200, 9 S. (1955).

Es sei Γ eine Fuchssche Gruppe von Transformationen $S(z) = (\alpha z + \beta) \cdot (\gamma z + \delta)^{-1}$ des Einheitskreises $|z| < 1$ in sich. Unter einer Thetafunktion zur Gruppe Γ werde eine in $|z| < 1$ holomorphe Funktion $g(z)$ mit der Transformations-eigenschaft $g(S(z)) = e^{u_S(z)} g(z)$ für $S \in \Gamma$ verstanden, wobei $u_S(z)$ ebenfalls in $|z| < 1$ holomorph ist. $g(z)$ heißt von N -ter Ordnung, wenn es N linear unabhängige, in $|z| < 1$ holomorphe Funktionen $u_v(z)$ ($v = 1, 2, \dots, N$) gibt, so daß $u_S(z) = \sum_v c_v^{(S)} u_v(z) + c^{(S)}$ mit konstanten $c_v^{(S)}, c^{(S)}$ gilt. Die $u_v(z)$ bilden dann notwendig ein System von zetafuchsschen Funktionen, d. h. es gilt $u_\mu(S(z)) = \sum_\nu a_{\mu\nu}^{(S)} u_\nu(z) + a_\mu^{(S)}$ mit konstanten $a_{\mu\nu}^{(S)}, a_\mu^{(S)}$. — Ziel der Arbeit ist der Nachweis, daß die automorphen Funktionen zu einer sehr allgemeinen Klasse von Fuchsschen Gruppen Γ als Quotienten von Thetafunktionen erster Ordnung darstellbar sind, wobei letztere aus elliptischen Thetafunktionen und Fuchsoiden Funktionen zusammensetzbar sind. Konstruktion der Gruppen: Es sei F die durch die algebraische Gleichung $P(x, y) = 0$ definierte Riemannsche Fläche, e_1, e_2, e_3, e_4 in gewisser Weise willkürlich gewählt, ebenso e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 . F kann als Überlagerungsfläche der x - und auch der y -Kugel aufgefaßt werden. z sei eine Uniformisierende von F , die in allen über $x = e_1, e_2, e_3, e_4$ und auch allen über $y = e'_1, e'_2, e'_3, e'_4$ gelegenen Punkten von erster Ordnung verzweigt ist. Für die zu z und F gehörige Fuchssche Gruppe Γ gelten dann die obigen Aussagen. Zum Beweis werden die elliptischen Integrale

$$u = \int \left(\prod_v (x - e_v) \right)^{-1/2} dx, \quad v = \int \left(\prod_v (y - e'_v) \right)^{-1/2} dy$$

als Funktion von z dargestellt. Für $S \in \Gamma$ gilt dann

$$u(S(z)) = \pm u(z) + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2, \quad v(S(z)) = \pm v(z) + m'_1 \omega'_1 + m'_2 \omega'_2$$

mit ganz rationalen m_v, m'_v . Die elliptischen Funktionen $x = x(u)$, $y = y(v)$ sind als Quotienten von elliptischen Thetafunktionen (erster Ordnung) zu schreiben. Für eine beliebige automorphe Funktion $f(z)$ von Γ , die in der Form $f(z) = \sum_{v=0}^q r_v(x) y^v$ ($r_v(x)$ = rationale Funktion von x) angesetzt werden kann, ergibt sich so die Darstellung

$$f(z) = \vartheta^*(u, v) / \vartheta(u, v) = g^*(z) / g(z)$$

wobei $g(z)$, $g^*(z)$ Thetafunktionen 2. Ordnung sind, die sich aus elliptischen Thetafunktionen und Fuchsoiden Funktionen zusammensetzen. Eine einfache Schlußweise erlaubt die Erniedrigung der Ordnung von 2 auf 1. Die Methode ist bei unverzweigter Uniformisierung nicht anwendbar.

H. Maaß.

Hartman, S.: Almost periodic functions. Prace mat. 1, 323—342, russ. u. engl. Zusammenfassg. 342—343, 343 (1955) [Polnisch].

The aim of the paper is to survey the basic notions and most important results of the theory of almost periodic functions. The first chapter contains an outline of Bohr's theory, the second chapter is devoted to generalized almost periodic functions of a real variable (functions of Stepanov, Weyl and Besicovitch), the third chapter deals with analytic almost periodic functions and the fourth with the theory of almost periodic functions on groups, which has been created by v. Neumann. At the end of the paper further connections of the theory of almost periodic functions with other branches of mathematics are mentioned and monographs on almost periodic functions are listed.

Englische Zusammenfassg.

Iséki, Kiyoshi: Vector-space valued functions on semi-groups. III. Proc. Japan Acad. 31, 699—701 (1955).

Im Anschluß an die früheren Noten I, II des Verf. (dies. Zbl. 65, 17) wird nun gezeigt, daß man für fastperiodische Funktionen $f(x)$ der Elemente x einer Halb-

gruppo das Analogon zu $f(x y^{-1})$ bilden kann, obwohl in der Halbgruppe y^{-1} nicht existiert. Diese Funktion $f(x, y)$ von zwei Variablen wurde vom Ref. für den Fall konstruiert, daß nur komplexe Zahlen als Funktionswerte zugelassen sind. Verf. verallgemeinert diese Konstruktion, indem er auch Werte aus einem lokal-konvexen Vektorraum zuläßt.

W. Maak.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Hirasawa, Yoshikazu: On singular perturbation problems of non-linear systems of differential equations, III. *Commentarii math. Univ. Sancti Pauli* **4**, 93—104 (1955).

L'A. prosegue una propria precedente ricerca (questo Zbl. **64**, 341, **66**, 73) considerando il sistema di equazioni differenziali contenenti il parametro ε

$$(1) \quad dx/dt = f(x, y, z, t; \varepsilon), \quad \varepsilon dy/dt = g(x, y, z, t; \varepsilon), \quad \varepsilon dz/dt = h(x, y, z, t; \varepsilon),$$

ove x, f sono vettori a l dimensioni, mentre y, g sono a m dimensioni, e z, h sono a n dimensioni. Viene stabilito il seguente teorema: Siano $p(\varepsilon) \equiv (p_1(\varepsilon), \dots, p_l(\varepsilon))$, $q(\varepsilon) \equiv (q_1(\varepsilon), \dots, q_m(\varepsilon))$, $r(\varepsilon) \equiv (r_1(\varepsilon), \dots, r_n(\varepsilon))$ funzioni vettori di ε , che tendono a zero per $\varepsilon \rightarrow 0$. Siano $S_1(x), S_2(y), S_3(z)$ tre funzioni positive di Kamke (questo Zbl. **66**, 73) con $S_1(x) = S_1(-x)$, $S_2(y) = S_2(-y)$, $S_3(z) = S_3(-z)$ e siano L, L_1 numeri positivi tali che le funzioni continue $f(x, y, z, t; \varepsilon)$, $g(x, y, z, t; \varepsilon)$, $h(x, y, z, t; \varepsilon)$ verifichino le disuguaglianze

$$S_1[\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t; 0) - f(x, y, z, t; 0)] \leq L[S_1(\bar{x} - x) + S_2(\bar{y} - y) + S_3(\bar{z} - z)],$$

$$S_2[g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t; 0) - g(x, y, z, t; 0)] \leq L S_1(\bar{x} - x) + L_1 S_3(\bar{z} - z),$$

$$S_3[h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t; 0) - h(x, y, z, t; 0)] \leq L S_1(\bar{x} - x) + L_1 S_2(\bar{y} - y);$$

e inoltre

$$S_2[\bar{y} - y + \tau \{g(x, \bar{y}, z, t; 0) - g(x, y, z, t; 0)\}] \leq (1 - \tau \sigma_1) S_2(\bar{y} - y),$$

$$S_3[\bar{z} - z - \tau \{h(x, y, \bar{z}, t; 0) - h(x, y, z, t; 0)\}] \leq (1 - \tau \sigma_1) S_3(\bar{z} - z),$$

ove $\sigma_1 > L_1$ e $\tau > 0$ è sufficientemente piccolo; e infine

$$S_1[f(x, y, z, t; \varepsilon) - f(x, y, z, t; 0)] \leq \Omega(\varepsilon), \quad S_2[g(x, y, z, t; \varepsilon) - g(x, y, z, t; 0)] \leq \Omega(\varepsilon), \\ S_3[h(x, y, z, t; \varepsilon) - h(x, y, z, t; 0)] \leq \Omega(\varepsilon), \quad \text{ove } \Omega(\varepsilon) > 0 \text{ è infinitesimo con } \varepsilon.$$

Sotto queste ipotesi, se è nota una soluzione (2) $x = X(t)$, $y = Y(t)$, $z = Z(t)$, ($t_1 \leq t \leq t_2$) del sistema degenerare $dx/dt = f(x, y, z, t; 0)$, $0 = g(x, y, z, t; 0)$, $0 = h(x, y, z, t; 0)$, e se t_0 è un arbitrario valore di (t_1, t_2) , per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo esiste una soluzione $x = x(t; \varepsilon)$, $y = y(t; \varepsilon)$, $z = z(t; \varepsilon)$ del sistema (1) soddisfacente alle condizioni $x(t_0; \varepsilon) = X(t_0) + p(\varepsilon)$, $y(t_1; \varepsilon) = Y(t_1) + q(\varepsilon)$, $z(t_2; \varepsilon) = Z(t_2) + r(\varepsilon)$. Inoltre, per $\varepsilon \rightarrow 0$, tutte le soluzioni del sistema (1), che soddisfano alle condizioni ora indicate, convergono uniformemente in tutto (t_1, t_2) verso la soluzione (2).

S. Cinquini.

Doetsch, Gustav: Das Anfangswertproblem für Systeme linearer Differentialgleichungen unter unzulässigen Anfangsbedingungen. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. Ser. **39**, 25—37 (1955).

Si considera un sistema di N equazioni differenziali lineari in N incognite a coefficienti costanti

$$(1) \quad \sum_{\beta=1}^N \sum_{\nu=1}^n c_{\nu}^{x\beta} Y_{\beta}^{(\nu)} = F_x(t), \quad (x = 1, 2, \dots, N),$$

nel caso non normale $\det \|c_n^{\alpha\beta}\| = 0$, onde i valori iniziali per $t = 0$ non possono essere dati ad arbitrio. In molti problemi fisici i valori iniziali (2) ${}_0 Y_{\beta}^{(\nu)}$ sono assegnati in modo incompatibile col sistema; pur tuttavia, usando formalmente il metodo della trasformazione di Laplace, si arriva ad una soluzione che viene accettata come buona per il problema fisico, ma che naturalmente corrisponde a valori iniziali (3) $Y_{\beta}^{(\nu)}(+0)$ diversi da (2). Questo fatto è stato spiegato da Ghizzatti (questo Zbl. **20**, 303). In sostanza si tratta di pensare che per $t < 0$ già erano soddisfatte le

(1) con altri termini noti e quindi di considerare in $(-\infty, +\infty)$ una soluzione con discontinuità di 1^a specie nel punto $t = 0$; sfruttando un principio fisico (che può enunciarsi in due modi diversi) si fa vedere che i salti nel punto $t = 0$ sono univocamente determinati a priori e che effettivamente hanno i valori $Y_{\beta}^{(v)}(0+) - 0Y_{\beta}^{(v)}$ forniti dal sopradetto metodo di risoluzione. Il Doetsch vuole evitare principi di carattere fisico e perciò tratta la questione in modo un po' diverso. Egli considera il sistema (1) per $-1 \leq t < +\infty$, mettendo per $-1 \leq t \leq 0$ i termini noti uguali a delle funzioni $\Phi_{\alpha}(t)$ scelte con la sola restrizione che in $(-1, 0)$ esista una soluzione con i valori iniziali (2) nel punto $t = 0$. Questa soluzione genera certi valori iniziali nel punto $t = -1$; partendo ora da questi si integri il sistema in $(-1, +\infty)$ con i termini noti (discontinui) $\Phi_{\alpha}(t)$ in $(-1, 0)$, $F_{\alpha}(t)$ in $(0, +\infty)$. La soluzione che si trova ha in $t = 0$ certe discontinuità, indipendenti dalla scelta delle $\Phi_{\alpha}(t)$, che sono proprio quelle di cui si è detto prima. È da notare però che l'A. sviluppa queste considerazioni soltanto su un particolarissimo esempio. A. Ghizzetti.

César de Freitas, A.: Sur les distributions qui interviennent dans le calcul symbolique des électrotechniciens (Cas des circuits à constantes concentrées). Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 3, 279—310 (1955).

In der vorliegenden Arbeit gibt der Verf. mit Hilfe der Theorie der Distributionen eine einfache strenge Begründung der in der Elektrotechnik üblichen Operatorenrechnung für gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Eine auf der reellen Zahlengeraden definierte Schwartzsche Distribution T wird eine Heaviside-Distribution genannt, wenn sie in der Form $T = f + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_k$

darstellbar ist, worin f eine lokal integrierbare Funktion und $T_k = \sum_{i=0}^{n_k} \lambda_{k,i} \delta_{(a_k)}^{(i)}$ eine Distribution mit punktförmigem Träger $\{a_k\}$ bezeichnet; die a_k sollen sich im Endlichen nicht häufen. T heißt eine Heaviside-Distribution der Klasse $\geq n$, wenn $T^{(n)}$ eine Heaviside-Distribution ist. Für eine Heaviside-Distribution T der Klasse $\geq n$ kann man in jedem Punkte a in evidenter Weise die einseitigen Grenzwerte $T^{(i)}(a^{\pm})$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) erklären. Das Hauptergebnis der Arbeit ist das folgende: Die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n ($a_n \neq 0$) $a_n T^{(n)} + \dots + a_1 T' + a_0 T = U$ mit gegebener Heaviside-Distribution U besitzt als Lösungen nur Heaviside-Distributionen T der Klasse $\geq n$. Werden die Zahlen b_0, b_1, \dots, b_{n-1} beliebig vorgegeben, so gibt es genau eine Lösung T mit $T^{(i)}(0^-) = b_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). — Bemerkung: In dem von J. Sebastiao e Silva (dies. Zbl. 64, 358) übernommenen Axiomensystem der Distributionen in § 1 wurde Axiom 6 in unzulässiger Weise vereinfacht; in der angegebenen Fassung wird das Axiomensystem sowohl von allen Distributionen als auch z. B. von allen Distributionen, die in jedem Teilintervall ihres Definitionsbereiches von endlicher Ordnung sind, für sich erfüllt.

H. König.

Levitani, B. M.: Über das asymptotische Verhalten der Spektralfunktion und über die Entwicklung nach Eigenfunktionen einer selbstadjungierten Differentialgleichung zweiter Ordnung. II. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 19, Nr. 1, 33—58 (1955) [Russisch].

In diesem zweiten Teil werden die Ergebnisse des unter fast gleichem Titel erschienenen ersten Teiles (dies. Zbl. 52, 92) ergänzt und verbessert. Die in der Überschrift genannte Differentialgleichung lautet: $y'' + [\lambda - q(x)] y = 0$, die Anfangsbedingungen für die Eigenfunktionen $\varphi(x, \lambda)$ und $\psi(x, \lambda)$: $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'_x(0, \lambda) = 0$ bzw. $\psi(0, \lambda) = 0$, $\psi'_x(0, \lambda) = 1$. Der Veränderlichkeitsbereich von x sei unbeschränkt. Der hauptsächlichste Fortschritt der neuen Arbeit gegenüber der früheren besteht darin, daß gewisse Einschränkungen in den Voraussetzungen der Ergebnisse fallen gelassen werden konnten. Es ist nicht mehr nötig, das Spektrum des Differentialoperators der Gleichung nach unten beschränkt anzunehmen und von der gegebenen

(reellen) Funktion $q(x)$ wird nunmehr nichts weiter verlangt als die naturgemäße Forderung, daß sie in jedem endlichen Intervall summierbar sei. — Die Spektralfunktion der Gleichung $\theta(x, s; \lambda)$ (wegen ihrer Definition vgl. das Referat über eine Arbeit desselben Verf. in dies. Zbl. 53, 60) wird verglichen mit derjenigen des Sonderfalles $q(x) = 0$, also der Gleichung, die der Theorie der Fourierintegrale zugrunde liegt. Das asymptotische Verhalten der Spektralfunktion wird zum Ausdruck gebracht durch die Formel

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} [\theta_1(x, s; \mu) - \theta_1^*(x, s; \mu)] = \theta(x, s; -\infty),$$

die gleichmäßig in jedem endlichen Veränderlichkeitsbereich (x, s) gilt. Hierin ist für positives λ ($\lambda = \mu^2$) $\theta(x, s; \lambda) = \theta_1(x, s; \mu)$ gesetzt und diese Funktion als ungerade Funktion für negative μ fortgesetzt worden.

$$\theta_1^*(x, s; \mu) = \pi^{-1} (x - s)^{-1} \sin \mu (x - s)$$

ist die entsprechende Spektralfunktion im genannten Sonderfall $q(x) = 0$. — Der grundlegende Satz über die Entwicklung nach Eigenfunktionen der Gleichung lautet: Es sei $q(x)$ eine in jedem endlichen Intervall summierbare Funktion und $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Dann gilt gleichmäßig in jedem endlichen x -Intervall

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) [\theta_1(x, s; \mu) - \theta_1^*(x, s; \mu)] ds \right\} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \theta(x, s; -\infty) ds = 0,$$

d. h. die Differenz zwischen den Entwicklungen der Funktion $f(x)$ in ein verallgemeinertes und ein gewöhnliches Fourierintegral strebt in jedem endlichen Intervall gleichmäßig nach Null. Diese Formel entsteht aus der vorigen durch Erweiterung mit $f(s)$, Integration und Vertauschung der Reihenfolge der Integration mit dem Grenzübergang $\mu \rightarrow \infty$. Beide werden aber unabhängig voneinander mit den Hilfsmitteln der Theorie der (verallgemeinerten) Fourierintegrale und deren Spektralthorie bewiesen. — Im Falle, daß der zugrunde gelegte Definitionsbereich der Differentialgleichung nur die Halbgerade x (sowie s) > 0 umfaßt, werden analoge Ergebnisse gewonnen, wobei die Anfangsbedingung (wie auch im Referat über den 1. Teil angegeben) lautet: $y'(0) - h y(0) = 0$ (mit der Konstanten h) und die Vergleichsspektralfunktion, die für $q(x) = 0$ und $h = 0$ eintritt, gleich $\theta_1^*(x, s; \mu)$

$= \frac{2}{\pi} \int_0^\mu \cos vx \cos vs dv$ ist. Endlich wird hierzu noch in ähnlicher Weise der Fall $h = \infty$ untersucht, wobei nur die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ übrig bleibt und die

Vergleichsfunktion sinngemäß $\theta_1^*(x, s; \mu) = \frac{2}{\pi} \int_0^\mu \sin vx \sin vs dv$ ist. Das im

Sonderfall $x = s = 0$ sich hieraus für das asymptotische Verhalten der Spektralfunktion ergebende Resultat ist im wesentlichen schon in einer früheren Arbeit des Verf. erhalten worden (dies. Zbl. 48, 324), aber auf sehr umständliche und, wie er jetzt sagt, nicht ganz korrekte Weise. Nunmehr ergibt es sich ohne weiteres aus der allgemeinen Theorie, die von allgemeinerem Interesse ist und ein natürliches, nicht allein auf ein Einzelresultat zugeschnittenes Gepräge zeigt. — Am Schluß werden noch (im ursprünglichen Fall) Formeln für das asymptotische Verhalten der Rießschen Mittel (Summen) der Spektralfunktion und der Entwicklung einer Funktion $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ nach Eigenfunktionen vermittelt der Spektral-

funktion, d. i. der beiden Integrale $J_1 = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int_0^\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right)^\lambda d_v [\theta_1(x, s; v) - \theta_1^*(x, s; v)]$

und $J_2 = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int_0^\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right)^\lambda d_v R(x, v)$ mit

$$R(x, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) [\theta_1(x, s; \mu) - \theta_1^*(x, s; \mu)] ds,$$

abgeleitet, unter der Voraussetzung, daß $q(x)$ in der Umgebung eines Punktes x_0 der

Forderung genügt: $\int_{x_0-s}^{x_0+s} |q(z)| dz < Cs^\alpha$ (C und α bedeuten Konstanten), und zwar

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} J_1 = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \theta(x, s; -\infty) \quad \text{und} \quad J_2 = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \theta(x, s; -\infty) ds + O\left(\frac{1}{\mu^\tau}\right)$$

mit $\tau = \min \{\lambda, \alpha + \frac{1}{2}\}$.

E. Svenson.

Krzywicka, E.: Sur les solutions de l'équation différentielle $x^{(n)} + A(t)x = 0$ qui satisfont à des conditions données dans plusieurs points. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 521—522 (1955).

The problem is to find solutions of $x^{(n)} + A(t)x = 0$ which satisfy $x^{(j_{\mu\nu}-1)}(\alpha_\mu) = c_{\mu\nu}$, $\mu = 1, \dots, r$, $\nu = 1, \dots, q_\mu$, $q_1 + \dots + q_r = n$; for each μ , the $j_{\mu\nu}$ are different integers $1 \leq j_{\mu\nu} \leq n$; the $c_{\mu\nu}$ are any real numbers. 1. If the numbers α_μ and q_μ are given, the existence of a solution does not depend on the particular choice of the $j_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu}$. 2. Given q_1, \dots, q_r , if either (a): $A(t) > 0$ and q_2, \dots, q_r are even, or (b): $A(t) < 0$ and $q_2, \dots, q_{r-1}, q_r + 1$ are even, then for each choice of the α_μ , $j_{\mu\nu}$ and $c_{\mu\nu}$ the solution exists and is unique; if $n \leq 6$ and $A(t) > 0$, condition (b) is also necessary for the existence and uniqueness. No proofs are given.

J. L. Massera.

Conti, Roberto: Sulla stabilità dei sistemi di equazioni differenziali lineari. Revista Mat. Univ. Parma 6, 3—35 (1955).

If (*) $y' = A(t)y$ is a linear system of differential equations [$A(t)$ an $n \times n$ matrix function of t in $t \geq 0$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$], let $Y(t)$ be the fundamental matrix of solutions of (*) with $Y(0) = I$ (I the unit matrix). Then stability of (*) in the sense of Ljapunov is equivalent to $\|Y(t)\| \leq C$ for all $t \geq 0$, while the stronger concept of uniform stability (in the sense of V. V. Stepanov and others) is equivalent to $\|Y(t)Y^{-1}(u)\| \leq C$ for all $0 \leq u \leq t$. The author proves the following theorem: If the characteristic roots $r(t)$ of the matrix $A(t)$ have real parts, all ≥ 0 for all $t \geq 0$; if the coefficients of $A(t)$ are functions of bounded variations in $[0, +\infty)$, if the limit matrix $A(+\infty)$ has the property that all its characteristic roots with real parts equal zero are simple, then (*) is uniformly stable. This theorem reinforces the similar theorem of the reviewer in the sense that it assures uniform stability instead of Ljapunov stability under the same hypotheses. The proof consists of a further analysis along the same method of the reviewer (this Zbl. 24, 35), or method of reduction to L -diagonal form according to the terminology of I. M. Rapoport (Izdat. Akad. Ukrain. Nauk SSR, Kiev 1954) and others who recently used the same method. — The author studies then the even stronger concept of restrictive stability (in the sense of N. P. Erugin) which is equivalent to $\|Y(t)Y^{-1}(u)\| \leq C$ for all $t, u \geq 0$. Sufficient conditions are given for the restrictive stability of (*).

Let us mention here that if $A(t)$ is permutable with $\int_0^t A(u) du$ and $\left\| \int_0^t A(u) du \right\| \leq C$ for all $t \geq 0$, then (*) is restrictively stable. Applications are made to nonhomogeneous systems. [Pertinent references: T. Ważewski, this Zbl. 36, 57; A. Wintner, Amer. J. math. 68, 553—559 (1946)].

L. Cesari.

Conti, Roberto: Sulla t -similitudine tra matrici e la stabilità dei sistemi differenziali lineari. Atti Acad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 19, 247—250 (1955).

Let \mathcal{M} be the set of real or complex $n \times n$ matrices $A(t)$, $t \geq 0$, measurable and summable in each finite interval; let $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$ be the subset of absolutely continuous matrices which are invertible and such that the norm of the matrix and of its inverse are both bounded in $[0, +\infty)$. $A, B \in \mathcal{M}$ are said to be t -similar if there is a $T \in \mathcal{T}$ such that $\dot{T} + TB - AT = 0$ at all points where \dot{T} exists and is finite;

for constant T this gives the usual similarity. Cf. also L. Markus (this Zbl. 64, 338).

$A, B \in \mathcal{M}$ are t_∞ -similar if there is a $T \in \mathcal{T}$ such that $\int_0^\infty \|\dot{T} + T B - A T\| dt < \infty$.

Theorems: 1—3. If A, B are two t -similar matrices, the systems $\dot{x} = A x$, $\dot{x} = B x$ are simultaneously stable or uniformly stable or stable in the strict sense (i. e. the given system and the adjoint system are both stable); 4. If A, B are t_∞ -similar matrices, the systems $\dot{x} = A x$, $\dot{x} = B x$ are simultaneously uniformly stable or stable in the strict sense. This last result does not extend to simple stability.

J. L. Massera.

Gambill, Robert A.: Criteria for parametric instability for linear differential systems with periodic coefficients. *Revista Mat. Univ. Parma* 6, 37—43 (1955).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 58, 314) gab Verf. hinreichende Bedingungen für die parametrische Stabilität der Nulllösung des Systems $\ddot{y}_j + \sigma_j^2 y_j + \lambda \sum \varphi_{jh}(t) y_h = 0$, d. h. in der Umgebung von $y_i = 0$, $\lambda = 0$. In der vorliegenden Arbeit wird ergänzend eine hinreichende Bedingung für die parametrische Instabilität der Nulllösung gegeben.

W. Haacke.

Breus, K. A.: Über die asymptotische Lösung linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. *Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR* 1955, 415—418, russ. Zusammenfassg. 418 (1955) [Ukrainisch].

The solution of $\ddot{x} + [A + \varphi(\omega t)]x = 0$, A constant symmetric matrix, φ periodic matrix, ω large, is given as a formal power series in $\varepsilon = \omega^{-1}$.

J. L. Massera.

Yoshizawa, Taro: Note on the solutions of a system of differential equations. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A* 29, 249—273 (1955).

The author proves several theorems on the existence of solutions of different boundary value problems for $y'' = f(x, y, y')$ (x, y, f scalars), on the boundedness and ultimate boundedness of the solutions of $\dot{x} = F(t, x)$ (x, F vectors), as well as on the existence of periodic solutions, under assumptions on f, F of Carathéodory's type. These theorems generalize previous results of the author (this Zbl. 47, 326; 56, 314), Scorza Dragoni (this Zbl. 19, 345; 20, 223), Zwirner (this Zbl. 21, 128) and others. The precise statements are too complicated and numerous to be summarized here.

J. L. Massera.

Yoshizawa, Taro: Note on the boundedness and the ultimate boundedness of solutions of $x' = F(t, x)$. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A* 29, 275—291 (1955).

Several criteria on the boundedness and ultimate boundedness of solutions are proved. Let $\dot{x} = F(t, x)$, be an n -dimensional system and let φ be a Ljapunov function defined in A : $0 \leq t < \infty$, $\|x\| \geq R_0$; φ is ≥ 0 and locally Lipschitzian with respect to x , $D_F \varphi = \limsup_{h \rightarrow 0} \{\varphi[t + h, x + h F(t, x)] - \varphi(t, x)\}$. Typical

results are: 1. If $\varphi \rightarrow \infty$ uniformly as $\|x\| \rightarrow \infty$ and $D_F \varphi \leq 0$, the solutions are equi-bounded (i. e. $\|x(t; x_0, t_0)\| \leq B(\|x_0\|, t_0, t \leq t_0)$). 2. If moreover φ has an upper bound which depends on $\|x\|$ alone, they are uniformly bounded (i. e. B does not depend on t_0). 3. If moreover $D_F \varphi$ is negative definite, they are uniformly ultimately bounded (i. e. there is a constant B and $T(\|x_0\|)$ such that $\|x(t; x_0, t_0)\| \leq B$ for $t \geq t_0 + T$). A converse theorem is also proved.

J. L. Massera.

Turán, P.: On the instability of systems of differential equations. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* 6, 257—270 (1955).

Consider the system (*) $dx_i/dt = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + w_i(x_1, \dots, x_n, t)$, $i = 1, \dots, n$, where the a_{ij} are complex numbers and $w_i(0, \dots, 0, t) \equiv 0$. Thus $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, is a solution of (*), and this solution is said to be completely unstable, according to O. Perron, if there is a $c > 0$ such that for each solution of (*) with $0 < \sum |x_i(0)|^2 < c$, either the solution ceases to exist at some $t_0 > 0$, or $\sum |x_i(t_1)|^2 \geq c$

for some $t_1 > 0$. Suppose that the characteristic roots λ_s of the matrix $[a_{ij}]$ are all positive, and denote by $L = \min \lambda_s > 0$, $C = \max |a_{ij}|$, $D = (2L)^{-1} \cdot \log[16n(4C)^n]$. If for some $a > 0$ the functions w_i are continuous in the domain $t \geq 0$, $|x_i| \leq a$, $i = 1, \dots, n$, and verify here the relation $\sum |w_i|^2 / \sum |x_i|^2 \leq (30n)^{-1} D^{-2} \exp(-4nCD)$, then the solution $x_i = 0$ of (*) is completely unstable. This statement represents an improvement of a lemma of O. Perron [Math. Z. **29**, 129—160 (1929)].

L. Cesari.

Halanay, A.: Solutions presque-périodiques pour une équation non-linéaire contenant un petit paramètre. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București, Ser. Ști. Natur. **4**, Nr. 6—7, 39—44, russ. u. französ. Zusammenfassg. 45 (1955) [Rumänisch].

En utilisant des résultats de Favard [Acta math. **51**, 77—81 (1928)] ainsi que de l'A. [Acad. Républ. popul. Române, Studii Cerc. mat. **4**, 345—353 (1953)] on démontre la proposition suivante: Soit $d^2x/dt^2 + p(t)x + \mu f(x, t, \mu) = 0$ une équation différentielle à petit paramètre où $p(t)$ est presque-périodique et (i) l'équation de Riccati $\dot{y} + y^2 + p(t) = 0$ admet deux solutions presque-périodiques $u(t) < 0$ et $v(t) > 0$; (ii) f est presque-périodique en t uniformément par rapport à x et μ pour $|\mu| \leq \mu_0$ et $|x| \leq A$, et $|f(x_1, t, \mu) - f(x_2, t, \mu)| < M|x_1 - x_2|$ pour $x_1, x_2 \in [-A, +A]$; alors pour μ suffisamment petit l'équation admet une solution presque-périodique unique située dans $[-A, +A]$. Si $f(0, t, \mu) \equiv 0$, f_x est presque-périodique et f_{xx} continue, la solution presque-périodique unique peut être obtenue à l'aide d'une suite d'approximations successives vérifiant l'inégalité $|u_{n+1}(t) - u_n(t)| < q^{2n-1}$ ($0 < q < 1$). La condition (i) est effective et peut être réalisée en imposant des conditions simples à la fonction donnée $p(t)$.

I. Barbălat.

Manaresi, Gabriella: Sopra alcune limitazioni per l'ampiezza delle oscillazioni non-lineari. Atti Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., Anno 243°, Rend., XI. Ser. **2**, Nr. 2, 184—189 (1955).

Consider the special case of Liénard's equation $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, where $f(x) = f(-x)$, $f(x) < 0$ for $|x| < \delta$, $f(x) = \alpha = \text{const.}$ for $|x| > \delta$, $\alpha > \omega_0 \sqrt{2}$.

Let $K = -\int_0^\delta f(x) dx$, $h = \delta + K\alpha^{-1}$, $d = \alpha h(\alpha - \omega_0 \sqrt{2})^{-1}$. Then the limit cycle satisfies $|x| \leq 2\sqrt{2}\omega_0 h(\alpha - \omega_0 \sqrt{2})^{-1} + K\alpha^{-1} + h$ if $\alpha(d - h) < K$, $|x| \leq 3\sqrt{2}\omega_0 h(\alpha - \omega_0 \sqrt{2})^{-1}$ if $\alpha(d - h) > K$.

J. L. Massera.

Urabe, Minoru: A supplement to „Infinitesimal deformation of the periodic solution of the second kind and its application to the equation of a pendulum“, 18 (1954), 183—219. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **19, 113 (1955).**

The author inserts a sentence omitted on page 200, line 9 of his paper (this Zbl. **58**, 79).

J. Szarski.

Jones jr., John: On some third order non-linear differential equations. Portugaliae Math. **14**, 95—98 (1955).

The paper contains many errors which make it difficult to understand what is exactly proved. The results seem corollaries of results of C. T. Taam (this Zbl. **64**, 334) whose arguments are consistently repeated. A lemma referred to as contained in the same paper of C. T. Taam is actually the well known Gronwall lemma.

L. Cesari.

Magnus, Arne: On polynomial solutions of a differential equation. Math. Scandinav. **3**, 255—260 (1955).

Volumentreue holomorphe Abbildungen eines Gebietes des C^2 werden beschrieben durch holomorphe Funktionen $u = u(z_1, z_2)$, $v = v(z_1, z_2)$ mit $u_{z_1} v_{z_2} - u_{z_2} v_{z_1} \equiv 1$. Ist (u, v) eine Lösung dieser Differentialgleichung, so auch $(u + F(v), v)$ und $(u, v + F(u))$ mit beliebigem holomorphem F . Verf. vermutet, daß man jede Polynomlösung der Differentialgleichung von $u(z_1, z_2) = z_1$, $v(z_1, z_2) = z_2$ ausgehend in end-

lich vielen Schritten bei Wahl der F als geeigneter Polynome erhält. Wegen A. Magnus (dies. Zbl. 55, 311) würde hierzu der Nachweis genügen: ist m der Grad von u und n der Grad von v , so ist entweder m Teiler von n oder n Teiler von m . In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt: ist $m \geq 2$ und $n \geq 2$, so ist der größte gemeinsame Teiler von m und n größer als 1.

H. Röhrl.

Jurchescu, M.: Au sujet des fonctions analytiques définies par des équations différentielles non algébriques. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 7, 347—354, russ. u. französ. Zusammenfassg. 354 (1955) [Rumänisch].

Verf. beweist, daß die Integrale der Differentialgleichungen (1) $dy/dx = M(x, y)$, wo $M(x, y)$ eine im Raum der komplexen Veränderlichen (x, y) meromorphe Funktion ist, der sogenannten Iversenschen Eigenschaft genügen, d. h.: ist λ ein Weg auf der Kugel (y) , der von y_0 zu y_1 führt, und e ein Element der Funktion $x(y)$ mit dem Zentrum y_0 , so kann e immer, in jeder vorgeschriebenen Nachbarschaft von λ , bis y_1 analytisch fortgesetzt werden (S. Stoilow, dies. Zbl. 15, 360). Der Beweis stützt sich im wesentlichen auf einen Satz von Zoratti-Groß. Es folgen also für die Integrale von (1), die von Ref. (s. loc. cit., sowie für eine andere Klasse auch dies. Zbl. 60, 232) für die durch ganze Relationen definierten Funktionen bewiesenen funktionentheoretischen Eigenschaften.

S. Stoilow.

Kimura, Toshifusa: Sur une généralisation d'un théorème de Malmquist. II. III. Commentarii math. Univ. Sancti Pauli 3, 97—107, 4, 25—40 (1955).

[Teil I, ibid. 2, 23—28 (1953); dies. Zbl. 52, 89]. Es werden Differentialgleichungen der Form (1) $dy/dx = R(x, y)$ betrachtet, wo R in y rational ist und die Koeffizienten Funktionen von x sind, die sich in der Umgebung des Nullpunktes holomorph verhalten. Malmquist [Acta math. 36, 297—343 (1913)] hatte gezeigt: Wenn (1) eine Lösung hat, die nur endlich viele Blätter hat, sich im Nullpunkt wesentlich singulär verhält, aber keinen beweglichen kritischen Punkt in einer geeigneten Umgebung des Nullpunktes hat, dann ist (1) eine Riccatische Differentialgleichung. Verf. läßt nun die Voraussetzung fallen, die Lösung habe endlich viele Blätter. Er stellt dann in II. vier Typen auf, die für (1) in Frage kommen. (Ein Druckfehler im Ergebnis: Es muß heißen: „ λ réel non nul“ an Stelle von „ λ non réel“). In III kann er dann zeigen, daß bei drei der angegebenen Typen alle Lösungen, die im Nullpunkt wesentlich singulär sind, in jeder Umgebung des Nullpunktes noch unendlich viele kritische Punkte haben. Eine Differentialgleichung, die der Bedingung genügt, muß sich also durch eine Folge endlich vieler algebraischer Transformationen auf die Form $x dy/dx = (\lambda y^{r+1} + P(x, y))/(y^r + Q(x, y))$ (λ reell $\neq 0$) bringen lassen, wo der Grad von P in y höchstens $r+2$ und der Grad von Q in y höchstens r sein darf.

O.-H. Keller.

Schwarz, Binyamin: Complex nonoscillation theorems and criteria of univalence. Trans. Amer. math. Soc. 80, 159—186 (1955).

Ist $p(z)$ regulär in einem Gebiet D , so heißt die Differentialgleichung (1) $y''(z) + p(z)y(z) = 0$ daselbst nichtoszillatorisch, wenn keine ihrer nichttrivialen Lösungen unendlich viele Nullstellen besitzt. Liegt dieser Fall vor und sind $u(z), v(z)$ irgend zwei linear unabhängige Lösungen, so ist $f(z) = u(z)/v(z)$ in D meromorph mit einfachen Polen und $f'(z) \neq 0$ und nimmt jeden Wert nur endlich oft an; es ist $2p(z) = \{f(z), z\}$, wo $\{ \}$ die Schwarzsche Ableitung bedeutet. Die entsprechenden Aussagen, wenn man statt „endlich oft“ „einmal“ setzt, hat Nehari zur Gewinnung von Schlichtheitskriterien ausgewertet (dies. Zbl. 35, 51). Auf entsprechende Weise beweist Verf.: (1) ist nichtoszillatorisch in $|z| < 1$, wenn $|p(z)| \leq 1/(1 - |z|^2)^2$ gilt in einem Ring $x_0 < |z| < 1$; dagegen gibt es zu beliebig kleinem $\delta > 0$ eine Funktion $p(z)$ mit $|p(z)| \leq (1 + \delta)/(1 - |z|^2)^2$ in $|z| < 1$, für die (1) oszillatorisch ist. Das daraus folgende Kriterium dafür, daß eine in $|z| < 1$ meromorphe Funktion jeden Wert nur endlich oft annimmt, wird, mit gewisser Abschwächung, auf analytisch

berandete Gebiete endlichen Zusammenhangs übertragen. Sätze von Nehari (dies. Zbl. 55, 315, Satz III, IV) ergeben sich als Folgerungen. — Der Beweisgedanke läßt sich so ausgestalten, daß er für $|z| < 1$ zu einer unteren Schranke für den nicht-euklidischen Abstand $[z_1 z_2]$ zweier Nullstellen einer Lösung von (1) führt, falls $|p(z)| \leq a/(1 - |z|^2)$, $a > 1$: $|[z_1 z_2]| > \log((\sqrt{a} + 1)/(\sqrt{a} - 1))$; die Größenordnung der Schranke bei $a \rightarrow \infty$ läßt sich nicht verbessern. Umgekehrt folgt aus der Gültigkeit von $|[z_1 z_2]| \geq \log((\sqrt{a} + 1)/(\sqrt{a} - 1))$ für jedes Nullstellenpaar jeder Lösung von (1): $|p(z)| \leq 3a/(1 - |z|^2)$. Endlich werden zwei ähnliche Sätze über den euklidischen Abstand zweier Nullstellen, ohne die Umkehrung, bewiesen und zur Gewinnung von Schranken für die Häufigkeit jedes Funktionswertes gewisser meromorpher Funktionen ausgewertet.

H. Grunsky.

Sikkema, P. C.: A generalization of Nörlund's theory of principal solutions of linear difference equations. I. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 608—620 (1955).

Die Differenzengleichung $y(x + \omega) + y(x) = h(x)$ mit $\omega \neq 0$ wurde von N. E. Nörlund [Acta math. 44, 71—212 (1923)] untersucht. Er zeigte: Ist $h(x)$ eine ganze Funktion, die den Minimaltyp der Ordnung 1 nicht übersteigt, so besitzt die Differenzengleichung eine eindeutig bestimmte Lösung mit derselben Eigenschaft. Die Differenzengleichung kann in eine Differentialgleichung unendlicher Ordnung der Form $\sum a_n y^{(n)}(x) = h(x)$ umgeschrieben werden ($a_0 = 2$, $a_n = \omega^n/n!$ für $n = 1, 2, \dots$). Verf. behandelt den allgemeinen Fall einer solchen Differentialgleichung mit beliebigen konstanten Koeffizienten und zeigt, daß unter derselben Voraussetzung über $h(x)$ stets Lösungen mit entsprechenden Eigenschaften existieren. Für solche Lösungen werden anschließend explizite Darstellungen hergeleitet.

H.-J. Kowalsky.

• **Myshkis (Myškis), A. D.: Lineare Differentialgleichungen mit nachteilendem Argument.** (Hochschulbücher für Mathematik Bd. 17.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1955. 180 S. mit 9 Abb.

Vgl. die Besprechung des russ. Originals in diesem Zbl. 43, 309.

Colombo, Giuseppe: Oscillazioni persistenti di un sistema non lineare dissipativo dovute al ritardo della forza di richiamo. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser. 4, 33—50 (1955).

L'A. étudie l'équation différentielle à paramètre retardé de la forme (*) $\ddot{x} + \varepsilon D \dot{x} + x_\varepsilon - \beta x_\varepsilon^3 = 0$, $\varepsilon > 0$, où $x_\varepsilon = x(t - \varepsilon)$. Il montre que si $\beta > 0$, $\frac{7}{10} < D < 1$, ε assez petit, (*) admet des solutions de régime proches de celles de l'équation $\ddot{x} + x - \beta x^3 = 0$ qui ont des amplitudes comprises [à un $O(\varepsilon)$ près] entre $(1 + D/3\beta)^{1/2}$ et $\frac{5}{2}(1 + D/3\beta)^{1/2}$. La démonstration repose sur la considération de l'équation de Liénard obtenue en prenant pour x le développement limité au terme en ε^2 , en négligeant tout d'abord ce terme puis en examinant son effet sur le comportement des intégrales.

C. Blanc.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

• **Smirnow (Smirnov), M. M.: Aufgaben zu den partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik.** (Hochschulbücher f. Mathematik Bd. 15.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1955. 99 S. m. 8 Abb. DM 3,85.

Es ist dankenswert, daß durch diese von W. Köppe und W. Schweinberger besorgte Übersetzung der russischen Ausgabe jetzt diese Aufgabensammlung (vgl. dies. Zbl. 58, 319) auch in deutscher Sprache — und dazu in einer wohlfeilen Ausgabe — vorliegt. Wer sie durchgearbeitet hat, wird eine gute Grundlage sowohl für viele Anwendungen wie auch für weiterführende Studien erworben haben.

U. T. Bödewadt.

Diaz, J. B.: Some recent results in linear partial differential equations. Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali, Trieste, 25—28 Agosto 1954, 1—29 (1955).

Cet intéressant Mémoire donne un résumé des diverses résultats obtenus dans ces dernières années par le groupe de mathématiciens travaillant à l'Institut for Fluid Dynamics and Applied Mathematics de l'université de Maryland. La plupart de ces résultats ont déjà fait l'objet de publications. Les questions traitées sont plus particulièrement, la solution donnée par M. H. Martin pour le problème de Cauchy pour l'équation d'Euler-Poisson et étendue par Diaz et Martin à l'équation des ondes; la méthode de LeRoux permettant d'obtenir des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles à l'aide d'intégrales définies et ses rapports avec une méthode proposée par Bergmann; une théorie approchée de l'écoulement d'un gaz polytrope (domaine transonique); le problème de Cauchy singulier pour une équation plus générale que l'équation d'Euler-Poisson-Darboux en deux variables spatiales; une étude des bornes supérieures et inférieures de certaines fonctionnelles quadratiques correspondant à des problèmes de Physique mathématique. Une bibliographie étendue termine le mémoire.

F. J. Bureau.

Weinstein, A.: The method of axial symmetry in partial differential equations. Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali, Trieste, 25—28 Agosto 1954, 86—96 (1955).

L'A donne un résumé des résultats obtenus relativement à une classe remarquable d'équations aux dérivées partielles à coefficients singuliers en s'attachant principalement aux équations hyperboliques. Cette classe d'équations comprend comme cas particuliers, l'équation d'Euler-Poisson-Darboux (E. P. D.) et l'équation de Tricomi. L'A. montre le rôle important que joue dans l'étude du problème de Cauchy singulier pour l'équation E. P. D. une certaine relation de récurrence et indique les divers résultats obtenus par lui-même, Diaz, Weinberger, Davis, Blum, Bureau. L'A. considère ensuite le problème de radiation pour l'équation des ondes à un nombre quelconque de variables spatiales et montre le rôle fondamental que joue dans cette étude l'équation E. P. D.

F. J. Bureau.

Mambriani, Antonio: La pluriderivazione e una classificazione delle equazioni differenziali. Rivista Mat. Univ. Parma 6, 321—348 (1955).

Sind X_1, \dots, X_n gegebene Funktionen der n unabhängigen Veränderlichen x_1, \dots, x_n , so ist durch $\mathfrak{D} = X_1 \partial/\partial x_1 + \dots + X_n \partial/\partial x_n$ ein linearer homogener Differentialoperator erster Ordnung definiert, der als „Pluriderivator“ bezeichnet wird. Die Untersuchung der Eigenschaften dieses Operators ergibt, daß er sich ähnlich wie der gewöhnliche Differentialoperator verhält und daß sich unter geeigneten Voraussetzungen auch der inverse Operator \mathfrak{D}^{-1} (Anti-pluriderivator) definieren läßt. Hieraus entwickelt Verf. eine Operatorenmethode, die gestattet, die Lösungen gewisser Klassen von partiellen oder gewöhnlichen Differentialgleichungen explizit anzugeben. Auf Grund der Methode lassen sich die Differentialgleichungen in der folgenden Weise klassifizieren: Eine Differentialgleichung wie $\Phi(x_1, \dots, x_n, z, \mathfrak{D}z, \dots, \mathfrak{D}^m z) = 0$ gehört zur ersten Klasse, eine wie $\Phi(x_1, \dots, x_n, z, \mathfrak{D}_1 z, \dots, \mathfrak{D}_1^{m_1} z, \mathfrak{D}_2 z, \dots, \mathfrak{D}_2^{m_2} z) = 0$ zur zweiten Klasse, usw. An Hand von Beispielen werden verschiedene Möglichkeiten der Anwendung dieser Operatorenmethode demonstriert.

W. Quade.

Blondel, Jean-Marie: Sur une classe d'équations aux dérivées partielles linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris 240, 1181—1183 (1955).

Der Verf. betrachtet die Differentialgleichung

$$(1) \quad \partial^{2n} z / \partial x^n \partial y^n + P(x, y; \partial/\partial x, \partial/\partial y) z = \Phi(x, y)$$

(P Polynom in $\partial/\partial x, \partial/\partial y$, in jeder von beiden vom Grade $< n$, dessen Koeffizienten unbeschränkt stetig differenzierbare Funktionen von x, y sind; Φ gegebene summierbare Funktion) mit den Anfangsbedingung

$$(2) \quad (\partial^i z / \partial y^i)(x, 0) = f_i(x), \quad (\partial^i z / \partial x^i)(0, y) = g_i(y) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

(f_i, g_i gegebene summierbare Funktionen). Existenz und Eindeutigkeit der Funktion $z(x, y)$ als Lösung von (1), (2) sind gesichert. Der Verf. gewinnt eine Elementar-

lösung von (1) in der folgenden Weise: Ist $z(x, y)$ Lösung von (1) mit $\Phi = 0$ und mit $f_0 = \dots = f_{n-2} = g_0 = \dots = g_{n-2} = 0$, $f_{n-1}(x) = g_{n-1}(x) = x^{n-1}/\Gamma(n)$, so ist $z(x, y) Y(xy)/2$ die gesuchte Elementarlösung (Y Heavisidefunktion). Im Falle eines Polynoms P mit konstanten Koeffizienten kann man die Elementarlösung explizit angeben.

H. König.

Chen, Y. W.: Degenerate solutions of partial differential equations. Proc. Amer. math. Soc. 6, 855—861 (1955).

Soit l'équation aux dérivées partielles (1) $L(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(p_1, \dots, p_n) \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j = 0$ avec $p_i = \partial u / \partial x_i$, $a_{ij} = a_{ji}$, les variables indépendantes étant x_1, \dots, x_n . L'A. s'occupe des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des ondes s -uples, c'est-à-dire des solutions de (1) telles que (2) $p_x = F^\alpha(p_1, \dots, p_s)$, $(\alpha = s+1, \dots, n)$ les fonctions F^α ayant des dérivées continues du second ordre. Par l'emploi de la transformation de contact $x'_k = p_k$ ($k = 1, \dots, s$), $x'_\alpha = x_\alpha$ ($\alpha = s+1, \dots, n$), $u' = u - \sum_{k=1}^s p_k x_k$, on trouve, en vertu de (2),

$u' = \sum_{\alpha=s+1}^n x'_\alpha F^\alpha(x'_1, \dots, x'_s) + G(x'_1, \dots, x'_s)$ et $p'_k = \sum_{\alpha=s+1}^n x'_\alpha \partial F^\alpha / \partial x'_k + \partial G / \partial x'_k$, ($k = 1, \dots, s$). Des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une onde s -uple, telles que le déterminant $|\partial^2 u / \partial x_k \partial x_l|$, ($k, l = 1, \dots, s$) soit $\neq 0$, sont celles que les fonctions F^α et G vérifient un système de C_n^{s-1} équations du second ordre aux variables p_k ($k = 1, \dots, s$):

$$(a_{lk} + 2 a_{l\beta} \partial F^\beta / \partial p_k + a_{\alpha\beta} \partial F^\alpha / \partial p_l \cdot \partial F^\beta / \partial p_k) P_{lk}^{(m)} = 0$$

avec la convention de l'indice muet ($l, k = 1, \dots, s$), où les $P_{lk}^{(m)}$ sont certains polynômes homogènes de degré $s-1$ par rapport aux dérivées secondes de F^α et de G et que $|x_\alpha \partial^2 F^\alpha / \partial p_l \partial p_k + \partial^2 G / \partial p_l \partial p_k| \neq 0$. Les cas où $s=2$ ou bien $s=n-1$ conduisant au même nombre d'équations que de fonctions inconnues est examiné à part et un théorème d'existence est donné. Les considérations précédentes sont susceptibles d'applications à la dynamique des gaz.

C. Iacob.

Rachajski, B.: Sur les systèmes en involution d'équations du second ordre. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 7, 11—19, français. Zusammenfassg. 20 (1955) [Serbisch].

E. Goursat avait étudié les conditions sous lesquelles une équation $F(x, y, z, C_1, C_2, C_3, C_4) = 0$ représentait une intégrale complète d'un système des deux équations du second ordre

$$(1) \quad r + f(x, y, z, p, q, s) = 0, \quad t + \varphi(x, y, z, p, q, s) = 0,$$

en involution de G. Darboux-S. Lie, à désignations usuelles. Interprétant (1) comme une courbe, dans l'espace de r, s, t , représentant l'arête de rebroussement d'une surface développable, enveloppant un plan dans l'espace considéré, E. Goursat s'était limité par l'étude d'équations (1) qui n'étaient pas linéaires. Cette interprétation, paraissant trop arbitraire, donna l'occasion à l'A. de constater, en citant un exemple, que la méthode de E. Goursat ne garantissait point la généralité des conclusions et exigeait des considérations complémentaires. Cela étant l'A. expose une méthode purement analytique qui permet de résoudre le problème posé dans toute la généralité, concernant les équations (1) de la forme soit générale, soit linéaire de même non seulement dans le cas d'involution de G. D.-S. L., mais aussi dans le cas de l'involution de l'intégrabilité complète. Le résultat obtenu est suivant: La formule

$$(2) \quad z = V(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4), \text{ posant}$$

$$\Delta_{x^2} = D\left(\frac{V}{C_1}, \frac{V_x}{C_2}, \frac{V_y}{C_3}, \frac{V_{x^2}}{C_4}\right), \quad \Delta_{y^2} = D\left(\frac{V}{C_1}, \frac{V_x}{C_2}, \frac{V_y}{C_3}, \frac{V_{y^2}}{C_4}\right), \quad \Delta_{xy} = D\left(\frac{V}{C_1}, \frac{V_x}{C_2}, \frac{V_y}{C_3}, \frac{V_{xy}}{C_4}\right),$$

représente l'intégrale complète du système (1), dans le cas de l'involution de G. D.-S. L., sous l'hypothèse $\Delta_{xy} \geq 0$, si l'expression $\Delta_{x^2} \Delta_{y^2} - \Delta_{xy}^2$ est identiquement

nulle. La conclusion analogue a lieu pour le système:

$$(3) \quad s = F(x, y, z, p, q, r), \quad t = P(x, y, z, p, q, r)$$

en involution de G. D.-S. L., si l'on avait $\Delta_{x^2} \geq 0$. Or, si la formule (2) définit l'intégrale complète des systèmes (1) ou (3) en involution d'intégrabilité complète, l'expression $\Delta_{x^2} \Delta_{y^2} - \Delta_{xy}^2$ est distincte de zéro. L'A. se réserve l'étude des intégrales considérées, en profitant les propriétés caractéristiques établies, qui jouent un rôle important dans la théorie des intégrales citées. *N. Saltykow.*

● **John, Fritz:** *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations.* (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics. No. 2.) New York: Interscience Publishers, Inc. 1955, VIII, 172 p. 10 illus. \$ 4,50.

Le présent ouvrage contient essentiellement deux parties: dans la première, l'A. utilise la décomposition d'une fonction arbitraire en ondes planes pour étudier le problème de Cauchy (problème des valeurs initiales) pour les équations aux dérivées partielles homogènes hyperboliques à coefficients constants et la solution élémentaire d'une équation (ou d'un système) elliptique à coefficients analytiques; dans la seconde, certaines identités entre des moyennes sphériques (ou ellipsoïdales) sont appliquées à la détermination d'une fonction par ses intégrales sur des sphères de rayon donné, à l'étude des propriétés de dérivabilité des solutions des systèmes elliptiques et enfin, à l'étude de la régularité de certaines transformées intégrales des solutions d'équations linéaires non elliptiques. Dans le chapitre I, l'A. étudie la décomposition d'une fonction arbitraire en ondes planes, i. e. en des fonctions dont les surfaces de niveau sont des plans parallèles. Une telle décomposition est donnée par l'intégrale de Fourier. Mais, comme le remarque l'A., d'autres décompositions plus simples peuvent être utilisées; en particulier, celle de J. Radon [Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. 69, 262—277 (1917)]. Pour la connection de ce problème avec l'équation des ondes, cf. P. Mader, Math. Z. 26, 646—652 (1927); pour une solution générale du problème de Radon montrant sa relation avec la partie finie et la partie logarithmique de certaines intégrales divergentes, cf. F. J. Bureau, Commun. pure appl. Math. 8, 143—202 (1955; ce Zbl. 64, 92), spec. 183—186.] Les résultats du chap. I sont appliqués dans le chap. II à la solution du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles homogènes totalement hyperboliques à coefficients constants; l'A. retrouve les formules connues (Herglotz, Petrowsky, Bureau). Signalons ici l'étude de la surface normale de l'équation; celle du domaine de dépendance des solutions pour n impair et $\leq m-1$ (n nombre de variables indépendantes et m ordre de l'équation); l'application des formules obtenues à l'équation des ondes planes. Enfin, l'A. considère le cas des équations dont la surface normale possède des points multiples. [A noter que la solution du problème de Cauchy s'exprime ici, en général, par un laplacien itéré appliqué à une intégrale ordinaire; une étude plus complète fait apparaître les difficultés classiques et introduit les parties finies et les parties logarithmiques des intégrales divergentes.] Le chap. III est consacré à la construction de la solution élémentaire de l'équation (ou d'un système) linéaire totalement elliptique à coefficients analytiques; la méthode utilise dans le cas général, le théorème de Cauchy-Kowalewski. Pour une équation à coefficients constants, on obtient explicitement la solution à l'aide de quadratures; ce cas est important car il fournit la paramétrix utilisée dans l'étude de l'équation linéaire totalement elliptique à coefficients non analytiques. L'A. étudie ensuite [chap. IV] les moyennes sphériques des fonctions continues dans un domaine. Il donne une identité exprimant une moyenne itérée par une intégrale à une dimension portant sur une moyenne et en déduit l'expression d'une fonction par ses moyennes sphériques itérées. Relation avec l'équation différentielle de Darboux. Les moyennes ellipsoïdales sont étudiées dans le chapitre V. L'A. donne d'abord le théorème d'Asgeirsson et l'applique à l'équation de Darboux et à celle des ondes. Il étudie ensuite une identité due à A. Howard et plus générale

que celle d'Asgeirsson; cette identité permet de transformer une équation différentielle homogène d'ordre $2m$ à coefficients constants en une équation analogue d'ordre m ayant un plus grand nombre de variables indépendantes. Dans le chapitre VI, l'A. étudie la détermination d'une fonction par ses moyennes sur les sphères de rayon constant et indique la relation de ce problème avec les fonctions moyennepériodiques. Les deux derniers chapitres du livre sont consacrés à l'application des résultats du chapitre IV à l'étude de la dérivabilité des solutions des équations (ou des systèmes) linéaires ou non linéaires elliptiques à coefficients suffisamment réguliers; il donne une démonstration de l'analyticité des solutions des équations linéaires elliptiques à coefficients analytiques et étudie (chap. VIII) la régularité de certaines transformées intégrales des solutions d'équations linéaires non elliptiques. L'A. a réussi à présenter sous une forme simple un grand nombre des résultats importants de la théorie des équations aux dérivées partielles. Si la méthode utilisée permet une présentation „unifiée“ des questions traitées, elle impose cependant une restriction assez rigoureuse des sujets étudiés et ne permet pas toujours d'obtenir sans autres développements, les résultats les plus complets. L'ouvrage est d'une lecture aisée, d'une présentation agréable et son étude doit être recommandée à ceux qui s'intéressent aux équations aux dérivées partielles.

F. J. Bureau.

Hörmander, Lars: On the theory of general partial differential operators. Acta math. 94, 161—248 (1955).

Die Arbeit gibt ein Konzept einer allgemeinen Theorie linearer partieller Differentialoperatoren n -ter Ordnung in ν unabhängigen Veränderlichen und enthält als solches nützliche allgemeine Definitionen, die die für Operatoren zweiter Ordnung gebräuchlichen Begriffe der Elliptizität und Hyperbolizität sinnvoll verallgemeinern. Als Grundlage dient, wie bisher in allen Betrachtungen von Differentialoperatoren höherer als zweiter Ordnung, die Theorie des Hilbertschen Raumes. Ein linearer Differentialoperator wird definiert durch $\mathfrak{P}_u = \sum a^{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x) (1/i) \partial/\partial x^{\alpha_1} \dots (1/i) \partial/\partial x^{\alpha_n}$. Die Funktion $u(x)$ ist dabei im allgemeinsten Falle definiert auf einer ν -dimensionalen, unendlich oft differenzierbaren Mannigfaltigkeit Ω , die Differentiationen $\partial/\partial x^\alpha$ und die Koeffizienten $a^{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x)$ beziehen sich auf lokal eingeführte Koordinaten. Ist speziell Ω ein Gebiet des ν -dimensionalen Vektorraumes, so werden Operatoren mit konstanten Koeffizienten definiert. Der Hauptteil der Arbeit befaßt sich mit konstanten Koeffizienten. \mathfrak{P} wird betrachtet im Bereich $C_0^\infty(\Omega)$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen, die außerhalb eines Kompaktums verschwinden. Nach Einführung der formalen Adjungierten $\bar{\mathfrak{P}}$ und des Hilbertraumes $L_2(\Omega)$ wird, wie allgemein üblich, ein minimaler Operator P_0 und ein maximaler Operator P eingeführt durch $P_0 = \mathfrak{P}^{**}$ und $P = \bar{\mathfrak{P}}^*$ (* bezeichne die Adjungierte im Hilbertraum). \mathfrak{P} heißt stärker als \mathfrak{Q} , wenn $\mathfrak{D}_{P_0} \subset \mathfrak{D}_{\mathfrak{Q}}$; \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} heißen gleich stark, wenn $\mathfrak{D}_{P_0} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{Q}}$ ist. Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß \mathfrak{P} stärker ist als \mathfrak{Q} , wird die Ungleichung $\|\mathfrak{Q}u\|^2 \leq C(\|\mathfrak{P}u\|^2 + \|u\|^2)$, $u \in C_0^\infty$ angegeben. Ferner: $\|\mathfrak{Q}u\|^2$ ist dann und nur dann gleichmäßig beschränkt für jedes u aus \mathfrak{D}_{P_0} , wenn $\sup_{\mathfrak{Q}} \|\mathfrak{Q}u\|^2 \leq C(\|\mathfrak{P}u\|^2 + \|u\|^2)$, $u \in C_0^\infty$. Sei $\tilde{P}(\xi) = \left(\sum_{\alpha} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 \right)^{1/2}$, wo $P(\xi)$ das dem Differentialoperator \mathfrak{P} zugrunde liegende Polynom und (α) eine Ableitung α -ter Ordnung nach $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ bedeute. Die Summation werde über alle möglichen α erstreckt, es möge sich ferner um den Fall konstanter Koeffizienten handeln. Der Verf. zeigt, daß die Bedingung $\tilde{Q}(\xi)/\tilde{P}(\xi) \leq C$ notwendig und hinreichend dafür ist, daß \mathfrak{P} stärker als \mathfrak{Q} ist. Ferner: $\mathfrak{Q}u$ ist dann und nur dann stetig für jedes $u \in \mathfrak{D}_{P_0}$, wenn $\int \tilde{Q}(\xi)^2/\tilde{P}(\xi)^2 d\xi < \infty$ gilt. Sowie: $Q_0 P_0^{-1}$ ist vollstetig dann und nur dann, wenn $\tilde{Q}(\xi)/\tilde{P}(\xi) \rightarrow 0$, $|\xi| \rightarrow \infty$. Interessant sind ferner folgende Betrachtungen: Der Quotientenraum $G_P/G_{P_0} = C$ (wo G_Q den Graphen des Operators Q bezeichne) wird Cauchy-Raum genannt. Für $u \in \mathfrak{D}_P$ heiße die zugehörige Restklasse

Γu . Ein Randwertproblem ist dann definiert als Problem, eine Lösung von $Pf = g$, $\Gamma f \in B$ zu finden, wo B irgendeine lineare Mannigfaltigkeit des Raumes C sei. Ein Randwertproblem wird als „korrekt gestellt“ (correctly posed) bezeichnet, wenn die Einschränkung \hat{P} von P auf die f mit $\Gamma f \in B$ eine beschränkte, in ganz \S definierte Reziproke hat. Als sinnvolle-Verallgemeinerung des Elliptizitätsbegriffes erweist sich folgende Definition: \mathfrak{P} heiße ein Operator lokalen Typs, wenn $u\psi \in \mathfrak{D}_P$ gilt für jedes $u \in \mathfrak{D}_P$ und $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Es wird gezeigt, daß für Operatoren lokalen Typs die Lösungen von $Pu = f$ dieselben lokalen Differenzierbarkeitseigenschaften haben wie bei elliptischen Operatoren. Ferner enthält die Arbeit eine Diskussion gewisser spektraltheoretischer Eigenschaften des Eigenwertproblems $\hat{P}u = \lambda u$, wo $P_0 \subset \hat{P} \subset P$ und der Operator \mathfrak{P} vom lokalen Typ ist.

H. O. Cordes.

Courant, R.: Remarks and problems concerning hyperbolic systems. Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali, Trieste, 25—28 Agosto 1954, 168—173 (1955).

È una conferenza di carattere riassuntivo e con numerose citazioni circa i sistemi (di tipo iperbolico) di equazioni a derivate parziali. Nella prima parte si espone qualche veduta circa il concetto di iperbolicità. Se $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = t$ sono le variabili indipendenti, si introduce il sistema

$$(1) \quad L_i(u) \equiv \sum_{\nu=1}^{n+1} \sum_{j=1}^k a_i^{j\nu} \frac{\partial u_j}{\partial x_\nu} = b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

con $b_i = B_i + \sum_{j=1}^k B_i^j u_j$; $a_i^{j\nu}, B_i, B_i^j$ sono funzioni di x_1, \dots, x_n, t . Sia $\sigma \equiv (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ un punto fisso; si consideri la combinazione lineare $\xi = \alpha_1(x_1 - \sigma) + \dots + \alpha_n(x_n - \sigma_n)$ e nel sistema (1) si ponga $u_j = \Phi_j(\xi, t)$ ($j = 1, 2, \dots, k$). Si ottiene così un sistema di equazioni a derivate parziali nelle due sole variabili indipendenti ξ, t . Se questo è di tipo iperbolico per tutte le possibili combinazioni lineari ξ , il sistema (1) è detto di tipo iperbolico. Viene poi sviluppato il noto concetto di sistema di tipo iperbolico in due variabili indipendenti. È esposto un metodo, dovuto a Gårding, per ricondursi, mediante integrazioni, dal caso di $n + 1$ variabili indipendenti al caso di due variabili indipendenti. Nella seconda parte della conferenza si accenna ai metodi di calcolo numerico (mediante macchine calcolatrici) della soluzione di un sistema di tipo iperbolico.

M. Cinquini-Cibrario.

Sestini, Giorgio: Sulla risoluzione di un notevole gruppo di problemi retti da equazioni di tipo parabolico. Rivista Mat. Univ. Parma 6, 349—352 (1955).

C'est le sujet de la communication de l'A. faite au 5^e Congrès de l'Union Mathématique Italienne (octobre 1955). La communication concerne la portée de la méthode des approximations successives dans la résolution des problèmes aux limites relatifs aux équations paraboliques linéaires, appliquée par Levi et Gevrey. L'A. examine le cas du troisième problème aux limites, le ramenant à une équation intégrale résoluble par approximations successives.

M. Krzyżański.

Pini, Bruno: Sul primo problema di valori al contorno per le equazioni paraboliche lineari. Rivista Mat. Univ. Parma 6, 215—237 (1955).

Le travail concerne le premier problème de Fourier pour l'équation parabolique

$$(1) \quad u''_{xx} - u'_y + a(x, y)u'_x + b(x, y)u = 0$$

relatif à un domaine D défini par les inégalités $y_1 \leq y \leq y_2, \chi_1(y) \leq x \leq \chi_2(y)$. Les coefficients de (1) et la dérivée a'_x satisfont par hypothèse à la condition de Hölder dans un domaine ouvert contenant le domaine D . En introduisant la fonction de Green relative à ce problème, l'A. établit une formule fondamentale permettant d'étendre à (1) le second théorème de Harnack. Ensuite l'A. expose l'idée de la démonstration de l'existence d'une solution généralisée au sens de Wiener du problème. Un point P_0 de l'une des courbes $x = \chi_k(y)$ ($k = 1, 2$) est dit régulier relativement au problème posé, si la solution généralisée tend vers la valeur, déter-

minée par les conditions aux limites au point P_0 , pour $P \rightarrow P_0$. L'A. démontre qu'afin qu'un point P_0 soit régulier relativement au problème considéré pour (1), il faut et il suffit qu'il soit régulier relativement au problème analogue pour l'équation de la chaleur $u''_{xx} - u'_y = 0$ dans le même domaine. Ce théorème est analogue à ceux de W. Püschel (ce Zbl. 3, 208), G. Tautz (ce Zbl. 10, 356; 37, 70) et O. Olejnik (ce Zbl. 35, 187) relatifs aux équations elliptiques. *M. Krzyżański.*

Reid, Walter P.: A method for solving certain boundary value problems. J. Soc. industr. appl. Math. 3, 259—261 (1955).

Durch eine einfache Transformation lassen sich manchmal Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen auf einfachere zurückführen. Z. B. geht das Wärmeleitungsproblem $h^2 u_{xx} - u_t = 0$; $u(x, 0) = g(x)$, $a u(0, t) - \partial u(0, t)/\partial x = 0$ durch die Substitution $w(x, t) = a u(x, t) - \partial u(x, t)/\partial x$ über in $h^2 w_{xx} - w_t = 0$; $w(x, 0) = a g(x) - dg/dx = q(x)$, $w(0, t) = 0$. Aus der Lösung des transformierten Problems erhält man leicht die des ursprünglichen. *A. Weigand.*

Beckert, Herbert: Abschätzungen bei linearen elliptischen Systemen 1. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. Math. Nachr. 13, 327—342 (1955).

Im Anschluß an Arbeiten von Schauder (dies. Zbl. 8, 255; 10, 207), Nirenberg (dies. Zbl. 50, 98) und des Verf. (dies. Zbl. 43, 96) werden die Lösungen elliptischer Systeme 1. Ordnung mit ihren ersten Ableitungen nebst Hölderkonstanten in Abhängigkeit von der rechten Seite und der Randfunktion apriori abgeschätzt. Das System

$$(I) \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} + \sum_{k=1}^n \left[a_{ik}(x, y) \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_{ik}(x, y) u_k \right] + \varphi_i(x, y) = 0$$

($i = 1, 2, \dots, n$; $n = 2q$) wird gemäß den erwähnten Arbeiten des Verf. in eine Form gebracht, in welcher paarweise Beltramische Systeme von zwei Funktionen auftreten. Dabei sind die Funktionen $a_{ik}, b_{ik}, \varphi_i$ gleichmäßig α - H -stetig. Man erhält so $q = n/2$ Gleichungspaare. Ähnlich wie bei Schauder wird das System auf ein solches mit konstanten Koeffizienten $a_{ik}(x_0, y_0), b_{ik}(x_0, y_0)$ zurückgeführt, wo (x_0, y_0) ein beliebiger herausgegriffener „Parameterpunkt“ ist, in dessen Nähe die Abschätzung zunächst erfolgt. Jedes Beltramische System läßt sich affin in ein Cauchy-Riemannsches transformieren. Dann läßt sich die Abschätzungsmethode von Schauder übertragen, da die dort benutzten Hilfssätze über die Poissonsche Gleichung und Gleichung mit konstanten Koeffizienten sich auch für C.-R.-Systeme mittels Integralgleichungen beweisen lassen. Es ergibt sich: Ist u, v ein Lösungssystem von (I) mit in $D + S$ α - H -stetigen Ableitungen erster Ordnung, so gilt in $D + S$

$$\|u_i\|_{\alpha,1}^{D+S} \leq C \left\{ K + H + \sum_{k=1}^n \|u_k(s)\|_{\alpha,1}^S \right\}.$$

C hängt nur ab von den Schranken für die Beträge von $a_{ik}, b_{ik}, \varphi_i$ und deren H -Konstanten sowie von der Determinante der normierten Eigenlösungen der Matrix $(a_{ik} - \lambda \delta_{ik})$. $\| \cdot \|_{\alpha,1}^{D+S}$ ist die Bezeichnung von Schauder, $K = \text{Max } |u_i|$, $H = \sum_{i=1}^n \|\varphi_i\|_{\alpha}^{D+S}$. Für die Lösungen des quasilinearen Systems

$$(I') \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} + \sum_{k=1}^n a_{ik}(x, y) \frac{\partial u_k}{\partial x} = f_i(x, y, u) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

mit in $D + S$ stetigen $a_{ik}(x, y), f_i(x, y, u)$ ($|f_i| \leq m$) ergibt sich mittels der Methode von Nirenberg: Die Lösungen von (I') genügen in $D + S$ einer H -Bedingung, deren Exponent und Koeffizient von m, n, d , dem Maximum der $|u_i|$ in $D + S$ und der $|\partial u_i/\partial x| |\partial u_i/\partial y|$ längs S abhängen. *G. L. Tautz.*

Miranda, C.: Systèmes elliptiques d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali, Trieste, 25—28 Agosto 1954, 30—38 (1955).

In neuerer Zeit haben die Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus—

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11} u_x + a_{12} u_y + b_{11} v_x + b_{12} v_y = c_{11} u + c_{12} v + f_1 \\ a_{21} u_x + a_{22} u_y + b_{21} v_x + b_{22} v_y = c_{21} u + c_{22} v + f_2, \end{cases}$$

mit $\sum \begin{vmatrix} a_{1i} & b_{1k} \\ a_{2i} & b_{2k} \end{vmatrix} \lambda_i \lambda_k$ positiv definit, viel Interesse gefunden. Die mit (*) verbundenen Problemstellungen lassen sich in vier Gruppen einteilen. 1. Das Cauchy-Problem für (*). 2. Die Verallgemeinerung des auf den Cauchy-Riemannschen Gleichungen beruhenden Teils der Funktionentheorie auf Systeme der Gestalt (*) mit $f_1 = f_2 = 0$. 3. Die Randwertprobleme für (*). Dabei wird (*) in einem Gebiet G mit Berandung \bar{G} und Bogenlänge s betrachtet. Auf \bar{G} wird die Randbedingung $a(s)u + b(s)v = \varphi$ gestellt. In allen Fällen, wo (*) auf eine Gleichung zweiter Ordnung reduzierbar ist, werden gleichzeitig Ergebnisse für die dritte Randwertaufgabe bei elliptischen Gleichungen zweiter Ordnung gewonnen. 4. Die Zusammenhänge von (*) mit der Variationsrechnung, bei der (*) als Eulersche Gleichung auftritt. Verf. gibt einen Überblick über die bisher erzielten Ergebnisse für die Gruppen 3. und 4.

G. Hellwig.

Douglis, Avron: Function-theoretic properties of certain elliptic systems of first-order linear equations. Lectures on Functions of a complex Variable, 335—340 (1955).

Vgl. die ausführliche Darstellung, besprochen dies. Zbl. 50, 319. *H. Grunsky.*

Bers, L. and I. Nirenberg: On a representation theorem for linear elliptic systems with discontinuous coefficients and its applications. Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali, Trieste, 25—28 Agosto 1954, 111—140 (1955). **Erratum.** Ibid. 230 (1955).

The authors are concerned with linear uniform elliptic systems of two first order equations and two unknown functions in the unit disk. The coefficients of the system are only assumed to be measurable and the solutions are generalized ones with so called strong derivatives. The main theorem (representation theorem) permits to represent every solution $w = u + i v$ of such a system as $w(z) = e^{s(z)} f(\chi(z)) + s_0(z)$ where s and s_0 are continuous and $\chi(z)$ is a homeomorphism, which satisfy Hölder conditions expressed in terms of the uniform ellipticity of the system; $f(z)$ is an analytic function. As an application of this representation theorem, the authors show that the solutions of the systems which are concerned with, have some properties in common with the analytic functions (unique continuation theorem). They discuss also some boundary problems for linear systems and related quasilinear systems. In the appendix the results are compared with those based on stronger hypotheses, which follow in the theory of pseudoanalytic functions. *I. Berstein.*

Bers, L. and L. Nirenberg: On linear and non-linear elliptic boundary value problems in the plane. Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali, Trieste, 25—28 Agosto 1954, 141—167 (1955).

The authors prove existence and uniqueness theorems for quasilinear and non-linear partial differential equations of the second order and elliptic type for an unknown function of two independent variables. The problems they are concerned with, are the Dirichlet and Neumann problems in the unit disk. The proof, which is achieved by topological methods (Schauder principle) is preceded by the finding of a priori estimates for the solutions, in the framework of a general theory of linear partial elliptic equations with bounded measurable coefficients. As a main tool for deriving a priori estimates, the authors use a representation theorem for the

solutions of linear elliptic systems (cf. the preceding review) and a Harnack type inequality. The proofs for linear and quasilinear equations are described completely, but the authors give only a few indications concerning the proofs for the general nonlinear case. *I. Berstein.*

Hartman, Philip and Aurel Wintner: Binary, linear, elliptic, partial differential equations. Duke math. J. **22**, 515—524 (1955).

Im ersten Teil wird das Problem behandelt, die lineare, elliptische Differentialgleichung

$$(A(x, y) \varphi_x + B_1(x, y) \varphi_y)_x + (B_2(x, y) \varphi_x + C(x, y) \varphi_y)_y + E(x, y) \varphi = 0$$

unter schwächeren Bedingungen auf die Normalform

$$(p \varphi_x)_x + (p \varphi_y)_y + l \varphi = 0; \quad p > 0$$

zu transformieren. Im zweiten Teil zeigen die Verff. u. a., daß das elliptische System erster Ordnung: $\psi_u = \varphi_v/g$; $\psi_v = -\varphi_u/g$ mit lediglich stetigem $g(u, v) > 0$ selbst im Kleinen keine nichtkonstante Lösung der Klasse C^1 zu besitzen braucht. *H. Beckert.*

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On uniform Dini conditions in the theory of linear partial differential equations of elliptic type. Amer. J. Math. **77**, 329—354 (1955).

Die Verff. konstruieren u. a. in einem hinreichend kleinen Kreis die Lösungen des Dirichletschen Problems der linearen elliptischen Differentialgleichung:

$$(A_1 u_x + A_2 u_y)_x + (A_3 u_x + A_4 u_y)_y + C u = F$$

unter den Voraussetzungen, daß (1) die Koeffizienten A_i oder (2) DA_i , C , F gleichmäßigen Dini-Bedingungen genügen, d. h. etwa für $|A_i(P) - A_i(Q)| \leq \text{const } \alpha(P, Q)$ für alle Punkte P, Q gilt, wobei $\alpha(r)$ monoton wächst, und $\int_0^+ \alpha(r) r^{-1} dr$ beschränkt

bleibt. Im Fall (1) liegen die Lösungen in der Klasse C^1 und im Fall (2) in der Klasse C^2 . Die für den Beweis nötigen Abschätzungen werden nach den Methoden von Hopf (dies. Zbl. **2**, 340) vollzogen. Wie ein Beispiel zeigt, brauchen sich die Dini-Bedingungen für die Koeffizienten nicht in den Ableitungen der Lösungen zu reproduzieren, wie man das von den Hölderbedingungen weiß. *H. Beckert.*

Diaz, J. B. and G. S. S. Ludford: Reflection principles for linear elliptic second order partial differential equations with constant coefficients. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **39**, 87—95 (1955).

Es handelt sich um den Beweis folgender Aussage: Eine Lösung $u(x)$ einer beliebigen linearen, elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und mit n unabhängigen Variablen, die in einem Gebiet definiert ist, das an eine Hyperebene E anstößt, kann stets über diese Hyperebene hinaus fortgesetzt werden, falls ein Ausdruck der Form $\partial u / \partial s + ku$ bei jeder Annäherung an E gegen Null strebt. Mit $\partial / \partial s$ sei dabei die Differentiation in Richtung eines gewissen, für alle x konstanten Vektors bezeichnet, der nicht parallel zur Hyperebene ist; k sei eine reelle Konstante. *H. O. Cordes.*

Magenes, Enrico: Osservazioni su alcuni teoremi di completezza connessi con i problemi misti per le equazioni lineari ellittiche. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **10**, 452—459 (1955).

L'A. considera una equazione ellittica a derivate parziali lineare omogenea del secondo ordine in un dominio D dello spazio euclideo S_m . Egli considera le soluzioni di tale equazione continue in D con le loro derivate parziali prime (frontiera inclusa), che su una parte J_2 della frontiera di D hanno derivata conormale nulla. In opportune ipotesi per i coefficienti della equazione, per D ed J_2 , egli dimostra che l'insieme di tali soluzioni è un sistema completo nello spazio $L^{(2)}$ delle funzioni di quadrato sommabile sulla restante parte J_1 della frontiera di D . Nel caso $m = 2$ stabilisce l'analogo teorema di completezza per lo spazio C delle funzioni continue su J_1 . *G. Fichera.*

Stampacchia, Guido: Osservazioni sull'esistenza e sull'unicità della soluzione dei problemi al contorno misti per equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico. *Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli*, IV. Ser. **22** (94), 144—148 (1955).

L'A. considera il problema misto per l'equazione lineare del secondo ordine di tipo ellittico autoaggiunto ed osserva che una condizione posta dal recensore (questo *Zbl.* **35**, 186) e che assicura l'unicità di una soluzione generalizzata, avente integrale di Dirichlet finito, è equivalente al supporre che la detta soluzione rende minimo il funzionale per il quale le equazioni del problema misto rappresentano la condizione di Eulero. È anche dimostrato un teorema di unicità per un problema misto relativo ad una equazione ellittica non lineare.

G. Fichera.

Aronszajn, N.: On coercive integro-differential quadratic forms. Conference on partial differential equations, Univ. Kansas, Summer 1954, 94—106 (1955).

Verf. führt den für elliptische Differentialprobleme wichtigen Begriff der Koerzivität ein: Die quadratische Form:

$$Q(u) = Q_x(u) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{\bar{\Omega}_N} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u \bar{D}^\beta \bar{u} dx + \int_{\partial\bar{\Omega}_N} \sum b_{\mu\nu}(x) D^\mu u \bar{D}^\nu \bar{u} dx,$$

$|\mu| + |\nu| \leq 2m + 1$; $|\mu|, |\nu| \leq m$ [der zweite Term enthält normale Ableitungen bis zur Ordnung $(m - 1)$] heißt koerziv auf $C^m(\bar{\Omega}_N)$ falls

$$\|u\|_m^2 \leq c(Q(u) + c_1 \|u\|_0^2), \text{ wo } \|u\|_k^2 \stackrel{\text{df}}{=} \int_{\bar{\Omega}_N} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^2 dx.$$

Es werden folgende Kriterien für Koerzivität der Form Q angeführt: 1. Für die Koerzivität von Q (auf $\bar{C}^m(\Omega_N)$) ist hinreichend, daß es für jedes $x \in \bar{\Omega}_N$ eine solche Umgebung $U_x \ni x$ gibt, daß die Form Q koerziv auf der Menge der Funktionen mit Trägern in $U_x \cap \bar{\Omega}_N$ sei. 2. Q ist koerziv, wenn es zu jedem $\hat{x} \in \bar{\Omega}_N$ eine Umgebung $U_{\hat{x}} \ni \hat{x}$ gibt, daß die Form $Q_{\hat{x}}$ (mit konstanten Koeffizienten $a_{\alpha\beta}(\hat{x})$) gleichmäßig koerziv auf Funktionen mit Trägern in $U_{\hat{x}} \cap \bar{\Omega}_N$ ist. 4. Damit $Q(q) \stackrel{\text{df}}{=} (A\varphi, \varphi)_0$, $(\varphi \in C_0^m(\Omega_N))$ koerziv sei, muß der Operator A elliptisch sein. 5. Es seien A_k Operatoren m -ter Ordnung; $a_k(y, \xi)$ bedeute das charakteristische Polynom von A_k im Punkte $y \in \bar{\Omega}_N$. Die Form $\int_{\bar{\Omega}_N} \sum_k |A_k u|^2 dx$ ist dann und nur dann koerziv, falls $1^\circ A \stackrel{\text{df}}{=} \sum A_k^- A_k$ elliptisch in $\bar{\Omega}_N$ ist; 2° für alle komplexe Vektoren $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, deren $\text{Im } \xi$ orthogonal zu $\partial\bar{\Omega}_N$ im Punkte y ist, $a_k(y, \xi) \neq 0$.

K. Maurin.

Jackson, L. K.: On generalized subharmonic functions. *Pacific J. Math.* **5**, 215—229 (1955).

Wie in einer Note von Beckenbach und dem Verf. (vgl. dies. *Zbl.* **50**, 101; zitiert durch (I)) werden für eine Funktionenfamilie $\{F\}$ nachfolgende Postulate aufgestellt, die als Ersatz für eine Differentialgleichung dienen, welcher die F genügen. In einem ebenen Gebiet D ist eine Klasse von Gebieten Γ mit Rand γ definiert, zu denen alle hinreichend kleinen Kreise K mit Rand κ gehören. Zu jedem stetigen $h(x)$ auf beliebigem γ existiert genau ein $F(x, h, \gamma)$ aus $\{F\}$, das in $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \gamma$ stetig ist und auf γ gleich h ist. Wenn $h_1 - h_2 \leq (<) M$ ($M \geq 0$) auf γ , so $F(x, h_1, \gamma) - F(x, h_2, \gamma) \leq (<) M$ in Γ . Für eine Folge gleichmäßig beschränkter h sind die $F(x, h, \gamma)$ gleichgradig stetig. Zu jedem κ und beliebig reellem M existieren stetige h_1 und h_2 , so daß $F(x, h_1, \kappa) \geq M$, $F(x, h_2, \kappa) \leq M$. Wenn auf κ außer in endlich vielen Punkten $h_n(x) \rightarrow h_0(x)$ (h_n, h_0 stetig und gleichmäßig beschränkt), so $F(x, h_n, \kappa) \rightarrow F(x, h_0, \kappa)$ auch im Inneren K von κ . Wenn die Funktionen $h_n(x)$ stetig und gleichmäßig beschränkt auf κ und in $x_0 \in \kappa$ gleichgradig stetig, so sind die $F(x, h_n, \kappa)$ gleichgradig stetig in x_0 bezüglich $K \cup \kappa$. Sub- $\{F\}$ -Funktionen $s(x)$ sind wie in (I) definiert, nur wird jetzt die Stetigkeit in D abgeschwächt zu Beschränktheit auf abgeschlossenen Untermengen von D und Aufw  rtshalbstetigkeit. Ersteres folgt übrigens (Bem. des Ref.!) aus der zweiten Forderung, wenn man — wie offenbar

im Text — nur endliche Zahlen als Funktionswerte zuläßt. Die Bedingung: Wenn $s(x \leq F(x))$ auf γ , so $s(x) \leq F(x)$ in Γ bleibt wie in (I). Unter- und Überfunktionen sind ebenfalls fast wie in (I) definiert, nur daß jetzt nicht die unteren (oberen) Limesfunktionen der Randfunktionen benutzt werden, sondern diese selbst. Das Postulat 6 von (I) wird nicht mehr aufgestellt, da es sich beweisen läßt. Ziel der Untersuchungen ist der Beweis des folgenden Satzes, welcher von J. W. Green (dies. Zbl. 48, 341) für approximativ subharmonische Funktionen bewiesen wurde: Wenn $g(x)$ ein ε -sub- $\{F\}$ in D ist, so existiert ein sub- $\{F\}$ $u(x)$ in D , so daß $u(x) \leq g(x) \leq \varepsilon + u(x)$ in D . Dabei heißt eine Funktion $g(x)$ ε -sub- $\{F\}$ in D , wenn $g(x)$ aufwärts halbstetig in D und, falls $g(x) \leq F(x)$ auf dem Rande eines Untergebietes D' von D , so $g(x) \leq \varepsilon + F(x)$ in D' . Die Beschränktheitsbedingung wurde gemäß der Bem. des Ref. weggelassen. Der Beweis gründet sich auf den weiteren Satz: Wenn $f(x)$ stetig in $R \subset D$ ist und daselbst eine sub- $\{F\}$ Minorante besitzt, dann hat $f(x)$ sogar eine maximale sub- $\{F\}$ -Minorante $u(x)$. $u(x)$ ist stetig in R und Funktion aus $\{F\}$, sofern sie kleiner als $f(x)$ ist. In einer weiteren Arbeit soll gezeigt werden, daß die Lösungen gewisser elliptischer Differentialgleichungen den $\{F\}$ -Postulaten genügen.

G. L. Tautz.

Trjitzinsky, W. J.: Les Laplaciens généralisés non sommables. I. II. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 34, 1—92, 93—136 (1955).

I. Le problème considéré dans ce travail est de trouver dans un ensemble O ouvert, borné, plan une solution $F(x, y)$ de l'équation $\Delta F = f$ au moins continue dans O , où f est fini en chaque point $(x, y) \in O$, tandis que f peut être non sommable sur O . Les problèmes de ce genre se rattachent aux diverses méthodes de totalisation de A. Denjoy. Quelques résultats préliminaires se trouvent dans deux mémoires de l'A. (ce Zbl. 41, 26; 56, 325). Dans la section 1 l'A. introduit certaines classes qui consistent resp. de fonctions continues $F(x, y)$, leur variations V et de leur laplaciens Δ . On considère les divers laplaciens généralisés et les rapport entre eux. Ces laplaciens interviennent dans les formules de Green généralisées ce qui mène à quelques conditions d'harmonicité. Quelques résultats topologiques pour les laplaciens généralisés et pour la variation V correspondante sont obtenus. Dans les sections 11—13 l'A. exprime les fonctions F et la variation V de certaines classes moyennant $f \in [c_m]$, $[c_m]$ une classe de fonctions, dans l'ensemble $O - K$, où K est un ensemble fermé non dense. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que f appartienne à la classe $[c_m]$ sont données. Les sections 14—18 se rattachent aux méthodes de totalisation de A. Denjoy. On trouve la fonction F à partir de sa variation selon les méthodes des équations intégrales. — II. Dans les sections 19—20 l'A. introduit des classes plus spéciales afin de trouver un antilaplacien de D' , où D' désigne la dérivée définie par l'A. Les sections 20—23 ont pour objet l'étude de la totalisation. On utilise la méthode des majorantes et minorantes de M. de la Vallée Poussin. En conclusion l'A. donne quelques indications pour la résolution du problème d'un antilaplacien du laplacien moyen dans un cas très général.

J. Górski.

Fichera, Gaetano: Sull'esistenza delle forme differenziali armoniche. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 24, 523—545 (1955).

L'A. applique les méthodes classiques de Hilbert à la démonstration du théorème de Hodge; il utilise une forme différentielle double, peu différente de la paramétrix de G. de Rham, définie dans un domaine D de l'espace euclidien. La solution fondamentale correspondante lui permet d'exprimer, au moyen de potentiels, la solution d'un problème aux limites relatif à l'équation $\Delta \Delta u = \varphi$, et à un domaine D de R^n .

J. Lelong.

Naim, Linda: Sur l'allure des fonctions surharmoniques positives à la frontière de Martin. C. r. Acad. Sci., Paris 241, 1907—1910 (1955).

Soit Ω l'espace de Green et Δ sa frontière de Martin (M. Brelot, G. Choquet,

ce Zbl. 46, 327). Pour P fixé dans Ω le rapport des fonctions de Green $G(M, P)/G(M, P_0)$, P_0 fixé, envisagé comme fonction de $M \in \Omega$ se prolonge continûment selon une fonction $K(M, P)$ dans $\bar{\Omega}$. Pour chaque distribution μ de la masse positive sur $\bar{\Omega} - \{P_0\}$ l'A. introduit des potentiels d'un type nouveau définis par la formule $\int \theta(M, P) d\mu(P)$, où $\theta(M, P) = K(M, P)/G(P, P_0)$. Dans cette note les propriétés de $\theta(M, P)$ et du potentiel $\int \theta d\mu$ sont étudiées. L'A. considère les points minimaux et les conditions pour qu'un ensemble $E \subset \bar{\Omega}$ soit effilé au point Q . Quelques applications à l'étude des fonctions surharmoniques positives au voisinage de la frontière de Martin sont données.

J. Górski.

Matsushita, Shin-ichi: Sur la décomposition de F. Riesz. I. II. C. r. Acad. Sci., Paris 241, 1252—1254, 1373—1375 (1955).

I. L'A. donne une nouvelle démonstration du théorème de F. Riesz sur la décomposition d'une fonction surharmonique. Il introduit dans ce but un opérateur Φ_D (laplacien local) qui applique l'espace vectoriel engendré par les fonctions surharmoniques dans un domaine relativement compact D , dans l'espace $\mathfrak{M}(D)$ des mesures de Radon dans D . Le noyau de l'homomorphisme Φ est formé par les fonctions harmoniques, l'image du cône des fonctions surharmoniques est le cône des mesures positives et chaque classe d'équivalence contient un seul potentiel de mesure $\in \mathfrak{M}(D)$. — II. L'A. donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f surharmonique dans un domaine D , admette une décomposition globale de F. Riesz, sous la forme énoncée dans I. Le domaine D n'est plus supposé relativement compact, mais il est assujéti à la condition: pour tout $\varepsilon > 0$ et toute mesure positive μ à support compact dans D , il existe D_ε relativement compact, tel que en dehors de D_ε , le potentiel de μ soit $< \varepsilon$. Alors, pour le potentiel newtonien U^μ , la condition de l'A. est que $f - h_0 \geq 0$ pour une h_0 harmonique dans D .

I. Bernstein.

Plessis, N. du: Half-space analogues of the Fejér-Riesz theorem. J. London math. Soc. 30, 296—301 (1955).

Ein Satz von Fejér und Riesz besagt $\int_0^1 |f(\varrho, \theta)|^r d\varrho \leq A_r \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^r d\theta$, wo $f(\varrho, \theta)$ harmonisch und $\int_{-\pi}^{\pi} |f(\varrho, \theta)|^r d\theta$ beschränkt für $\varrho < 1$. A_r hängt nur

von r ab. In der Halbebene gilt $\int_0^\infty |f(x, y)|^r dy \leq A_r \int_{-\infty}^\infty |f(x)|^r dx$. Schon im R^3 hat man für die linke Seite zwei Möglichkeiten, je nach Dimension der Integration. Im R^{n+1} beweist Verf. analoge Ungleichungen. Es sei $f(x_1, \dots, x_n, z)$ harmonisch für

$z > 0$ und $\int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty |f(x_1, \dots, x_n, z)|^r dx_1 \dots dx_n$ beschränkt für $z > 0$. Auch dann gilt, wie aus Verallgemeinerung des Beweises von Privalov (dies. Zbl. 18, 408, 1. Ref.) folgt, daß $f(x_1, \dots, x_n) = \lim_{z \rightarrow 0} f(x_1, \dots, x_n, z)$ und

$\int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty |f(x_1, \dots, x_n)|^r dx_1 \dots dx_n = M(f)$ existiert. Dann gilt:

$$(a) \quad \int_0^\infty |f(x_1, \dots, x_n, z)|^r z^{n-1} dz \leq A_{r,n} M(f),$$

$$A_{r,n} = \Gamma(\tfrac{1}{2}(n+1)) \pi^{-(n+1)/2} [2 \pi^{n/2} (\Gamma(\tfrac{1}{2}n))^{-1}]^{1/r} \cdot \int_0^\infty \frac{t^{n/r}}{(1+t^2)^{(n+1)/2}} dt,$$

($A_{r,n}$ bestmögliche Konstante). b) für $2 \leq m \leq n+1$

$$\int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty |f(x_1, \dots, x_n, z)|^r z^{m-2} dz dx_n \dots dx_1 < B_{r,n} M(f),$$

wo $B_{r,n}$ nur von r und n abhängt.

G. L. Tautz.

Cimmino, G.: Spazi hilbertiani di funzioni armoniche e questioni connesse. Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali, Trieste, 25—28 Agosto 1954, 76—85 (1955).

Der Verf. berichtet über seine früheren Untersuchungen aus dem Gebiete der Anwendungen der Technik des Hilbertschen Raumes (es werden verschiedene, dem Problem angepaßte skalare Produkte eingeführt) auf die Randaufgaben der Gleichung $\Delta u = 0$ ($= f$). Es werden einige Resultate der italienischen Mathematiker erwähnt.

K. Maurin.

Brelot, M.: Etude et extensions du principe de Dirichlet. Ann. Inst. Fourier 5, 371—419 (1955).

Divers travaux ont été consacrés à la démonstration du principe de Dirichlet par la „méthode des projections“. L'A. reconsidère la question d'un point de vue extrêmement général, caractérisé par l'usage des trois notions suivantes: espaces de Green (voir Brelot et Choquet, ce Zbl. 46, 327), radiales (voir Brelot, ce Zbl. 56, 325) et fonctions (BLD) (voir notamment Deny et Lions, ce Zbl. 65, 99, où ces fonctions sont appelées „fonctions (BL) précisées“). Voici l'énoncé du principe général: si f est une fonction (BLD) dans un espace de Green E , il existe, parmi les fonctions (BLD) dans E ayant même même radiale que f , une et une seule dont la norme de Dirichlet soit minimum; cette fonction minimisante est harmonique dans E .

J. Deny.

Tautz, G. L.: Zur Theorie des Dirichletschen Problems. Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali, Trieste, 25—28 Agosto 1954, 97—102 (1955).

This short note summarizes a communication made by the author to the „convegno internazionale di Trieste“ (August 1954). A more detailed treatment of this communication will be found in the paper reviewed in this Zbl. 67, 76.

C. Racine.

Rizza, Giovanni Battista: Dirichlet problem for n -harmonic functions and related geometrical properties. Math. Ann. 130, 202—218 (1955).

Die erste Randwertaufgabe bei n -harmonischen Funktionen (Realteile analytischer Funktionen von n komplexen Variablen) wurde 1931 von Severi gelöst (dies. Zbl. 3; 213, 214). Zweck der Arbeit ist es, eine Integraldarstellung der Lösung nach dem Muster der Potentialtheorie zu gewinnen. Als Vorbild dient ein Ansatz von Martinelli im biharmonischen Falle (dies. Zbl. 25, 405). Ausgangspunkt ist die Greensche Formel

$$(1) \quad U(P) = \frac{(n-2)!}{4\pi^n} \int_{\Phi} \left[U(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{2n-2}} \right) - \frac{1}{r^{2n-2}} \frac{\partial U}{\partial n} \right] d\Phi_Q, \quad r = \overline{PQ}$$

wo Φ der Rand eines Bereiches im euklidischen $S_{2n}(x^1, \dots, x^{2n})$ ist. Φ sei zusammenhängend, analytisch und ohne singuläre Punkte. Alles hängt davon ab, die „äußere Ableitung“ $\partial U / \partial n$ durch „innere“ Ableitungen von Φ auszudrücken. Zunächst werden auf Φ $2n-1$ Kurvenscharen eingeführt, deren Richtungen paarweise „konjugiert“ sind. Konjugiert heißen zwei Einheitsvektoren δ_1^h, δ_2^h ($h = 1, 2, \dots, 2n$), wenn $\delta_1^q = \delta_2^{n+q}, \delta_1^{n+q} = -\delta_2^q$ ist. Sie stehen insbesondere also auch senkrecht aufeinander. Nun wird jedem Randpunkt Q ein $2n$ -Bein aus paarweise konjugierten Richtungen s_{2p-1}, s_{2p} zugeordnet, derart, daß $s_{2n} = n$ (Normalenrichtung) ist. Dadurch werden $2n-1$ Kurvenscharen auf Φ definiert. Daß dies stets (auf viele Weisen) mit stetig differenzierbaren Kurven möglich ist, wird durch Konstruktion gezeigt. Nun wird zunächst noch angenommen, daß auch die Randfunktion U Realteil einer auf Φ analytischen Funktion ist. Für konjugierte Richtungen t_1, t_2 gelten die Cauchy-Riemannschen Beziehungen $\partial U / \partial t_1 = \partial V / \partial t_2, \partial U / \partial t_2 = -\partial V / \partial t_1$. Für Richtungen s_p auf Φ gilt also (2) $\partial u / \partial s_{2p-1} = \partial v / \partial s_{2p}, \partial u / \partial s_{2p} = -\partial v / \partial s_{2p-1}, \partial U / \partial n = \partial U / \partial s_{2n} = -\partial v / \partial s_{2n-1}$ ($U, V; u, v$ n -harmonisch konjugiert). Nun wird auf Φ eine Metrik $ds^2 = g_{jk} d\xi^j d\xi^k$ eingeführt (unabhängig von den schon definierten Kurven auf Φ). Durch Differentiation von (2) und Addition folgt aus der (für das

folgende grundlegenden) Vertauschungsformel für die Ableitungen nach den Bogenlängen [Levi-Civita, Der absolute Differentialkalkül, deutsche Ausgabe, Berlin 1928, S. 168 (28)] eine Formel von der Form

$$(3) \quad \Delta_{\tau}^2 u + \frac{\partial U}{\partial n} A + \sum_{h=1}^{2n-2} \frac{\partial u}{\partial s_h} B_h = 0,$$

wo $\Delta_{\tau} u$ ein gewisser Differentialoperator 2. Ordnung für innere Ableitungen ist, der nicht von der Wahl der $2n - 2$ Scharen $(s_1) \cdots (s_{2n-2})$ abhängt. Es läßt sich zeigen, daß die $B_h = 0$ sind, was für $n > 2$ nicht so unmittelbar wie für $n = 2$ (Martinelli) folgt. A ist also ebenso wie $\Delta_{\tau}^2 u$ unabhängig von den $(s_1) \cdots (s_{2n-2})$, kann also mittels passender Wahl eines solchen Systems bestimmt werden. Es ergibt sich, wenn $\varphi(x^1, \dots, x^{2n}) = 0$ die Gleichung von Φ ist, ein Ausdruck $\eta^3 L(\varphi)$, wo

$$\eta = \left[\sum_{t=1}^{2n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^t} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad \text{und } L(\varphi) \text{ die genaue Verallgemeinerung der E. E. Levischen}$$

Differentialinvariante ist, deren identisches Verschwinden (für $n = 4$) die analytischen Hyperflächen (Hyperplanoide, vgl. Behnke-Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, dies. Zbl. 8, 365) charakterisiert. Es ergibt sich, daß dies auch für n gilt. Schon Severi hat bemerkt, daß diese Flächen Ausnahmengen für das Dirichletsche Problem sind. Mit $A \neq 0$ wird wegen $B_h = 0$ durch (1) und (3) die Integraldarstellung geliefert.

G. L. Tautz.

Pini, Bruno: Teoremi di unicità per problemi generalizzanti i problemi biarmonici fondamentali interno ed esterno. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 465—473 (1955).

In questa Nota l'A. dimostra il seguente teorema d'unicità: sia D un dominio limitato del piano avente il contorno FD costituito da una o più curve dotate di tangente e curvatura variabili con continuità; siano f_0, f_1 ed f_2 funzioni assegnate su tale contorno ed ivi di quadrato sommabile; sia $\{D_t\}$ una famiglia di domini contenuti in D ed invadente D , per $t \rightarrow 0$, in modo opportuno; allora, se esiste una funzione u biarmonica in $D - FD$ e tale che:

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{FD_t} [(u - f_0)^2 + (u_x - f_1)^2 + (u_y - f_2)^2] ds = 0,$$

essa è necessariamente unica. Nella dimostrazione di questo teorema si ammette la conoscenza della soluzione del problema ordinario per il cerchio e di certe proprietà delle funzioni armoniche. Tale dimostrazione è ottenuta trasportando dal caso della convergenza puntuale a quello della convergenza in media alcuni ragionamenti di C. Miranda (questo Zbl. 37, 71). L'A. dapprima dimostra che se u è una funzione biarmonica verificante la (1) con $f_0 \equiv 0$, sussiste la relazione di limite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{FD_t} |u \Delta u| ds = 0.$$

Dopo di ciò l'A. può stabilire per u la seguente disuguaglianza: $\int_{FD_t} u^2 ds < 2te^{Nt} \iint_D v dx dy$, ove N è un numero dipendente da elementi differenziali del primo e secondo ordine di FD e v è la funzione armonica in $D - FD$ tale che:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{FD_t} |v - f_1^2 - f_2^2| ds = 0.$$

Servendosi di questi ragionamenti l'A. riesce anche a dimostrare un teorema d'unicità per il seguente problema biarmonico esterno: $\Delta_4 u = 0$ in $D - FD$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{FD_t} [(u - f_0)^2 + (u_x - f_1)^2 + (u_y - f_2)^2] ds + \frac{1}{t} \int_{C_t} [(u - f_{0,0})^2 + (u_x - f_{1,0})^2 + (u_y - f_{2,0})^2] ds = 0,$$

ove D è un dominio illimitato e di frontiera limitata, $\{D_t\}$ è una opportuna famiglia di domini invadente D per $t \rightarrow 0$ e C_t è la circonferenza di centro l'origine e raggio $1/t$.
L. de Vito.

Variationsrechnung:

Dedecker, P.: Quelques applications de la suite spectrale aux intégrales multiples du calcul des variations et aux invariants intégraux. I. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 24, 276—295 (1955).

L'A. considère un groupe, anneau ou A -module muni d'un opérateur différentiel et filtré par les éléments d'un ensemble ordonné M (qui n'est pas nécessairement l'ensemble des entiers comme dans la théorie classique) et généralise la construction de la suite spectrale; il définit les termes $E(p, q, r, s)$ (ce Zbl. 58, 84) généralisant les quotients de la suite spectrale classique. L'ensemble des E et des homomorphismes Δ (différentielles homogènes) qui les relient constituent un diagramme à 4 dimensions que l'A. appelle diagramme spectral associé au groupe différentiel M -filtré. En considérant les homomorphismes dans un anneau A , l'A. introduit aussi une filtration duale et obtient deux diagrammes spectraux duaux. — L'A. traite d'une manière détaillée pour les chaînes singulières cubiques (dues à J. P. Serre, ce Zbl. 45, 260) la filtration résultant d'une structure fibrée; il montre l'aspect géométrique et intuitif de cette filtration.
G. Hirsch.

Auslander, Louis: The use of forms in variational calculations. Pacific J. Math. 5, Suppl. II, 853—859 (1955).

Es wird eine Methode zur Berechnung erster und zweiter Variationen von Integralen $I = \int F(q_i, q'_i, t) dt$ in Räumen mit euklidischem Zusammenhang angegeben, indem diese Variationen durch die Differentialform ausgedrückt werden $w = F_{q'_i} dq_i - dt(q'_i F_{q'_i} - F)$. Die Methode besteht im Falle der ersten Variation im wesentlichen in einer Umformulierung der üblichen Herleitungen. Die Differentialgleichungen der Geodätischen eines Finslerraumes mit der Metrik I lassen sich hier schreiben $w_\alpha = 0$, $w_{\alpha n} = 0$ ($\alpha = 1, \dots, n-1$). Eine Formel von Schoenberg (dies. Zbl. 5, 299) für $\partial^2 I$ in Riemannschen Räumen wird mit Hilfe des zweiten und dritten Krümmungstensors von Cartan auf Finslersche Räume verallgemeinert.

D. Laugwitz.

Faulkner, Frank: A degenerate problem of Bolza. Proc. Amer. math. Soc. 6, 847—854 (1955).

Fra tutte le curve C dello spazio a tre dimensioni, generalmente regolari che: (a) soddisfano la relazione differenziale: $dz = K(x, y, z) dx$ nei punti regolari, (b) $dx/ds \geq 0$ (s = arco rettificato), (c) che hanno gli estremi (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) rispettivamente su due varietà, si cerca di rendere minima una funzione $f(x_2, y_2, z_2)$. Sono ottenute con argomentazioni non sempre convincenti (cfr. p. 849, penultima alinea) alcune condizioni necessarie che sono poi interpretate geometricamente. Con alcune osservazioni relative a generalizzazioni del problema precedente si chiude il lavoro.

G. Stampacchia.

Cecconi, Jaurès: Sulla esistenza del minimo degli integrali del calcolo delle variazioni estesi ad una superficie di forma parametrica. Rivista Mat. Univ. Parma 6, 163—191 (1955).

In the line of the direct method of the calculus of variations based on the concept of lower semicontinuity, the author proves an existence theorem for the surface $I(S, f) = (S) \int f(x, t) du dv$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $t = (t_1, t_2, t_3)$, in a class W of closed surfaces. Here W is the class of all closed, continuous, parametric surfaces S of the type of the 2-sphere, of finite Lebesgue area, contained in a closed bounded convex set A in E_3 , and "enveloping" a given connected subset $\Omega \subset A$. By S "enveloping" Ω is meant that $O(x, S) \neq 0$ for all $x \in \Omega$, where O is the topological index of the closed surface S with respect to x . The set Ω is supposed to be open such that

$\Omega + \Omega^* \subset A^0$ where Ω^* is the boundary of Ω . Thus $[S] \subset A - \Omega$ for every $S \in W$, where $[S]$ denotes the graph of S . Further general hypotheses are made on Ω which are too detailed to be given here but which simply assure that the boundary of Ω is sufficiently smooth. These hypotheses are satisfied, e. g., by any polyhedron (not necessarily convex), by any sphere, and by any Jordan region in E_3 bounded by a surface sufficiently regular. — If K is a compact set in the x -space E_3 and F is the t -space, then $f(x, t)$ is supposed to be continuous in $K \times F$ with its first partial derivatives with respect to x_1, x_2, x_3 , and to satisfy the relation $f(x, kt) = k f(x, t)$ for every $k \geq 0$, while $A - \Omega \subset K$, $\Omega^* \subset K^0$. Also f is supposed to be definite positive, i. e., $f \geq m > 0$ for all $x \in K$, $|t| = 1$, and semiregular, i. e., $E(x, t, t') \geq 0$ for all $x \in K$, $|t|, |t'| = 1$. Under these assumptions, $I(S, f)$ has an absolute minimum in the class W . Consistent use is made in the proof of the Cavalieri inequality. [L. Cesari, Surface Area, Princeton 1956], of the smoothing process used by Cesari in the calculus of variations (L. Cesari, this Zbl. 46, 109), and of C. B. Morrey's representation theorem of closed surfaces on a sphere.

L. Cesari.

Craig, Homer V.: On certain linear extensor equations. II. Tensor, n. Ser. 5, 77—84 (1955).

Fortsetzung der vorhergehenden Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 58, 90). In den beiden Arbeiten beschäftigt Verf. sich mit Problemen der mathematischen Physik und der Variationsrechnung. In diesen beiden Gebieten ergeben sich gewisse Schlüsselfunktionen, die in das Problem eintreten, und auch einige Extensoren, die Verf. die mit den Funktionen assoziierten primären Extensoren nennt. Das allgemeine Ziel ist, den heuristischen Wert seiner neuen Behandlungsweise an Problemen aus diesen beiden Gebieten zu prüfen. Da andererseits das übliche Verfahren in der Physik darin besteht, daß man Differentialgleichungen für ein allgemeines Problem annimmt und dann die Lagrangesche Funktion konstruiert mit der Eigenschaft, daß ihre assoziierten Euler-Lagrangeschen Gleichungen genau das am Anfang gegebene System sind, geht Verf. wie folgt vor: (a) Es wird eine lineare Beziehung postuliert zwischen den primären Extensoren mit zunächst unbestimmten Koeffizienten; (b) ein Bedingungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten wird gegeben. In dieser Arbeit erläutert Verf. seine Methode durch die Behandlung von Maxwell'schen Gleichungen für Punkte in freien Räumen, der Wellengleichungen für das elastische Seil und für einen linearen Schwinger unter der Wirkung einer Widerstandskraft, die zu der Geschwindigkeit proportional ist.

A. Kawaguchi.

• **El'sgol'c, L. E.:** Qualitative Methoden der Analysis. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1955. 300 S. R. 10,15 [Russisch].

Dies inhaltreiche Büchlein beschreibt in den ersten drei Kapiteln topologische Methoden, und zwar in Kap. I die, die sich durch die Namen Morse, Ljusternik und Schnirelmann charakterisieren lassen, in Kap. II entartete kritische Punkte, die in der Funktionentheorie eine Rolle spielen, und in Kap. III einiges aus der Theorie der Fixpunkte. In den anderen Kapiteln spielt die Topologie keine so entscheidende Rolle. Kap. IV enthält dasjenige, was sich an Ljapunovs Begriffsbildungen anschließt, Kap. V—VI die (gewöhnlichen) Differentialgleichungen mit „abweichendem“ (insbesondere nachhinkendem) Argument, die Myškis systematisch untersucht hat.

H. Freudenthal.

Deheuvels, René: Topologie d'une fonctionnelle. Ann. of Math., II. Ser. 61, 13—72 (1955).

Das Verhalten einer auf einem topologischen Raume X erklärten reellen Funktion φ , die auch die Werte $\pm \infty$ annehmen kann, läßt sich vom Standpunkt der Homologietheorie durch die relativen Homologiegruppen (einer geeigneten Homologietheorie) $E(p, q) = H([\varphi > p], [\varphi > q])$ ($p \leq q$) und die Homomorphismen $\iota: E(p', q') \rightarrow E(p, q)$ ($p \leq p'$, $q \leq q'$) und $\delta: E(p, q) \rightarrow E(q, r)$ ($p \leq q \leq r$) beschreiben: ι besteht darin, daß man einen relativen Zyklus von $[\varphi > p'] \bmod [\varphi > q']$

als relativen Zyklus von $[\varphi > p] \bmod [\varphi > q]$ auffaßt, und δ ist der Randoperator, der einem relativen Zyklus von $[\varphi > p] \bmod [\varphi > q]$ seinen Rand zuordnet, den man als relativen Zyklus von $[\varphi > q] \bmod [\varphi > r]$ auffaßt. Dabei ist es nötig, den Variabilitätsbereich $-\infty \cup R \cup +\infty$ (R die Menge der reellen Zahlen) der Argumente p, q, \dots durch zwei weitere Elemente $-\omega, +\omega$ zu dem Bereich $S = -\omega \cup -\infty \cup R \cup +\infty \cup +\omega$ zu erweitern, so daß $-\omega < -\infty < R < +\infty < +\omega$ und $[\varphi > -\omega] = X$, $[\varphi > +\omega]$ die leere Menge ist. Diese Konstruktion ist nicht frei von Willkür: Man kann verschiedene Homologietheorien benutzen oder man kann an Stelle der Mengen $[\varphi > p]$ die Mengen $[\varphi \geq p]$ oder an Stelle der Homologiegruppen Kohomologiegruppen oder Kohomologieringe betrachten. Um alle diese Fälle zu umfassen, wird ein axiomatischer, rein algebraischer Aufbau der Theorie benutzt: Gegeben eine Menge L von Ringen $E(p, q)$ ($p, q \in S, p \leq q$), (multiplikative) Homomorphismen $\iota: E(p', q') \rightarrow E(p, q)$ ($p \leq p', q \leq q'$) und (additive) Homomorphismen $\delta: E(p, q) \rightarrow E(q, r)$ ($p \leq q \leq r$), die einem System von Axiomen genügen, das so gewählt ist, daß das oben erwähnte Beispiel einer auf einem topologischen Raume definierten Funktion darunterfällt. Mit Rücksicht auf dieses Beispiel werden die Ringe $E(p, q)$ relative Homologien genannt. Man kann aus den $E(p, q)$ weitere Ringe durch wiederholte Anwendung der folgenden Operationen ableiten: Bild, Kern (der Homomorphismen ι, δ), Durchschnitt, Summe (von endlich vielen Ringen). Sei $I(L)$ die Gesamtheit der so erhaltenen Ringe. Zu $I(L)$ gehören z. B. die „partiellen Homologien“ $E(p, q, r, s) = \text{Bild}(E(q, s) \xrightarrow{\iota} E(p, r))$ und $D(p, q, r, s) = \text{Bild}(E(p, r) \xrightarrow{\delta} E(r, s) \xrightarrow{\iota} E(q, s))$ ($p \leq q \leq r \leq s$), deren Wichtigkeit sich aus dem Satz ergibt, daß jeder Ring aus $I(L)$ als Summe von partiellen Homologien dargestellt werden kann. — Ein Hauptziel der Arbeit ist die Entwicklung einer Theorie der kritischen Werte in L . Man kann zwischen linkskritischen, rechtskritischen und kritischen Werten unterscheiden, und diese werden mit Hilfe von direkten und inversen Limites eingeführt. Ein linkskritischer Wert ist z. B. ein solcher Wert $r \in S$, für den es einen von 0 verschiedenen „Linkssprung“ gibt, d. h. für den einer der Ringe $E(p, r^-, r, s)$, $D(r^-, r, s, t)$, $D(m, p, r^-, r)$ (bei passend gewählten m, p, s, t) von 0 verschieden ist. Dabei bedeutet z. B. $E(p, r^-, r, s)$ den inversen Limes von $E(p, r', r, s)$ für $r' \xrightarrow{\leq} r$. Von besonderer Bedeutung ist der Fall, daß L stetig von links ist, d. h. daß es überhaupt keine linkskritischen Werte gibt. In diesem Falle lassen sich die kritischen Werte aus einem kritischen Ring $\Gamma = \sum_r E(r, r^+)$ ableiten: r ist genau dann kritisch, wenn $E(r, r^+) \neq 0$ ist [$E(r, r^+)$ bedeutet den direkten Limes von $E(r, r')$ für $r' \xrightarrow{\leq} r$]. Es lassen sich dann zwei exakte Folgen von Ringen aus L angeben, die als die Wurzeler der bekannten Ungleichungen von M. Morse zu betrachten sind. Anwendung der Theorie auf den Fall einer in einem topologischen Raume X definierten Funktion φ liefert das Ergebnis, daß für die Zwecke der Variationsrechnung im großen die Benutzung der singulären Kohomologietheorie insofern am angemessensten ist, als man dann keine zusätzlichen Voraussetzungen über die Struktur des Raumes X bzw. der Funktion φ zu machen hat. Schließlich wird eine Theorie der kritischen Punkte einer Funktion φ auf einem topologischen Raume X entwickelt und die Frage untersucht, unter welchen Umständen einem kritischen Wert ein kritischer Punkt entspricht. Ein Existenzsatz über kritische Punkte wird abgeleitet.

H. Seifert.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Satō, Tokui: Sur l'application qui fait correspondre à une courbe une famille de courbes. Proc. Japan Acad. **31**, 1—4 (1955).

Ispirandosi a ricerche di M. Hukuhara [v. particolarmente J. Fac. Sci., Hokkaido Univ. Ser. I, **1**, 163—209 (1932)], l'A. dimostra, relativamente ad

un'equazione integrale di Volterra in forma vettoriale

$$\vec{u}(x) = \vec{f}(x) + \int_0^x \vec{K}(x, t, \vec{u}(t)) dt,$$

un teorema analogo ad uno, ben noto, di A. Kneser (relativo alle equazioni differenziali). [È posto: $\vec{f}(x) \equiv \{f_i(x)\}$, $\vec{u}(x) \equiv \{u_i(x)\}$, $\vec{K}(x, t, \vec{u}) \equiv \{K_i(x, t, \vec{u})\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, ove le f_i e K_i sono funzioni reali, continue e limitate per $0 \leq t \leq x \leq 1$, $|u_i| < \infty$.] Il teorema dice che, prefissata comunque $\vec{f}(x)$, la famiglia delle soluzioni $\vec{u}(x)$ forma un continuo K_f nello spazio lineare (C) delle funzioni vettoriali $\vec{f}(x)$ continue in $(0, 1)$, qualora venga assunto come distanza $\rho(\vec{f}, \vec{g})$ il

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \{|f_1(x) - g_1(x)|, \dots, |f_n(x) - g_n(x)|\}.$$

La dimostrazione si basa su alcune preliminari proposizioni di topologia, relative all'argomento indicato nel titolo.

T. Viola.

Hukuhara, Masuo: Sur l'application qui fait correspondre à un point un continu bicompat. Proc. Japan Acad. **31**, 5—7 (1955).

Il lavoro si connette intimamente a quello precedente di T. Satō. L'A. riesce a precisare che il continuo sopra indicato con K_f è, in ogni caso, bicompatto nello spazio (C) . La dimostrazione si vale di alcune interessanti proposizioni di topologia, relative alle applicazioni F che fanno corrispondere a un punto x d'uno spazio topologico R , un insieme $F(x)$ d'uno spazio topologico R . Citiamo: a) se F è bicompatto e semicontinua superiormente (nel senso di Hausdorff), e se A è un insieme bicompatto di R , $F(A)$ è anch'esso un insieme bicompatto di R ; b) se F è semicontinua superiormente e se $F(x)$ è un continuo bicompatto (qualunque sia x), allora ogni continuo bicompatto A ha per immagine un continuo bicompatto $F(A)$.

T. Viola.

Mamedov, Ja. D.: Über die positiven Lösungen der nichtlinearen Integralgleichungen vom Urysohn'schen Typus. Akad. Nauk Azerbajdz. SSR, Doklady **11**, 591—594 (1955) [Russisch].

L'A. considère l'équation intégrale non linéaire

$$(1) \quad u(x) = \lambda \Phi \left\{ x; \int_a^b K[x, s; u(s)] ds \right\} + f(x).$$

1. f, K, Φ fonctions données définies pour $(x, s) \in [a, b]^2$ quelle que soit $u > 0$. 2. $K(x, s; 0) = \Phi(x; 0) = 0$. 3. $K(x, s; u)$ et $\Phi(x; z)$ admettent des dérivés > 0 par rapport à u et z respectivement, et $F[x, s; u, z] = \Phi'_z\{x; z\} K'_u[x, s; u]$ est continue par rapport à u et z . 4. $F(x, s; u, z)$ croît lorsque u et z décroissent, et $\{u_1 < u_2$ et $z_1 < z_2\} \Rightarrow \{F(x, s; u_1, z_1) - F(x, s; u_2, z_2) \text{ admet minimum (relativement à } x \text{ et } s) \text{ différent de } 0\}$. 5. $\lim_{u \rightarrow \infty} F(x, s; u, z) \rightarrow Q(x, s)$, avec $Q \equiv 0$ ou Q admettant un minimum > 0 . 6. $0 \leq f(x) < M < +\infty$. 7. $\lambda > 0$. 8. Pour $F(x, s; 0, 0) = P(x, s)$, $\max P(x, s) = P$ et $P > P(x, s) > F(x, s; u, z) > Q(x, s) > 0$. P, F, Q sont considérées comme noyaux de certaines opérations intégrales linéaires par rapport à x et s . Soient $\mu, \lambda_{u, z}, \nu$ les plus petites valeurs des noyaux précités. Dans ces conditions l'A. énonce, sans démonstration le Théorème: Pour $\mu < \lambda < \nu$, l'équation homogène

$$(2) \quad u(x) = \lambda \Phi \left\{ x; \int_a^b K[x, s; u(s)] ds \right\}$$

admet une solution unique. L'A. énonce encore d'autres théorèmes concernant l'équation (1).

S. Vasilache.

Jost, Res: Mathematical analysis of a simple model for the stripping reaction. Z. angew. Math. Phys. **6**, 316—326 (1955).

Physikalische Betrachtungen führen zu der Aufgabe, Lösungen $\Phi(\xi)$ der Integralgleichung (I) $\Phi(\xi) = \frac{\lambda i}{4} \int_0^{\infty} d\xi' [H_0^{(1)}(\sqrt{E}|\xi - \xi'|) - H_0^{(1)}(\sqrt{E}\sqrt{\xi^2 + \xi'^2})] \Phi(\xi')$ ($\lambda > 0$, $E \geq -(\lambda/2)^2$, $\operatorname{Re}\{\sqrt{E}\} \geq 0$, $\operatorname{Im}\{\sqrt{E}\} \geq 0$) aufzusuchen. Indem nun die beiden Funktionen $\varphi_1(p)$ und $\varphi_2(p)$ mit $\varphi_{1,2} = \int_0^{\pm\infty} e^{ip\xi} \Phi(\xi) d\xi$ definiert werden, gewinnt man zuletzt statt (I) die Funktionalgleichung (II) $\varphi_1(p) - \varphi_2(p) = \lambda i [\varphi_1(p) - \varphi_1(\omega)]/2\omega$, wobei $\omega(p) = \sqrt{E - p^2}$ mit $\operatorname{Im}\{\omega(p)\} > 0$ ist. Diese wird mittels $p = \sqrt{E} \sin(\frac{1}{2}\pi Z)$ und $\omega = \sqrt{E} \cos(\frac{1}{2}\pi Z)$ uniformisiert; zuletzt findet man die lösbare Differenzgleichung für

$$h(Z) = [\cos(\frac{1}{2}\pi \zeta_0) - \cos(\frac{1}{2}\pi Z)] [\varphi_1(Z) - \varphi_1(Z+2)],$$

nämlich (III): $h(Z+1) + h(Z-1) = \zeta(Z) h(Z)$, wobei $\zeta(Z)$ eine explizit angebbare Funktion ist. Es schließen sich Anmerkungen über die Eindeutigkeit der Lösung an, ferner wird ein Spezialfall gelöst. *H. Töpfer.*

Tricomi, G.: Equazioni integrali singolari del tipo di Carleman. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 39, 229—244 (1955).

Die Integralgleichung (1) $\varphi(x) - \lambda \int_a^{*b} \frac{H(x,y)}{y-x} \varphi(y) dy = F(x)$, wo \int den Cauchyschen Hauptwert bezeichnet, beherrscht man, wenn man die einfachere Gleichung

(2) $a(x)\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{*1} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = f(x)$ lösen kann, wie man aus einer Transformation

von (1) entnehmen kann. Für (2) hat Carleman ein elegantes Lösungsverfahren mittels einer Integraltransformation angegeben, ohne jedoch zu zeigen, daß die angegebene Lösung die Gleichung wirklich befriedigt, und ohne ihre Allgemeinheit zu untersuchen. Diese Lücke wird in der vorliegenden Abhandlung des Verf. geschlossen. Nach Zusammenstellung einiger Formeln und Sätze aus der Theorie der endlichen und unendlichen Hilberttransformation wird die Carlemansche Lösungsformel nebst einer kurzen Herleitung gegeben. Sie lautet

$$(3) \quad \varphi(x) = \frac{a(x)f(x)}{a^2(x) + \lambda^2\pi^2} + \frac{\lambda e^{\tau(x)}}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2\pi^2}} \int_{-1}^{*1} \frac{e^{-\tau(y)} f(y)}{\sqrt{a^2(y) + \lambda^2\pi^2}} \frac{dy}{y-x}$$

(im Text steht versehentlich $e_{-\tau(y)}$ statt $e^{-\tau(y)}$). Dabei ist

$$\tau(x) = \mathcal{C}_x \left[\operatorname{arctg} \frac{\lambda\pi}{a(y)} \right] \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_x \varphi[(y)] = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*1} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy$$

die endliche Hilberttransformation. Verf. gibt nun eine Lösungsformel an, die sich nur wenig von der Carlemanschen unterscheidet und diese als Spezialfall enthält. Sie enthält außerdem eine willkürliche Konstante und stellt die allgemeine Lösung dar. Genauer gesagt gilt folgendes: Sei $a(x)$ stetig in $(-1, 1)$. In den Halbungen der Intervallenden genüge sie einer Lipschitzbedingung. Weiterhin sei $f(x) \in L_q$ mit $q > (1-\gamma)^{-1}$, wo $\gamma = \max(\alpha, 1-\beta)$ und $\alpha = \pi^{-1} \operatorname{arctg}(\lambda\pi/a(-1))$, $\beta = \pi^{-1} \operatorname{arctg}(\lambda\pi/a(1))$. Dann gilt

$$\varphi(x) = \frac{a(x)f(x)}{a^2(x) + \lambda^2\pi^2} + \frac{\lambda e^{\tau(x)}(1-x)^{-1}}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2\pi^2}} \int_{-1}^{*1} \frac{e^{-\tau(y)}(1-y)f(y)}{\sqrt{a^2(y) + \lambda^2\pi^2}} \frac{dy}{y-x} + C \frac{e^{\tau(x)}(1-x)^{-1}}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2\pi^2}}.$$

Der letzte Summand ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung von der Klasse L_p ($p > 1$). $\varphi(x)$ gehört zu einer Klasse L_{q^*} mit $1 < q^* < q/(1+\gamma q)$. Sofern $q > 1/(1-\beta)$ ist, kann die Lösung in der Carlemanschen Form (3) geschrieben werden. Grundlage des Beweises sind die auch an sich wichtigen Formeln für die Hilberttransformierten der Ausdrücke $A(x) = e^{\tau(x)}(a^2(x) + \lambda^2\pi^2)^{-1/2}$, $A^*(x) =$

$$e^{-\tau(x)} (a^2(x) + \lambda^2 \pi^2)^{-1/2}:$$

$$\lambda \pi \mathcal{O}_x[A(x)] = a(x) A(x) - \operatorname{sgn} \lambda, \quad \lambda \pi \mathcal{O}_x[A^*(x)] = -a(x) A^*(x) + \operatorname{sgn} \lambda.$$

In Formel Zeile 11 von Seite 240 fehlt vor $A^*(y)$ der Faktor $a(y)$ und in der letzten Formel derselben Seite vor dem Integral der Faktor $1/\pi$. *G. L. Tautz.*

Stanković, Bogoljub: Sur une classe d'équations intégrales singulières. Srpska Akad. Nauka, Zbornik Radova 43, mat. Inst. 4, 81—126, français. Zusammenfassg. 126—130 (1955) [Serbisch].

Le travail contient cinq chapitres, le cinquième exposant la généralisation par Wright des fonctions de Bessel, dont l'A. se sert dans son travail. Le premier chapitre concerne les cas particuliers de l'équation $(1) \int_0^\infty e^{-sx} K(x, t) dt = \varrho(s) e^{-t\psi(s)}$,

pour $\varrho(s) = s^\mu$, $\psi(s) = s^\nu$, $0 < \nu < 1$, μ étant quelconque, ou $\nu \leq 0$, $\mu < 0$. La solution de l'équation considérée est donnée par les fonctions de Bessel, généralisées par Wright. Au second chapitre est définie une certaine transformation intégrale vérifiant l'équation intégrale (1), $0 < \nu < 1$. On étudie en suite, la convergence, la transformation de Laplace et certains résultats du type d'Abel et de Tauber. Le troisième chapitre expose la solution d'une classe d'équations, pour lesquelles il est impossible d'obtenir par itération l'argument, s . Il y est démontré la propriété du spectre de leurs valeurs propres et γ sont étudiées les conditions de l'existence et de l'unicité de leur solution et sont données les solutions mêmes. Enfin, on donne la solution d'un cas spécial de l'équation fonctionnelle de Schröder, $\varphi(s) = \varphi(s^n)$, à laquelle se réduit l'équation homogène considérée. L'application des résultats obtenus est donnée, au quatrième chapitre, sur la solution d'un problème de conductibilité de la chaleur, de plus y sont données les relations intégrales des fonctions de Wright et complétées les tables des transformations de Laplace. *N. Saltykov.*

Miehlín, S. G.: Die Komposition mehrdimensionaler singulärer Integrale. Vestnik Leningradsk. Univ. 10, Nr. 2 (Ser. mat. fiz. chim. Nr. 1), 25—41 (1955) [Russisch].

Verf. gibt den Beweis eines Theorems für den m -dimensionalen Fall ($m \geq 2$), das er für $m = 2$ schon früher behandelt hat (vgl. dies. Zbl. 14, 66). Die Formulierung des Theorems im allgemeinen Fall findet sich schon bei Giraud, vgl. dies. Zbl. 14, 309. Wieder legt Verf. dem Beweis einen symbolischen Kalkül zugrunde, doch wird jetzt von der Entwicklung von $f(\theta)$ nach m -dimensionalen Kugelfunktionen ausgegangen (vgl. dies. Zbl. 14, 66). *L. Schmetterer.*

Lanczos, C.: An iteration method for the solution of the Eigenvalue problem of linear differential and integral operators. Proc. Symposium spectral theory and differential problems 301—316 (1955).

Verf. gibt eine Näherungsmethode zur Auflösung von Fredholmschen Integralgleichungen an, die dem Ref. wesentlich identisch scheint mit dem bekannten Verfahren, das von Schmeidler z. B. in seinem Buch über Integralgleichungen (dies. Zbl. 35, 349) dargestellt wurde. *H. O. Cordes.*

Börsch-Supan, Wolfgang: Eigenfunktionen einer zusammengesetzten Eigenwertaufgabe als Reihen nach den Eigenfunktionen sämtlicher Teilaufgaben. Stahlbau 24, Nr. 3, 62—63 (1955).

Ein von G. Strigl [Stahlbau 23, 33—39, 51—61 (1955)] für Stabilitätsprobleme verwendetes Verfahren zur Lösung von Eigenwertaufgaben wird untersucht: Es sei der Kern der Integralgleichung $(1) w(s) = \lambda \int K(s, t) w(t) dt$ als Summe reeller symmetrischer stetiger Teilkern darstellbar, und es seien die Eigenfunktionen des zu jedem Teilkern gehörigen Eigenwertproblems bekannt. Dann läßt sich jede Eigenfunktion von (1) aus den Eigenfunktionen der zuletzt genannten Eigenwertprobleme gewinnen. *E. Kreyszig.*

Evgrafov, M. A.: Spektraltheorie der Operatoren einer gewissen Gestalt im Raum der analytischen Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR **105**, 625—627 (1955) [Russisch].

Faisant suite à ses résultats antérieurs (v. ce Zbl. **66**, 88) concernant les opérateurs

$$(1) \quad A(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} K(z, \zeta) F(\zeta) d\zeta; \quad K(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{n,k} \frac{z^k}{\zeta^{n+1}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{n,k} r^{k-n} = 0, \quad 1 - \zeta < r < 1,$$

l'A., en se limitant aux noyaux de la forme

$$(2) \quad K(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n z^n}{\zeta^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{n,k} \frac{z^{k+n}}{\zeta^{n+1}}$$

montre que si $a_m^{(n)}$, $m = 0, 1, \dots$, vérifie les relations

$$(3) \quad (\lambda_n - \lambda_{n+m}) a_m^{(n)} = \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_{n+k, m-k} a_k^{(n)}, \quad a_0^{(n)} = 1,$$

alors les fonctions $\varphi_n(z) = z^n \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(n)} z^m$ vérifient l'équation

$$(4) \quad \lambda_n \varphi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} K(z, \zeta) \varphi_n(\zeta) d\zeta, \quad r < 1$$

(théorème 1). Si $b_m^{(n)}$, $m = 0, 1, \dots$, vérifient

$$(\lambda_n - \lambda_{n-m}) b_m^{(n)} = \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_{n-k-1, k+1} b_k^{(n)}, \quad b_0^{(n)} = 1,$$

alors les fonctions $\psi_n(\zeta) = \sum_{m=0}^n \frac{b_m^{(n)}}{\zeta^{n-m+1}}$ vérifient l'équation $\lambda_n \psi_n(\zeta) =$

$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} K(z, \zeta) \psi_n(z) dz$ (théorème 2). Les suites $\{\varphi_n(z)\}$ et $\{\psi_n(\zeta)\}$ sont biorthogonales (théorème 3). Moyennant un lemme préliminaire, l'A. montre que la suite $\{\varphi_n(z)\}$ satisfaisant à (4) forme une base de l'espace $\mathfrak{A}(|z| < r)$, $r < 1$, et la suite $\{\psi_n(\zeta)\}$ satisfaisant à (5), forme une base pour l'espace $\mathfrak{A}(|\zeta| > r)$, $r < 1$ (théorème 4).

S. Vasilache.

Devinatz, A.: The representation of functions as Laplace-Stieltjes integrals. Duke math. J. **22**, 185—191 (1955).

Using the methods and notation of an earlier paper (this Zbl. **52**, 338), the author proves the following result: Let $f(x)$ be a continuous real-valued function on a convex domain Q (in 2-dimensional space). Necessary and sufficient conditions that there exists a unique bounded non-negative measure $d\alpha(t)$ such that

$$f(x) = \int_a^b e^{x \cdot t} d\alpha(t)$$

are, for $x, y \in \frac{1}{2}Q$,

$$(1) \quad f(x+y) \geq 0, \quad (2) \quad a_k f(x+y) \leq \partial f(x+y) / \partial x_k \leq b_k f(x+y), \quad k = 1, 2.$$

J. D. Weston.

Avakumović, Vojislav G.: Remark on Fatou-Riesz's theorem. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **8**, 85—92 (1955).

Verf. zitiert ein Lemma von Paley-Wiener unrichtig. Eine Berichtigung soll in Band 11 derselben Zeitschrift erscheinen.

H.-E. Richert.

Helson, Henry: Fourier transforms on perfect sets. Studia math. **14**, 209—213 (1955).

Soit P un ensemble parfait borné de la droite réelle, tel que toute fonction continue sur P soit la restriction à P de la transformée de Fourier d'une fonction

sommable; alors il n'existe aucune mesure de Radon non nulle portée par P dont la transformée de Fourier-Stieltjes tende vers 0 à l'infini. La démonstration utilise le théorème d'isomorphisme de Banach.

J. Deny.

Artemiadis, Nicolas K.: Deux théorèmes sur les fonctions appartenant à la classe L_1 ($-\infty, \infty$). C. r. Acad. Sci., Paris **240**, 1500—1502 (1955).

Majorations pour une fonction d'une variable réelle dont la transformée de Fourier est dans une classe simple. Exemple: soit f à valeurs réelles, sommable sur $(0, \infty)$ ainsi que $\frac{f(x)}{x}$; la relation $\int_0^\infty f(x) \sin \alpha x \, dx \neq 0$ pour tout α réel $\neq 0$ entraîne que $|f|$ est presque partout $\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{f(x)}{x} \, dx$ si ce nombre est > 0 . *J. Deny.*

Noble, B.: On some dual integral equations. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 6, 81—87 (1955).

L'A. considère les équations intégrales duales

$$(1) \quad \int_0^\infty t^\alpha \varphi(t) J_\nu(\varrho t) \, dt = f(\varrho), \quad (0 < \varrho < 1); \quad \int_0^\infty \varphi(t) J_\nu(\varrho t) \, dt = g(\varrho), \quad (\varrho > 1)$$

f, g fonctions données, $\varphi(t)$ inconnue, α constante donnée. Solutions de (1) avec $g(\varrho) = 0$ ont été données par Titchmarsh pour $\alpha > 0$ (Introduction to the theory of Fourier integrals, ce Zbl. **17**, 404), par Busbridge pour $\alpha > -2$ (ce Zbl. **19**, 28) et par Tranter pour $\alpha = \pm 1$ (ce Zbl. **44**, 104). L'A. utilise la solution de Busbridge et des formules de Sonine pour déterminer une solution de (1) dans le cas plus général: $g(\varrho) \neq 0$, $-2 < \alpha < 0$. Extension des résultats obtenus au cas $\alpha > 0$.

S. Vasilache.

Bhatnagar, K. P.: Certain theorems on self-reciprocal functions. Bull. Calcutta math. Soc. **47**, 43—52 (1955).

Wenn $\omega_{\mu\nu}(xy) = \frac{1}{\sqrt{xy}} \int_0^\infty J_\nu(t) J_\mu\left(\frac{xy}{t}\right) \frac{dt}{t}$ ($\mu, \nu > -\frac{1}{2}$) und $\omega_{n_1 \dots n_p}(xy) = \int_0^\infty J_{n_p}(t) \omega_{n_1 \dots n_{p-1}}\left(\frac{xy}{t}\right) \frac{dt}{t^{1/2}}$ ($n_1, \dots, n_p > -\frac{1}{2}$) gesetzt wird, so ist die Transformation $g(x) = \int_0^\infty \omega_{n_1, \dots, n_p}(xz) f(z) \, dz$ involutorisch. Es werden folgende Probleme behandelt: Darstellung der selbstreziproken Funktionen (für die $g = f$ ist); Darstellung von $\omega_{n_1 \dots n_p}$ durch hypergeometrische Funktionen; Ableitung neuer selbstreziproker Funktionen aus bereits bekannten; Ausdehnung auf Funktionen f von zwei Variablen.

G. Doetsch.

Mainra, V. P.: Certain integral equations and self-reciprocal functions. Ganita **6**, 55—73 (1955).

Es sei

$$\tilde{\omega}_{\mu_1 \dots \mu_n}(x) = \sqrt{x} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty J_{\mu_1}(t_1) J_{\mu_2}(t_2) \dots J_{\mu_n}(x/t_1 \dots t_{n-1}) (t_1 \dots t_{n-1})^{-1} dt_1 \dots dt_{n-1}.$$

Wenn $f(x)$ selbstreziprok in der Transformation mit dem Kern $\tilde{\omega}_{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$ ist, so erfüllt $F(x) = \sum_{r=1}^\infty f(rx)$ die Integralgleichung

$$\frac{1}{2} f(0) + F(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty f(t) \, dt + \int_0^\infty \psi_{\mu_1 \dots \mu_n}(xy) F(y) \, dy$$

mit $\psi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{\omega}_{\mu_1 \dots \mu_n}\left(\frac{xt}{2\pi}\right) \cos t \, dt$. Es werden ein ähnlicher Satz über $f(x) - f(3x) + f(5x) - \dots$ sowie die Umkehrung dieser Sätze bewiesen.

G. Doetsch.

Jain, Mahendra Kumar: On Meijer transform. Acta math. **93**, 121–168 (1955).
Mit diesem Namen bezeichnet Verf. die von $f(t)$ zu $\varphi(s)$ führende Abbildung

$$\varphi(s) = s \int_0^{\infty} e^{-(st)/2} (st)^{-k-1/2} W_{k+1/2, m}(st) f(t) dt,$$

die hier \mathfrak{M} heiße, und schreibt $f(t) \xrightarrow[m]{k+1/2} \varphi(s)$. In Abschnitt I gibt er 18 Beispiele solcher \mathfrak{M} . Das erste — Formel (2. 2) der Arbeit — scheint dem Ref. (bis auf einen festen Faktor) ein Sonderfall des Integrals (10) auf S. 416 der Tables of integral transforms (TIT) von A. Erdélyi u. a. II, (Bateman Manuscript Project, California Institute of Technology, New York 1954) zu sein: man ersetze dort κ, μ durch $k+1/2, m$, ferner das dortige m durch 1 und setze $\beta = -k+1/2 + \nu - \mu$, $\alpha_1 = \nu$, $\alpha_2 = \nu - \mu - 2k+1$, $\varrho_{1,2} = \nu - \mu - k + 1 \pm m$, $z = s/a$, $x = st$. Dasselbe mit der sehr allgemeinen E -Funktion gebildete Integral (10) dürfte noch andere der 18 Beispiele liefern. — Aus gewissen einfachen Beziehungen im Bild- schließt Verf. auf verwickeltere im Urbild-Bereich; so liefert ihm die Teilbruchzerlegung von $s(s^2 - a^2)^{-1}$ die Formel

$$2 \cdot {}_3F_4 \left[\begin{matrix} 1, 1-k, 3/2-k \\ (2-k \pm m)/2, (3-k \pm m)/2 \end{matrix}; \frac{a^2 t^2}{4} \right] = {}_2F_2 \left[\begin{matrix} 2-2k, 1 \\ 2-k \pm m \end{matrix}; at \right] + {}_2F_2 \left[\begin{matrix} 2-2k, 1 \\ 2-k \pm m \end{matrix}; -at \right]$$

(doppelte Vorzeichen bedeuten, daß beide Parameterwerte zu setzen sind), wenn $\operatorname{Re}(2-k \pm m) > 0$. Auf S. 130, Z. 9 lies μ statt η . Dort ist vorher das Bild zu $f(t) = t^\mu J_\nu(2a\sqrt{t})$ angegeben; trigonometrische Sonderfälle $\nu = \pm 1/2$ (mit $\mu = 1/4$). — Abschn. II enthält Regeln über die durch \mathfrak{M} bewirkte Zuordnung \mathfrak{Z} von Rechenvorgngen, z. B. des Ableitens und Integrierens: Wenn $f(t) \xrightarrow[m]{1} \varphi(s)$,

so gilt $f'(t) \xrightarrow[m]{0} s \varphi(s)$, ferner $\int_0^t f(x) dx \xrightarrow[m]{1} \frac{\varphi(s)}{s}$. Mittels einer solchen \mathfrak{Z} findet man z. B. aus $J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - \nu J_\nu(z)/z$ die folgende zwischen verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen (v. h. F.) bestehende Beziehung:

$$4F_3 \left[\begin{matrix} (\nu+1/2 \pm m)/2, (\nu+3/2 \pm m)/2 \\ \nu+1, \nu/2, (\nu+1)/2 \end{matrix}; -\frac{1}{s^2} \right] = 4F_3 \left[\begin{matrix} (\nu+1/2 \pm m)/2, (\nu+3/2 \pm m)/2 \\ \nu, (\nu+1)/2, (\nu+2)/2 \end{matrix}; -\frac{1}{s^2} \right] - 4F_3 \left[\begin{matrix} (\nu+1/2 \pm m)/2, (\nu+3/2 \pm m)/2 \\ \nu+1, (\nu+1)/2, (\nu+2)/2 \end{matrix}; -\frac{1}{s^2} \right], \operatorname{Re}(\nu + \frac{1}{2} \pm m) > 0, \operatorname{Re} s > 0, |s| > 1.$$

In Abschn. III gibt Verf. 14 Anwendungen des von Jaiswal (dies. Zbl. **46**, 114) verallgemeinerten Goldsteinschen Satzes, daß nämlich, wenn $f_j(t) \xrightarrow[m]{k+1/2} \varphi_j(s)$ ($j = 1, 2$),

$$\text{dann } \int_0^{\infty} f_1(t) \varphi_2(t) \frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} f_2(t) \varphi_1(t) \frac{dt}{t} \text{ ist — und zu vielen davon Beispiele,}$$

in deren Integranden v. h. F. als Faktoren auftreten. Wegen deren Ausdrckbarkeit \mathfrak{M} durch Meijers G -Funktion [vgl. A. Erdélyi u. a., Higher transcendental functions (HTF) I, 215 [5. 6 (1)], dies. Zbl. **51**, 303] scheinen viele davon Sonderfälle des in TIT auf S. 422 angegebenen Integrals (14) zu sein, so etwa des Verf. Endformel \mathfrak{Z} auf S. 140, Z. 6/7 im Beispiel zum Ergebnis 1. Man setze nämlich in \mathfrak{M} erst $p = 1$, $q = 2$ und benutze HTF, S. 209, (8) mit $\sigma = \nu - 1$, — dann $p = 2$, $q = 1$. Damit wird der Integrand in \mathfrak{Z} Produkt zweier G -Funktionen, der durch TIT, S. 422, (14) integriert wird. — Abschn. IV bietet 7 im Bereiche von \mathfrak{M} geltende Sätze über Funktionen, die sich bei der Hankelschen Abbildung \mathfrak{H}_ν der Ordnung ν selbst entsprechen. Der erste, kürzeste davon, an dessen Anfang man $\varphi(s)$ statt $\varphi_1(s)$ lese, sei hier angeführt: Ist die Funktion $t^{-\mu-3/2} f(t^{-1})$ ihr eigenes \mathfrak{H}_ν -Bild, so ist

$$\int_0^{\infty} t^{\nu-\mu-1} {}_2F_5 \left[\begin{matrix} (\nu-\mu-2k+1)/2, (\nu-\mu-2k+2)/2 \\ \nu+1, (\nu-\mu-k+1 \pm m)/2, (\nu-\mu-k+2 \pm m)/2 \end{matrix}; -\frac{a^2 t^2}{4} \right] \varphi(t) dt - \frac{{}_2F_1(\nu-\mu-k+1+m) \Gamma(\nu-\mu-k+1-m) \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\mu-2k+1)} a^{-\mu-\nu-2} f\left(\frac{1}{a}\right)$$

unter der Annahme, daß $\operatorname{Re}(\nu - \mu - k + 1 \pm m) > 0$ und die Integrale konvergieren.

L. Koschmieder.

Jaiswal, J. P.: On Meijer transform. IV. *Ganita* 6, 75—91 (1955).

Anschließend an die in diesem Zbl. 47, 350 referierte Note werden einige neue Eigenschaften der Meijer-Transformation abgeleitet und durch Beispiele illustriert.

G. Doetsch.

Gegelija, T. G.: Über eine Verallgemeinerung eines Satzes von G. Giraud. *Soobščeniya Akad. Nauk Grusinskoj SSR* 16, 657—663 (1955) [Russisch].

L'A. considère l'intégrale à valeur principale au sens de Cauchy, définie par

$$(1) \quad \psi(P) = \iint_S M(Q, P) [\varphi(Q) - \varphi(P)] r^{-2}(Q, P) dS_Q,$$

avec S surface sans lignes multiples; P, Q points de S ; $r(P, Q)$ distance entre P et Q ; $M(P, Q)$ fonction donnée sur S , et $\varphi(Q)$ fonction continue définie sur S . 1. Il introduit tout d'abord la notion de surface de la classe B , définie comme suit: Pour $P \in S$, soient: $\pi(P)$ le plan qui passe par le point P , et $\pi'(P, \nu)$ et $S'(P, \nu)$ respectivement, les parties de $\pi(P)$ et de la surface S contenues à l'intérieur de la sphère $C(P, \nu)$. On suppose qu'il existe une correspondance biunivoque entre $S'(P, \nu)$ et une certaine partie $\pi'(P, \nu)$ de telle sorte que si $Q \in S'(P, \nu)$, il existe $Q' \in \pi'(P, \nu)$ tel que pour tout $Q \in S'(P, \nu)$ l'on ait

$$(2) \quad c_1 r(Q', P) \leq r(P, Q) \leq c_2 r(Q', P), \quad dS_Q \leq c d\sigma$$

c, c_1, c_2, ν étant des constantes positives, et $d\sigma$ l'élément d'aire au point Q' du plan $\pi(P)$. 2. Toute fonction continue $\varphi(Q)$ définie sur S est appelée par l'A., fonction de la classe T , si

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{S(P, \delta)} \frac{|\varphi(Q) - \varphi(P)|}{r^2(P, Q)} dS_Q$$

existe uniformément pour $P \in S$, où $S(P, \delta) = S - S'(P, \delta)$. L'A. établit ensuite: Théorème 1. Si $\omega(\delta, \varphi)$ est le module de continuité de φ sur S , et si $S \in B$ et $\varphi \in T$, alors on a

$$(3) \quad \omega(\delta, \varphi) \leq c \left\{ \omega(\delta, \varphi) + \int_0^\delta \frac{\omega(\tau, \varphi)}{\tau} d\tau + \delta \int_\delta^\eta \frac{\omega(\tau, \varphi)}{\tau^2} d\tau \right\},$$

où c et η sont des constantes positives. Théorème 2. Si $S \in B$ et $\varphi \in T$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^\gamma I(\tau, \varphi) \mu(\tau) d\tau &\leq c \left\{ \int_0^\gamma I(\tau, \varphi) \mu(\tau) d\tau + \int_0^\gamma I(\tau, \varphi) d\tau \int_\tau^\gamma \frac{\mu(t)}{t} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\gamma \frac{I(\tau, \varphi)}{\tau} d\tau \int_0^\tau \mu(t) dt + \int_\gamma^\eta \frac{I(\tau, \varphi)}{\tau} d\tau \int_0^\gamma \mu(t) dt \right\}, \end{aligned}$$

$\mu(t)$ étant une fonction quelconque positive et intégrable, $\tau I(\tau, \varphi) = \omega(\tau, \varphi)$, et c et $\eta > \gamma$ des constantes positives. 3. L'A. étudie ensuite quelques classes plus spéciales de fonctions continues, par exemple les classes $H_\alpha A_p$ et $h_\alpha \lambda_p$ des fonctions φ définies sur S et satisfaisant respectivement les conditions:

$$\omega(\delta, \varphi) = O(\delta^\alpha \lg^{-p} \delta^{-1}) \text{ et } \omega(\delta, \varphi) = o(\delta^\alpha \lg^{-p} \delta^{-1}).$$

Si I_p est l'ensemble des fonctions φ telles que $\int_0^\gamma I(\tau, \varphi) \lg^p \frac{\gamma}{\tau} d\tau < \infty$ alors

$$(S \in B \text{ et } \varphi \in I_0) \Rightarrow (\varphi \in T)$$

(Théorème 3). Les théorèmes 1—3 entraînent le Théorème 4. Si $S \in B$, et φ appartient à l'une des classes $H_\alpha A_p$ ($0 < \alpha < 1$); $H_1 A_{p+1}$, $h_1 \lambda_{p+1}$ ($p < 0$); $H_1 A_{p+1}$, $h_1 \lambda_{p+1}$ ($p < 0$); A_{p+1} , D_{p+1} ($p > 0$); I_{p+1} ($p \geq 0$), I_∞ [où $H_0 A_p = A_p$, $h_0 \lambda_p = D_p$ ($p > 0$)], alors φ définie par (1) appartient respectivement à $H_\alpha A_p$, $h_\alpha \lambda_p$; $H_1 A_p$, $h_1 \lambda_p$; H_1, h_1 ; $H_0 A_p, h_0 \lambda_p$, $I_p, I_\infty = \bigcap_{p > 0} I_p$.

S. Vasilache.

Girault, Maurice: Les fonctions caractéristiques et leurs transformations. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 4, 223—298 (1955).

Diese Dissertation gibt eine recht vollständige Übersicht über die Theorie der charakteristischen Funktionen mit zahlreichen Verschärfungen und Verallgemeinerungen schon bekannter Sätze. In den Kap. I und II werden klassische Eigenschaften dieser Funktionen und ihr Zusammenhang mit den Verteilungen zusammengestellt. Kap. III enthält den Beweis und Verallgemeinerungen des Satzes, daß mit $\varphi(t)$ als charakteristische Funktion auch

$$\Phi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u) du$$

eine charakteristische Funktion darstellt. Zu einer Funktion $\Phi(t)$ gehört eine unimodale Verteilung im Sinne von Khintchine und umgekehrt. In Kap. IV werden notwendige und hinreichende Eigenschaften für Funktionen $\varphi(t)$ gegeben, damit sie als charakteristische Funktionen bestimmter Verteilungen (beispielsweise unstetige Verteilungen oder absolut stetige Verteilungen) betrachtet werden können. Die betreffenden Sätze beruhen auf klassischen Ergebnissen der Theorie der Funktionen von der Klasse L^2 und Multiplikationssätzen für charakteristische Funktionen. In Kap. V wird eine Verallgemeinerung der charakteristischen Funktionen, die Funktionsklasse C diskutiert, gemäß der Definition

$$\varphi(u) = \int e^{iux} dF(x),$$

wobei $F(x)$ eine monoton zunehmende Funktion mit beschränkter Schwankung $\varphi(0)$. Rechnungsoperationen dieser Funktionen werden diskutiert, so daß die Klasse geschlossen bleibt, und als Spezialfall der Darstellungssatz von Khintchine betr. die charakteristische Funktion bewiesen. Im VI. Kap. wird der Zusammenhang zwischen beschränkten komplexen Funktionen von nicht negativem Typus der Klasse \mathfrak{E} und spezieller Verteilungen besprochen. Im VII. Kap. gibt der Verf. eine Verallgemeinerung des Satzes von Pólya betreffend die Konvexität charakteristischer Funktionen.

W. Saxon.

R.-Salinas, Baltasar: Funciones con momentos desaparecidos. Revista Acad. Ci. Madrid 49, 331—368 (1955) [Spanisch].

Soit $F(z)$ une fonction, ou bien définie et sommable sur la demi-droite $x > 0$, ou bien définie et analytique dans un domaine angulaire $|\arg z| < \frac{1}{2}\alpha\pi$. Posons

$$a_n = \int_0^\infty F(x) x^n dx, \quad b_n = \int_0^\infty |F(x)| x^n dx. \text{ Etant donné une suite } m_n \ (n = 0, 1, \dots)$$

de nombres positifs, soit $T(r) = \sup_{n \geq 0} (r^n/m_n)$, $I = \int_1^\infty r^{-3/2} \log T(r) dr$. L'A. donne

des conditions portant sur m_n telles que $b_n \leq m_n$ implique $F(z) \equiv 0$, si les a_n sont nuls (ou suffisamment petits). Voici quelques énoncés plus précis. 1. Soit $F(x)$ mesurable sur $x > 0$. Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$ et $I = \infty$, alors $b_n \leq m_n$ implique

$F(x) \equiv 0$. — 2. Si la suite m_n est telle que $I < \infty$, il existe une fonction $F(z) \not\equiv 0$, analytique et bornée dans la région contenant l'axe $x > 0$ et limitée par la courbe

$z^{1/p} + a^{1/p} = e^{\pm \pi i/p} \lambda$, $\lambda > 2^{1/p} \cos(\pi/p)$, $a > 0$, $p \geq 2$, telle que $a_n = 0$, $b_n \leq m_n$. — 3. Soit $F(z)$ analytique pour $|\arg z| < \frac{1}{2}\alpha\pi$ et $|F(z)| \leq \exp |z|^\sigma$

avec $\sigma < 1/(\alpha + 2)$. Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{|a_n|}/n^\alpha) = 0$ si $\alpha < 1$,

$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\log n \cdot \sqrt[n]{|a_n|}/n) < \infty$ si $\alpha = 1$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{|a_n|}/n) < \infty$ si $\alpha > 1$. Alors

$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{m_n}/n^{\alpha+2}) = 0$ et $b_n \leq m_n$ impliquent $F(z) \equiv 0$. — 4. Si la suite m_n est

telle que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{m_n/n^{v+2}} \right) > 0$, alors il existe $F(z) \not\equiv 0$ analytique et bornée dans $|\arg z| < \frac{1}{2} \alpha \pi$, telle que $a_n = 0$, $b_n \leq m_n$. — L'A. considère aussi le problème analogue pour les moments pris sur la droite entière, ou plus généralement sur les deux cotés d'un angle.

J. Horváth.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Marinescu, Georges: Espaces polynormés, duals des espaces localement convexes. C. r. Acad. Sci., Paris **241**, 1693—1695 (1955).

Es sei E ein lokal konvexer Hausdorffscher Vektorraum und $\{ |x|_\alpha \}_{\alpha \in A}$ die Familie der auf E definierten stetigen Halbnormen. Ferner sei E^* der duale Raum von E . Für jedes $\alpha \in A$ wird

$$\|x^*\|_\alpha = \sup_{|x|_\alpha \leq 1} |\langle x, x^* \rangle|, \quad x^* \in E^*$$

gesetzt. Hierdurch wird auf E^* eine Familie $\{\|x^*\|_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von verallgemeinerten Normen (Normen, die auch den Wert $+\infty$ annehmen können) definiert, und es gilt: (a*) Zu jedem $x^* \in E^*$ gibt es ein $\alpha \in A$ mit $\|x^*\|_\alpha < \infty$; (b*) Zu beliebigen $\alpha, \beta \in A$ gibt es ein $\gamma \in A$ mit $\|x^*\|_\gamma \leq \|x^*\|_\alpha, \|x^*\|_\beta$ für alle $x^* \in E^*$. Der Verf. nennt einen beliebigen Vektorraum E^* , auf dem eine Familie $\{\|x^*\|_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von verallgemeinerten Normen mit den Eigenschaften (a*), (b*) definiert ist, einen „espace polynormé“. Es handelt es sich also um eine Struktur, die der duale Raum E^* eines lokal konvexen Vektorraumes E in natürlicher Weise besitzt. Der Verf. empfiehlt die Heranziehung dieser Struktur zur Untersuchung der dualen Räume E^* . Die Arbeit schließt mit einer Anwendung der eingeführten Begriffe auf lineare Transformationen und ihre Adjungierten.

H. König.

Dorleijn, M.: Convergent sequences in non-archimedian sequence spaces. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **58**, 107—119 (1955).

Verf. hat in seiner Dissertation [Free University of Amsterdam, 's-Gravenhage (1951)] die Theorie der vollkommenen Folgenräume von O. Toeplitz und dem Ref. auf Folgenräume mit Koeffizienten aus einem nichtarchimedisch bewerteten Körper K übertragen. Über einen Teil dieser Ergebnisse wird zuerst referiert. Für das folgende wird die weitere Voraussetzung gemacht, daß in K der Satz von Bolzano-Weierstraß gilt. Mit φ wird der Raum aller Folgen $x = (x_1, x_2, \dots)$ mit nur endlich vielen $x_i \neq 0$ bezeichnet. Ist α ein Folgenraum mit den Elementen $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x_i \in K$, so ist α^* der Raum aller $u = (u_1, u_2, \dots)$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i$ konvergent in K . Es

wird mit α' der Raum aller u mit $|u_i x_i| \leq M(x) < \infty$ für jedes $x \in \alpha$ bezeichnet. Es ist stets $\alpha' \geq \alpha^*$, jedoch nicht immer $\alpha' = \alpha^*$. Verschiedene Beispiele werden untersucht. Ein Folgenraum α heißt normal, wenn er mit $x = (x_1, x_2, \dots)$ alle $y = (y_1, y_2, \dots)$ mit $|y_i| \leq |x_i|$ enthält. Es sei nun $\alpha \geq \varphi$, ferner β normal und $\varphi \leq \beta \leq \alpha^*$. Eine Folge $x^{(n)} \in \alpha$ heißt $(\alpha - \beta)$ -beschränkt, wenn $|u x^{(n)}| \leq M(u) < \infty$ für alle $u \in \beta$ gilt, $(\alpha - \beta)$ -konvergent, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $|u(x^{(n)} - x^{(n+1)})| < \varepsilon$ für $n \geq N(\varepsilon, u)$ und alle $u \in \beta$. Es wird bewiesen, daß jede $(\alpha - \beta)$ -beschränkte Folge in α dann und nur dann eine $(\alpha - \beta)$ -konvergente Teilfolge besitzt, wenn $\beta' = \beta^*$ gilt.

G. Köthe.

Fort jr., M. K.: Category theorems. Fundamenta Math. **42**, 276—288 (1955).

The author sets forth a general theory to cover, among others, known theorems in Analysis, in which the semi-continuity of a function implies the continuity of another function. Now, continuity and semi-continuity of real functions can be treated simultaneously by using different topologies for the set of real numbers. Hence, the author defines: a topology T for the set Y is categorically related to another topology T^* of the same set Y (notation (T, T^*)), if every T -continuous map $f: X \rightarrow Y$ is T^* -continuous at the points of a residual set in X . The basic

theorem gives sufficient conditions for the relation (T, T^*) : There exist sequences $\{U_n\}$, $\{K_n\}$ of sub-sets of Y such that: 1. $U_n \subset K_n$, $n = 1, 2, \dots$; 2. if $p \in U \in T$ there exists n such that $p \in U_n \subset K_n \subset U$; 3. if $q \in U_n$, then there exists $V \in T^*$ such that $q \in V$ and $V - K_n \in T^*$. Applications of this theorem are given under the following headings: Real valued continuous functions and the Baire theorem. The compact-open and the point-open topologies (questions concerning continuity of functions of two variables, supposing continuity in each variable). The overlap topology (continuity of partial derivatives). The space of functions which are indefinitely differentiable and have compact supports. Some miscellaneous theorems. Semi continuous set valued functions. The space of measurable sets. *S. R. Fary.*

Aquaro, Giovanni: Funzioni reali uniformemente separate negli spazii uniformi ed applicazioni agli spazii normali. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. Ser. 39, 401—409 (1955).

E : espace uniforme à topologie non nécessairement séparée selon Hausdorff. f, g, h : fonctions réelles, finies, définies sur E . Définition: Le couple (f, g) est dit „uniformément séparé“ si à tout $\varepsilon > 0$ correspond un entourage V de E tel que $(x', x'') \in V \rightarrow (f(x') < g(x'') + \varepsilon)$. Théorème: Pour tout couple (f, g) uniformément séparé de fonctions bornées il existe une fonction h uniformément continue telle que $f \leq h \leq g$. Applications: 1° Si la fonction φ définie sur $A \subset E$ est uniformément continue et si b. $\inf \varphi = a > -\infty$, b. $\sup \varphi = b < +\infty$, le couple des fonctions (f_a, f_b) définies par $f_a(x) = f_b(x) = \varphi(x)$ pour $x \in A$, $f_a(x) = a$ et $f_b(x) = b$ pour $x \in E - A$, est uniformément séparé. De cette proposition découle, par application du Théorème, un résultat de M. Katětov (ce Zbl. 45, 257). 2° E désignant d'abord un espace normé, non nécessairement séparé selon Hausdorff, est uniformisé au moyen de ses recouvrements ouverts finis. La topologie induite par cette structure uniforme est moins fine (au sens large) que la topologie initiale. Si f est semi-continue supérieurement, g semi-continue inférieurement, et si $-\infty < a \leq f < g \leq b < +\infty$, le couple (f, g) est uniformément séparé. Il existe donc une fonction h uniformément continue telle que $f \leq h \leq g$. Il est montré que ce résultat reste valide si l'on ne suppose plus l'existence de bornes finies a et b et que l'on demande seulement $f \leq g$. Ainsi est obtenue une généralisation d'un théorème de M. Katětov (loc. cit.) et H. Tong (ce Zbl. 46, 162). *Chr. Pauc.*

Ryll-Nardzewski, C.: A remark on the mixing theorem. *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III. 3, 297—298 (1955).

(X, B, m) : measure space with $m(X) = 1$. (Z, P, p) : square of (X, B, m) . T : measurable and measure-preserving transformation of X into itself. Property (a): The square of T is indecomposable in (Z, P, p) . Property (b): For any complex number λ the equation $f(Tx) = \lambda f(x)$ only holds when $f = \text{const}$. It is known that (a) and (b) are equivalent to the weak mixing property if T is one-to-one. The author proves this equivalence without the latter assumption. It suffices to show that non (a) \rightarrow non (b). E denoting an almost $(T \times T)$ -invariant subset with $0 < p(E) < 1$, χ its characteristic function, a kernel $K(x, y)$ is defined either as $= \chi(x, y) + \chi(y, x)$, or $= i\chi(x, y) - \chi(y, x)$ and the Hilbert-Schmidt theory is applied. *Chr. Pauc.*

Inaba, Mituo: Differential equations in coordinated spaces. *Kumamoto J. Sci.*, Ser. A 2, 233—243 (1955).

L'A. considère une équation différentielle $x' = f(t, x)$, où t est réel, x et f prennent leurs valeurs dans un espace de suites E , muni d'une topologie localement convexe ayant les deux propriétés suivantes: 1. il y a un système fondamental de voisinages U de 0 tels que la projection de tout $x \in U$ sur un sous-espace de E défini en égalant à 0 un certain nombre de coordonnées, appartient encore à U ; 2. si $x^{(n)}$ désigne le point dont les coordonnées d'indice $\leq n$ sont égales à celles de x , les coordonnées d'indice $> n$ à 0, alors la suite $(x^{(n)})$ converge vers x . Admettant l'existence de solutions des équations différentielles qu'il étudie, il démontre, par les méthodes habituelles, des théorèmes d'unicité et de dépendance continue en fonction de paramètres,

lorsque des conditions de Lipschitz sont remplies. Il montre aussi que la solution de $x' = f(t, x)$ satisfaisant à des conditions initiales données peut être uniformément approchée par les solutions (satisfaisant aux mêmes conditions initiales) des équations $x' = g_n(t, x)$, où $g_n(t, x)$ est égal, soit à $f^{(n)}(t, x)$, soit à $f(t, x^{(n)})$, soit à $f^{(n)}(t, x^{(n)})$.

J. Dieudonné.

Smith, Kennan T.: Functional spaces, functional completion, and differential problems. Conference on partial differential equations, Univ. Kansas, Summer 1954, 59—75 (1955).

In diesem Vortrag gibt Verf. — meistens ohne Beweise — Resultate der Untersuchungen über die funktionale Vervollständigung und Differentialprobleme, die er gemeinsam mit N. Aronszajn angestellt hat. Es werden definiert die im Zusammenhang mit Randwertaufgaben der Theorie der elliptischen Gleichung 2m-ter Ordnung eingeführten Hilbertschen Normen. Es werden die mit Hilfe dieser Normen erzielten Vervollständigungen der Räume $C_0^{2m}(\Omega_N)$, $C^{2m}(\bar{\Omega}_N)$ charakterisiert. Es wird über die Existenz der Greenschen Funktionen und der Fundamentallösung im Großen berichtet.

K. Maurin.

Meschkowski, Herbert: Über Hilbertsche Räume mit Kernfunktion. (Berichtigung.) Arch. der Math. 6, 481 (1955).

Siehe dies. Zbl. 64, 107.

H. G. Tillmann.

Mikusiński, J.: Une définition de distribution. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 589—591 (1955).

Der Verf. gibt in der vorliegenden Note eine Definition der Distributionen (im Falle einer unabhängigen Veränderlichen), die er für die Anwendungen als besonders günstig erachtet. Die Distributionen endlicher Ordnung werden durch topologische Vervollständigung (mittels „Fundamentalfolgen“) aus den stetigen Funktionen gewonnen. Die Definition unterscheidet sich nur geringfügig von den früher vom Verf. (dies. Zbl. 32, 76) und von anderen Autoren [vgl. z. B. J. Sebastião e Silva, Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 4, 79—186 (dies. Zbl. 64, 358), insbes. p. 182] gegebenen.

H. König.

Zieleźny, Z.: Sur la definition de Łojasiewicz de la valeur d'une distribution dans un point. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 519—520 (1955).

Es sei $f(x)$ eine auf der reellen Zahlengeraden definierte Distribution. In einer früheren Note (dies. Zbl. 65, 102) haben S. Łojasiewicz, J. Wloka und der Verf. den Grenzwert $(1) g(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon x + x_0)$, falls vorhanden, als Wert der Distribution

$f(x)$ im Punkte x_0 definiert. Diese Definition stützte sich auf den damals ohne Beweis formulierten Satz, daß die durch (1) gegebene Distribution $g(x)$, falls vorhanden, eine konstante Funktion ist. In der vorliegenden Note gibt der Verf. einen einfachen Beweis dieses Satzes.

H. König.

Sebastião e Silva, J.: Le calcul opérationnel au point de vue des distributions. Portugaliae Math. 14, 105—132 (1955).

Mit Hilfe seiner Theorie der analytischen Funktionale hat L. Fantappiè (Mem. Accad. Italia 1, 1930) einen Operatorenkalkül entwickelt und zur Lösung von Differentialgleichungen angewandt. Dieser Kalkül wurde vom Verf. präzisiert und erweitert, indem es ihm gelang, die Theorie der analytischen Funktionale in die Theorie der lokalkonvexen Vektorräume einzuordnen (vgl. dies. Zbl. 41, 438). In der vorliegenden Arbeit werden insbesondere die Beziehungen dieses Kalküls zu den auf der Laplacetransformation beruhenden Methoden untersucht. \mathfrak{A}_k sei der Raum der in der Halbebene $\operatorname{Re}(z) > k$ holomorphen Funktionen φ , für die $z^{-k}\varphi(z)$ in $\operatorname{Re}(z) \geq k$ beschränkt ist, mit der Norm $\|\varphi\|_k = \sup_{\operatorname{Re}(z) \geq k} \left| \frac{\varphi(z)}{z^k} \right|$. Es ist $\mathfrak{A}_k \subset \mathfrak{A}_{k+1}$

und es sei \mathfrak{A}_ω der induktive Limes der Räume \mathfrak{A}_k . Der Raum \mathfrak{A}_ω^* aller Funktionen φ , für die $z\varphi(z)$ in einer Halbebene $\operatorname{Re}(z) \geq k$ beschränkt ist, liegt in \mathfrak{A}_ω überall

licht. Für diese ψ gilt die Integralformel

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\psi(\lambda)}{z-\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} h(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda$$

mit $h(\lambda) = 1/(z-\lambda)$ für $\operatorname{Re}(z) > k$ (C_k : Gerade $\operatorname{Re}(z) = k$). $h(\lambda)$ ist eine ganze, holomorphe Funktion mit Werten in \mathfrak{A}_ω . Durch einen Grenzprozeß wird diese kanonische Darstellung auf beliebige Elemente $\varphi \in \mathfrak{A}_\omega$ ausgedehnt und benutzt, um einen allgemeinen Ausdruck für die stetigen, linearen Abbildungen F von \mathfrak{A}_ω in einen (folgenvollständigen) lokalkonvexen Vektorraum E zu gewinnen. Diese Abbildungen werden umkehrbar eindeutig den Funktionen $f(\lambda)$ der komplexen Variablen λ und mit Werten in E zugeordnet, welche den folgenden Bedingungen genügen: $P_1: f(\lambda)$ ist eine ganze Funktion. $P_2: \lambda f(\lambda)$ ist in jeder linken Halbebene beschränkt. P_3 : Für jedes $\varphi \in \mathfrak{A}_\omega$ existiert ein $u \in E$, derart, daß $u = \lim_{C_k} \int f(\lambda) \psi_n(\lambda) d\lambda$ für

jede gegen φ konvergente Folge $\psi_n \in \mathfrak{A}_\omega^*$ und für die k , für die $\varphi \in \mathfrak{A}_k$. Die Zuordnung ist gegeben durch $f(\lambda) = F_z \left[\frac{1}{z-\lambda} \right]$; $F[\varphi] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} f(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda$, wobei k so zu

wählen ist, daß $\varphi \in \mathfrak{A}_k$. (Theorem 1). — Die Grundfrage des Operatorenkalküls ist die folgende: Es sei $\Lambda_c(E)$ der Ring der stetigen linearen Abbildungen (= Operatoren) von E in sich, versehen mit der Topologie der einfachen Konvergenz, und es sei $\Theta \in \Lambda_c(\mathfrak{G})$. Unter welchen Bedingungen gibt es einen stetigen Homomorphismus $\varphi \rightarrow F[\varphi] = \varphi(\Theta)$ des Ringes \mathfrak{A}_ω in $\Lambda_c(E)$, bei dem die konstante Funktion $\varphi(z) = k$ in $\varphi(\Theta) = k = kI$ und die Funktion $\varphi(z) = z$ in $\varphi(\Theta) = \Theta$ übergeht?

Ein solcher Homomorphismus F ist jedenfalls durch seine Indikatrix $f(\lambda) = F[1/(z-\lambda)] = (\Theta - \lambda)^{-1}$ festgelegt und Verf. zeigt, daß für seine Existenz die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend sind: I. $(\Theta - \lambda)^{-1}$ ist eine ganze Funktion von λ mit Werten von $\Lambda_c(E)$. II. $\lambda(\Theta - \lambda)^{-1}$ ist beschränkt auf jeder linken Halbebene. III. $\lim_{\operatorname{Re} \lambda \rightarrow -\infty} \lambda(\Theta - \lambda)^{-1} = I$. Diese Bedingungen sind insbesondere erfüllt, wenn Θ der Differentialoperator $D = d/dx$ im Raume der Distributionen mit nach links beschränktem Träger ist.

Für jedes $\varphi \in \mathfrak{A}_\omega$ ist der Operator $\varphi(\Theta) = \varphi(D)$ also definiert und es ist $\varphi(D)T = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda)}{D-\lambda} T d\lambda$. Nun ist aber $(D-\lambda)^{-1}T = e_{\mathcal{M}} H * T$, wobei H die Heaviside-Funktion ist und $*$ Faltung bedeutet. Es gilt also

$$\varphi(D)T = \Phi * T, \text{ wobei } \Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} e^{\lambda t} H(t) \varphi(\lambda) d\lambda$$

ist. Der Operatorenkalkül bezüglich D ist damit zurückgeführt auf die lineare Transformation $\varphi \leftrightarrow \Phi = \mathfrak{F}(\varphi)$, welche die Umkehrung der Laplacetransformation verallgemeinert. Da Verf. weiter zeigt, daß der Bildraum $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}_\omega)$ genau der von L. Schwartz bestimmte Raum der „Laplace-transformierbaren“ Distributionen ist, folgt, daß dieser Operatorkalkül von D äquivalent ist mit den Methoden der verallgemeinerten Laplace-Transformation im Sinne von L. Schwartz (vgl. dies. Zbl. 47, 349). In den beiden letzten Abschnitten führt Verf. dann noch eine weitere Verallgemeinerung durch, die es gestattet, auch Ausdrücken wie $\cos D$, $\sin D$, e^{iD} , welche im Heaviside-Kalkül viel benutzt werden, einen wohldefinierten Sinn zu geben.

H. G. Tillmann.

Korevaar, Jacob: Distributions defined from the point of view of applied mathematics. I. Distributions defined by fundamental sequences. — II. Derivatives and antiderivatives. Laplace transformation. — III. Convergence convolution. Definite integral. Inverse Laplace transformation. — IV. Multiplication and division. Substitution. — V. Integral of a product. Fourier series. Connection with Schwartz' theory. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58; 368—378, 379—389, 483—493; 494—503, 663—674 (1955).

Dans ce travail l'A. expose une théorie élémentaire des distributions ayant leurs supports dans R_+ . Dans (I) on donne la définition des suites fondamentales de fonctions numériques à supports dans R_+ . Une suite $(f_n(t))_{n \in N}$ de fonctions est fondamentale si: a) $f_n(t)$ est intégrable sur tout intervalle $[0, A] \subset R_+$, quel que soit $n \in N$. b) Pour tout $A > 0$, il existe $p \in N$ tel que la suite

$$(1) \quad f_n^{(-p)}(t) = \int_0^t f_n(t_p) \frac{(t-t_p)^{p-1}}{(p-1)!} dt_p$$

converge uniformément sur $[0, A]$. Deux suites fondamentales sont dites équivalentes si $\alpha)$ Pour tout $r \geq 1$, $(f_n^{(-r)})$ et $(g_n^{(-r)})$ convergent uniformément dans $[0, b]$, $b > 0$, vers $F_r(t)$ et $G_r(t)$ respectivement. $\beta)$ $F_r(t) = G_r(t)$ sur $[0, b]$ ou diffèrent sur $[a, b]$, $0 < a < b$, d'un polynôme de degré $r-1$ tout au plus. Toute limite d'une suite fondamentale est une distribution φ sur R_+ . Deux suites équivalentes définissent la même distribution φ . Dans (II) on définit la dérivation des distributions et la transformation de Laplace des distributions exponentielles. La suite $(g_n)_{n \in N}$ est différentiable si: i) $g_n(t)$ est dérivable p. p. sur R_+ , et $g'_n(t)$

est intégrable sur tout intervalle $[0, A] \subset R_+$. ii) $\int_0^t g'_n(u) du = g_n(t)$, $t \in R_+$. Toute

distribution φ définie par une suite fondamentale (g_n) admet une distribution dérivée φ' , donnée par la suite fondamentale (g'_n) (Définition 6.5). Une suite $(h_n(t))$ est dite de type exponentiel si toute fonction $h_n(t)$ admet une transformée de Laplace et s'il existe un entier $q \geq 0$ et deux nombres H, ρ tels que $|h_n^{(-q)}(t)| \leq H \exp(\rho t)$; $n \in N$; $t \in R_+$. Une distribution φ est de type exponentiel si elle est définie par des suites fondamentales (équivalentes) de fonctions de type exponentiel. La transformée de Laplace $L(\varphi)$ d'une distribution de type exponentiel est définie par (2) $L(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(h_n)$, $h_n(t)$ étant une suite fondamentale (de type exponentiel), définissant la distribution φ (de type exponentiel). Dans (III) l'A. établit tout d'abord

l'unicité de la transformée de Laplace d'une distribution (de type exponentiel) et traite ensuite les notions de convergence, de convolution, d'intégrale définie et d'inverse d'une transformée de Laplace. Une suite de distribution (φ_n) converge vers une distribution φ sur $]a, b[$, $a \geq 0$, s'il existe un entier $p \geq 0$, une suite $(F_n(t))$ de fonctions intégrables et une fonction intégrable $F(t)$ telle que $\varphi_n = [F_n]^{(p)}$ pour $t \in]a, b[$, et $F_n(t) \rightarrow F(t)$ pour $n \rightarrow \infty$, uniformément sur $[a, b]$ et $\varphi = [F^{(p)}]$ sur $[a, b]$. $\{(\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ sur }]a, b[) \Rightarrow (\varphi'_n \rightarrow \varphi' \text{ sur }]a, b[)\}$. La convolution $\varphi * \psi$ des distributions φ et ψ est une distribution w définie par la suite fondamentale $w_n(t) = f_n * g_n$, $n \in N$, avec (f_n) , (g_n) suites fondamentales définissant φ et ψ . $[\varphi, \psi$ de type exponentiel] $\Rightarrow (\varphi * \psi$ de type exponentiel et $L(\varphi * \psi) = L(\varphi) L(\psi)$.) Une distribution φ est dite intégrable si elle est définie par une suite fondamentale (f_n) de fonctions intégrables dans $[a, b]$. On pose par définition

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Dans (IV) sont définies: la multiplication et la division des distributions ainsi que la substitution de variables. Le produit multiplicatif de deux distributions quelconques n'a pas de sens (v. L. Schwartz, Théorie des distributions I, chap. V; ce Zbl. 37, 73). Pour $g(t)$ fonction indéfiniment dérivable à support dans R_+ , et φ distribution définie par la suite fondamentale $f_n(t)$, on définit le produit $g\varphi$ comme distribution de la suite fondamentale $w_n = g f_n$; $n \in N^*$. Pour une distribution d'ordre fini k , $g\varphi$ a un sens pour $g \in C^k(R_+)$. Pour la division, on montre que l'équation $(t-\tau)\varphi(t) = \omega(t)$, $[\omega(t)$ distribution donnée, $\varphi(t)$ distribution inconnue] admet une infinité de solutions (cf. L. Schwartz, loc. cit. p. 122 et sq.). La substitution de variable dans une distribution φ est définie par $\varphi(g(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(g(t))$ pour $g \in C^k([c, d])$, $k \geq 1$, $g'(t) \neq 0$

sur $[c, d]$, $0 \leq a = \min g(t) < \max g(t) = b$, et φ distribution définie par la suite fondamentale (f_n) de fonctions intégrables sur $[c, d]$. Pour les dérivées, on établit les formules (L. Schwartz, loc. cit) $(g\varphi)' = g'\varphi + g\varphi'$ et $(\varphi(g(t)))' = \varphi'(g(t))g'(t)$. Dans (V) on établit la formule d'intégration par parties en montrant que (Théorème 18.1): Si φ est intégrable sur $[a, b]$, $a \geq 0$; si $g \in C^k([a - \varepsilon, b + \varepsilon])$, $\varepsilon > 0$ et $k \geq 1$ suffisamment grand pour que $g\varphi$ soit défini sur $]a - \varepsilon, b + \varepsilon[$; dans ces conditions $g\varphi$ est intégrable sur $[a, b]$ et l'on a

$$\int_a^b \varphi(t) g(t) dt = [\psi(t) g(t)]_a^b - \int_a^b \psi(t) g'(t) dt, \text{ si } a > 0, \text{ resp.} \\ = \psi(b) g(b) - \int_0^b \psi(t) g'(t) dt, \text{ si } a = 0,$$

$\psi(t)$ étant la primitive $U(t) * \varphi(t)$ de $\varphi(t)$ et $U(t) = 0$ pour $t \leq 0$, resp. 1 pour $t > 0$. La substitution de variable dans l'intégrale d'une distribution φ , (intégrable sur $[a, b]$), est donnée par (Théorème 18.15):

$$\int_c^d \varphi(g(t)) f(t) dt = \int_a^b \varphi(u) f(h(u)) h'(u) du.$$

L'A. définit ensuite les séries de Fourier des distributions (non nécessairement périodiques) et le produit scalaire $(\varphi, g) = \int_0^\infty \varphi(t) g(t) dt$, pour $g \in D$, D étant l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support dans R_+ . (Espace de L. Schwartz.) On en déduit $(\varphi', g) = -(\varphi, g')$. Si $g_n \rightarrow g$ dans D (topologique), alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi, g_n) = (\varphi, g)$. De plus (théorème 20.7), il y a correspondance biunivoque entre l'espace des distributions φ sur R_+ et l'espace des formes linéaires T sur D (topologique) de sorte que $(\varphi \leftrightarrow T) \Rightarrow \{(\varphi, g) = T(g), \text{ quelle que soit } g \in D\}$. Dans ces conditions on a $(\varphi, g') = T(g')$ pour toutes fonctions $g \in D$, d'où $(\varphi', g) = -(\varphi, g')$ (après intégration par parties). Le théorème (20.7) et ses conséquences montrent que cette théorie élémentaire de distributions à support dans R_+ , est isomorphe à la théorie de L. Schwartz, des distributions de l'espace D'_+ . S. Vasilache.

Yamanaka, Takesi: Une extension de la théorie des distributions de M. J. Korevaar. I. Commentarii math. Univ. Sancti Pauli 5, 129—136 (1956).

Extension de la théorie élémentaire de I. Korevaar, (voir l'analyse précédente), à l'espace des distributions à support dans R^n , $n \geq 1$, à l'aide de suites fondamentales $(f_n(x))$, de fonctions continues sur tout pavé fermé de R^n . Les suites fondamentales équivalentes appartiennent à une même classe d'équivalence. Chaque classe d'équivalence de suites fondamentales détermine une distribution. Deux distributions φ et ψ sont égales, $(\varphi = \psi)$, si elles sont définies par deux suites fondamentales équivalentes. L'ensemble des distributions ainsi définies forment un espace vectoriel sur C . Si (f_j) est une suite p -fois dérivable, qui détermine la distribution φ , alors la suite fondamentale $(D^p f_j)$ détermine la distribution dérivée $D^p \varphi$ sur R^n . L'A. montre que l'espace des distributions ainsi définies est isomorphe à l'espace D' de L. Schwartz. On définit ensuite le produit multiplicatif et le produit tensoriel des distributions par des procédés analogues à ceux de L. Schwartz et de I. Korevaar. S. Vasilache.

Isihara, Tadashige: Addenda to „On multiple distributions“. This J. 6, 189—201 (1954). Osaka math. J. 7, 129—130 (1955).

In der vorliegenden Note gibt der Verf. eine gegenüber der zitierten Arbeit (dies. Zbl. 57, 339) allgemeinere Fassung des Begriffes der „multiple distribution“, bei der die früheren Ergebnisse im wesentlichen erhalten bleiben. Berichtigung mehrerer Druckfehler. H. König.

Norguet, François: Sur le produit de composition des courants et le nombre algébrique d'intersections de deux chaînes. C. r. Acad. Sci., Paris **240**, 830—832 (1955).

In einer früheren Note (dies. Zbl. **56**, 335) hatte Verf. das Tensorprodukt $S \otimes T$ beliebiger Ströme (= courants) und das Faltungsprodukt $S * T$ von Strömen im R^m definiert. Die Faltung $S * T$ von zwei Distributionen (= Strömen des Grades 0) S und T kann aufgefaßt werden als das direkte Bild $S * T = f(S \otimes T)$ des Tensorproduktes $S \otimes T$ bezüglich der Abbildung $f: (u, v) \rightarrow u + v$ von $R^m \times R^m$ in R^m . Es seien nun U, V, W differenzierbare Mannigfaltigkeiten und f eine Abbildung der Klasse C^∞ von $U \times V$ in W . Für zwei Ströme S und T auf U bzw. V definiert Verf. das verallgemeinerte Tensorprodukt $S * T = f(S \otimes T)$, welches einen Strom auf W darstellt, sofern für jede kompakte Menge $K \subset W$ der Durchschnitt von $f^{-1}(K)$ mit dem Träger von $S \otimes T$ kompakt ist. Die wichtigsten Eigenschaften dieser Operation $S * T$ stehen in sehr enger Beziehung zu bekannten Eigenschaften der Faltung von Distributionen. Die neue Operation wird angewandt auf Schnitte von Ketten in differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

H. G. Tillmann.

Karlin, Samuel: On the renewal equation. Pacific J. Math. **5**, 229—257 (1955).

The first section of the article deals with the discrete renewal equation

$$(1) \quad u_n - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} u_k = b_n, \text{ where the convolution of two sequences } \{x_n\} \text{ and } \{y_n\}$$

is defined as follows $x * y = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} y_k \right\}$ and consequently (1) becomes

$$(2) \quad u - a * u = b. \text{ In the following it is supposed that } a_n \geq 0, \sum a_n = 1 \text{ and } \sum |b_n| < \infty \text{ and that } u_n \text{ is a solution of (2). Let } \{c_n\} \text{ be an absolutely convergent series}$$

and T the linear operation $T\{c_n\} = \{(Tc)_n\}$, $(Tc)_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i$ for $n \geq 0$, resp.

$-\sum_{i=-\infty}^n c_i$ for $n < 0$, $\sigma_n = 1$ for $n \geq 0$, resp. 0 for $n < 0$ and $\Phi_0(c)$ the linear func-

tional $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$. Consider now the conditions: (A) the greatest common divisor of

the indices n where $a_n > 0$ is 1; (B) $\sum |n a_n| < \infty$ and $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n = m \neq 0$

(suppose $m > 0$). Under conditions (A) and (B), there exists a bounded solution of (1) and any two bounded solutions of (1) differ by a fixed constant. A converse

of this result is the following: if $\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k > 0$, $\sum |n a_n| < \infty$ but $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n = 0$,

there exists no bounded solution of (2) provided that $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n > 0$, $a_1 > 0$ and

$a_{-1} > 0$; the theorem is also valid under condition (A) in place of $a_1 > 0$, $a_{-1} > 0$.

As a Tauberian result for (2) it is proved that if u_n is a bounded solution of (1), then $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ and $\lim_{n \rightarrow -\infty} u_n$ exist. Denote now by $v = u - \Phi_0(b)/m$, where

$u = r * b * \sigma$ is the unique bounded solution for which $u_n \rightarrow 0$ when $n \rightarrow \infty$, $\sum |r_n| < \infty$, and $r * T a = \delta$, $\delta = \{\delta_n^0\}$ (the identity element with respect

to $*$); if $a_n \geq 0$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 1$ satisfies (A) and (B) and u_n represents the unique

bounded solution of (2) such that $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, and if $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k b_n| < \infty$ and

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^{k+1} a_n| < \infty$, then $\sum_{n \geq 0} \left| u_n - \frac{\Phi_0(b)}{m} \right| n^{k-1} + \sum_{n < 0} |n^{k-1} u_n| < \infty$ and

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k [u_n - \Phi_0(b)/m] = \lim_{n \rightarrow -\infty} n^k u_n = 0$. Finally, some applications are dis-

cussed. The second section is concerned with the continuous case

$$(3) \quad u(\xi) - \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi - t) df(t) = g(\xi);$$

it is assumed that $df(t) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} df = 1$ and $\int |g| d\xi < \infty$. The following continuous analogues of (A) and (B) are considered: (A') f is a non-lattice distribution;

(B') $\int_{-\infty}^{\infty} |t| df(t) < \infty$ and $\int_{-\infty}^{\infty} t df(t) = m \neq 0$ (suppose $m > 0$). For any function

of bounded total variation $h(t)$, let $\Phi_0(h)$ be equal to $\int_{-\infty}^{\infty} dh(t)$. If u is a bounded solution of (3), $f = f_1 + f_2$, where f_1 is absolutely continuous, the total variation of $f_2 = \lambda < 1$, and $\lim_{|\xi| \rightarrow -\infty} g(\xi) = 0$, then $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ and $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t)$ both exist; if $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$, then $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \Phi_0(g)/m$. Concerning the existence of bounded

solutions of (3), it is proved that if $a(t) \in L^1$ and L^2 , $g(t)$ is bounded, $\int |x|^2 a(x) dx < \infty$ and $\int |x| g(x) dx < \infty$, then a bounded solution $u(t)$ of (3) exists; the result is still valid if $\int |x|^{1+\alpha} a(x) dx < \infty$, $\int |x|^\alpha g(x) dx < \infty$ for some $\alpha > 0$. It is also shown that if $a(t) \in L^1$ and L^p ($1 < p < 2$), $\int |t|^{1+\alpha} a(t) dt < \infty$ with $\alpha > 0$, $\int |g^*(\theta)|^p d\theta < \infty$ and g is bounded, then a bounded solution of (3) exists, where $g^*(\theta)$ is the Fourier transform of $g(t)$. Then theorems concerning limit problems and rates of convergence are given and some applications to the classical renewal equation are considered. In the last section the author considers the abstract renewal equation. (See also: K. L. Chung and H. Pollard, this Zbl. 47, 124; K. L. Chung and T. Wolfowitz, this Zbl. 47, 124; W. L. Smith, this Zbl. 55, 124.)

R. Theodorescu.

Hartman, S.: Quelques remarques sur les expansions de Fourier. *Studia math.* 14, 200—208 (1955).

Exemples d'espaces fonctionnels pouvant être identifiés à une algèbre de Banach R douée des propriétés suivantes: 1°) les éléments de R sont des suites de nombres complexes (les opérations d'algèbre sur les suites étant définies de la manière habituelle); 2°) les suites finies sont denses dans R . On montre en particulier que l'ensemble B des fonctions presque périodiques au sens de Besicovitch $f \sim \sum a_n \exp(i\lambda_n t)$ constituent un tel espace, l'élément de R associé à f étant la suite des coefficients de Fourier de f . De la forme générale des homomorphismes de R sur le corps des complexes, on déduit — entre autres — que, pour tout complexe $c \neq 0$ avec $c + a_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$), les nombres $a_n/(c + a_n)$ sont les coefficients de Fourier d'une autre fonction de B .

J. Deny.

Bohnenblust, H. F. and S. Karlin: Geometrical properties of the unit sphere of Banach algebras. *Ann. of Math.*, II. Ser. 62, 217—229 (1955).

Die Eckpunkte u einer konvexen Menge K in einem reellen linearen Vektorraum kann man charakterisieren durch jede der beiden folgenden Bedingungen: (a) Der Durchschnitt aller Stützebenen durch u besteht aus u allein. (b) Keine Gerade durch u ist Tangente an K . Für komplexe Banachräume ist kein Punkt Eckpunkt der Einheitskugel in diesem Sinne, da mit u auch εu , $|\varepsilon| = 1$, auf dem Rande der Einheitskugel liegt. Verf. geben daher für diesen Fall Modifikationen der Bedingungen (a) und (b) an, welche wieder untereinander äquivalent sind. Def. 1: Ein Punkt u , $\|u\| = 1$, eines komplexen Banachraumes B heißt Eckpunkt der Einheitskugel, wenn die Klasse der linearen Funktionale f mit $f(u) = 1$, $\|f\| = 1$, total ist. Die

Modifikation von (b) benutzt das Gâteaux-Differential

$$\Phi(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \alpha^{-1} (||u + \alpha x|| - ||u||).$$

Die komplex-eindimensionale Mannigfaltigkeit $u + \lambda x$ ist Tangente an die Einheitskugel, wenn $\Phi(\varepsilon x) = 0$ ist für alle ε mit $|\varepsilon| = 1$, was mit $\Psi(x) = \max_{|\varepsilon|=1} \Phi(\varepsilon x) = 0$ äquivalent ist: Def 2: u heißt Eckpunkt der Einheitskugel, wenn für jedes $x \neq 0$ die Funktion $\Psi(x)$ positiv ist. — Die Funktionen Φ und Ψ hängen von dem Bezugspunkt u ab, der in Banachalgebren stets als Einheitsselement gewählt wird. In diesem Falle gilt $\Phi(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \alpha^{-1} \log ||e^{\alpha x}|| = \sup_{\alpha > 0} \alpha^{-1} \log ||e^{\alpha x}||$ und $\Psi(x) = \sup |\lambda|^{-1} \log ||e^{\lambda x}||$ (λ beliebig komplex). $\Psi(x)$ ist stets eine zur Ausgangsnorm äquivalente Norm des Raumes B [da die Ungleichung $\Psi(xy) \leq \Psi(x)\Psi(y)$ nicht gesichert ist, kann Ψ jedoch nicht als Norm der Algebra B angesehen werden]. Das Einheitsselement ist stets Eckpunkt (der Einheitskugel) (Theorem 2), jeder unitäre Punkt x_0 (d. h. $||x_0|| = ||x_0^{-1}|| = 1$) ist Eckpunkt und jeder Eckpunkt ist Extrempunkt. In No. 4 wird an Beispielen gezeigt, daß diese drei Begriffe tatsächlich verschieden sind. In No. 5 wird das Problem der Umnormierung kommutativer B -Algebren behandelt. Für den Spektralradius ρ gilt $\rho(x_0) = \inf ||x_0||$, wobei das Infimum über alle zulässigen Normen der Algebra zu nehmen ist (Th. 4) und für $*$ -Algebren genügt dabei die Beschränkung auf die $*$ -zulässigen Normen (für die $||x|| = ||x^*||$ ist) (Th. 5). Diese Resultate werden dann benutzt, um symmetrische, kommutative $*$ -Algebren und selbstadjungierte Elemente von C^* -Algebren zu charakterisieren. Weiter wird gezeigt, daß in einer C^* -Algebra jedes Funktional f mit $f(u) = 1$, $||f|| = 1$, positiv ist (Th. 10). Hieraus werden mehrere Folgerungen über Operatoren in C^* -Algebren gezogen.

H. G. Tillmann.

Singer, I. M. and J. Werner: Derivations on commutative normed algebras. Math. Ann. 129, 260—264 (1955).

Let D be a bounded derivation on a commutative Banach algebra A over the complex field, i. e., D is a bounded linear functional on A such that $D(ab) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b)$. It is shown that D maps A into its radical so that if A is semi-simple it has only trivial derivations. The second part of the paper is concerned with embedding theorems. Let f be a multiplicative linear functional on A . The linear functional D_f on A is called a point derivation on A if $D_f(ab) = D_f(a)f(b) + f(a)D_f(b)$. It is then shown that a sufficient condition for the existence of a commutative extension B of A , where A is a closed subalgebra of the algebra B , and the existence of a nontrivial bounded derivation D from A into B is the existence of a non-trivial bounded point derivation of A ; also, B is semi-simple if A is. The converse is true if one adds the restriction that D does not map A into the radical of B . It follows, in particular, that the algebra of all continuous functions on a compact Hausdorff space has no non-trivial derivations into any semisimple commutative extension algebra.

F. Levin.

Jerison, Meyer: An algebra associated with a compact group. Pacific J. Math. 5, Suppl. II, 933—939 (1955).

Pour tout groupe compact G et algèbre de Banach, complexe abélienne, R , désignons par $R(G)$ l'ensemble des fonctions continues définies sur G à valeurs dans R , muni de la structure suivante d'algèbre de Banach: 1. les opérations d'addition et de multiplication par des scalaires sont les opérations usuelles; 2. le produit fg de deux éléments $f \in R(G)$, $g \in R(G)$ est défini par l'égalité $fg(x) = \int_G f(xy^{-1})g(y)dm(y)$, m étant la mesure de Haar de G , vérifiant l'égalité $m(G) = 1$; 3. la norme $||f||$ d'un élément $f \in R(G)$ est définie par l'égalité $||f|| = \sup_{x \in G} ||f(x)||$. Dans cet article, l'A. démontre les deux théorèmes suivantes: (A) Soient, G_1, G_2 deux groupes compacts

et R le corps des nombres complexes. Alors, si $R(G_1)$ et $R(G_2)$ sont isomorphes, G_1 et G_2 sont isomorphes. (B) Soient G_1, G_2 deux groupes compacts abéliens et R_1, R_2 deux algèbres de Banach abéliennes, à élément unité. Supposons que $x \in R_i$ ($i = 1, 2$) est idempotent si et seulement si x est l'élément unité de R_i ($i = 1, 2$). Alors, $R_1(G_1)$ et $R_2(G_2)$ sont isomorphes si et seulement si R_1 et R_2 sont isomorphes et G_1 et G_2 sont isomorphes.

C. Ionescu Tulcea.

Ogasawara, Tôzîrô: Topologies on rings of operators. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A 19, 255—272 (1955).

Soit M une algèbre de von Neumann. Le début de l'article expose avec des démonstrations concises des résultats pour la plupart connus concernant la comparaison des sous-espaces $[Mx]$ et $[M'x]$, les états normaux, les isomorphismes spatiaux. L'A. appelle longueur d'un projecteur σ -fini Q le plus petit nombre (fini ou $+\infty$) de projecteurs cycliques dont la borne supérieure soit Q . Théorème 3: les conditions suivantes sont équivalentes: 1) les topologies faible et ultrafaible coïncident sur M ; 2) les topologies forte et ultraforte coïncident; 3) la topologie forte est plus fine que la topologie ultrafaible; 4) si H^f est le sous-espace central maximum tel que M'_{H^f} soit fini, alors M_{H^f} est fini et $C_{H^f}(x) > 0$ (C : fonction de liaison); 5) M_{H^f} est produit d'algèbres σ -finies, et chaque projecteur central σ -fini de M est de longueur finie; 6) tout projecteur σ -fini de M est de longueur finie. Théorème 4: pour que tout projecteur cyclique soit fini, il faut et il suffit que M soit un produit $M_{H_1} \times M_{H_2}$ avec M_{H_1} et M'_{H_2} finies. Théorème 6: les conditions suivantes sont équivalentes: 1) tout projecteur σ -fini de M est cyclique; 2) M_{H^f} est fini et $C_{H^f} \geq 1$; 3) la borne supérieure de deux projecteurs cycliques est cyclique. Il y a d'autres résultats concernant des questions voisines.

J. Dixmier.

Ogasawara, Tôzîrô and Kyôichi Yoshinaga: Extension of \natural -application to unbounded operators. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 19, 273—299 (1955).

Soient S et T des opérateurs (auto-adjoints) ≥ 0 dans un espace hilbertien H , et D_S, D_T leurs ensembles de définition. Écrivons $S \leq T$ si $D_{T^{1/2}} \subset D_{S^{1/2}}$ et $\|S^{1/2}x\| \leq \|T^{1/2}x\|$ pour $x \in D_{T^{1/2}}$. Soit (T_δ) une famille filtrante croissante d'opérateurs ≥ 0 . Une partie du th. I [basé sur des résultats assez fins de E. Heinz (ce Zbl. 43 326) et I. Kaplansky (ce Zbl. 43, 115)] dit que les conditions suivantes sont équivalentes: 1. il existe un $T \geq 0$ majorant tous les T_δ ; 2) les T_δ admettent une borne supérieure; 3) l'ensemble des $x \in H$ pour lesquels $\|T_\delta^{1/2}x\|$ reste borné est dense dans H . Soient maintenant M une algèbre de von Neumann semi-finie, M^\natural son centre, Ω le spectre de M^\natural , Z l'ensemble des fonctions continues ≥ 0 finies ou non sur Ω . Soit $T \rightarrow T^\natural$ une pseudo-application $\natural: M^+ \rightarrow Z$ normale au sens du rapporteur. Pour $T \geq 0$, $T \eta M$, les AA. posent: $T^\natural = \sup A^\natural$ ($A \in M^+, A \leq T$). L'application ainsi définie est normale. Soit \mathfrak{S}^+ l'ensemble des $T \eta M$, $T \geq 0$, pour lesquels $T^\natural \in Z'$ (ensemble des fonctions continues sur Ω , finies sauf sur un ensemble rare de Ω); \mathfrak{S}^+ est la partie positive d'un espace vectoriel \mathfrak{S} invariant par les opérateurs unitaires de M , et les opérateurs de \mathfrak{S} sont mesurables au sens de I. E. Segal; l'application $T \rightarrow T^\natural$ se définit naturellement sur \mathfrak{S} ; elle est positive, linéaire, centrale, et applique \mathfrak{S} sur Z' . Pour que M soit discrète (resp. finie) il faut et il suffit que $\mathfrak{S}^2 \subset \mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{S}^2 \subset \mathfrak{S}$). Les puissances \mathfrak{S}^α , pour tout $\alpha > 0$, se définissent de façon satisfaisante. Les AA. tirent de là de nouvelles démonstrations de théorèmes de I. E. Segal concernant l'intégration non commutative (th. de Fischer-Riesz, th. de convergence monotone, th. de Radon-Nikodym). Il y a d'autres résultats.

J. Dixmier.

Shimoda, Isaac: Notes on general analysis. V: Singular subspaces. J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. Math. 6, 5—18 (1955).

[For parts I—IV see the same J. 2, 13—20 (1952); 3, 12—15 (1953); 4, 1—10 (1955); 5, 1—7 (1955).] Let L_0 be a closed linear subspace of defect at least 2 in a complex Banach space E_1 . Let f on $E_1 - L_0$ to a second complex Banach space E_2

be analytic and homogeneous of positive integral degree n on $E_1 - L_0$. Then f is a homogeneous polynomial of degree n . A function of this kind cannot exist if n is a negative integer. The first assertion is false if the defect of L_0 is 1. A study is made of homogeneous analytic functions on $E_1 - L_0$ when the defect of L_0 is 1. Next it is shown that a closed linear manifold of defect 2 or more cannot contain all the singularities of a function which is otherwise analytic on E_1 . There are some theorems about functions analytic outside a closed linear manifold of defect 1.

A. E. Taylor (Math. Rev. 17, 1114).

Reuter, G. E. G.: A note on contraction semigroups. Math. Scandinav. 3, 275—280 (1955).

Es sei X ein abstrakter (L)-Raum im Sinne von S. Kakutani (dies. Zbl. 27, 111). Eine positive lineare Abbildung P von X in sich heißt dann ein Kontraktionsoperator, wenn $\|Px\| \leq \|x\|$ ist für alle $x \geq 0$ aus X . Gilt sogar $\|Px\| = \|x\|$ für alle $x \geq 0$, so heißt P ein Übergangsoperator (transition operator). Es sei $\Sigma = \{P_t: t \text{ reell} \geq 0\}$ eine Halbgruppe von Operatoren $P_t: X \rightarrow X$ derart, daß P_0 die identische Abbildung, $P_{t+s} = P_t P_s$ und $\lim_{t \rightarrow +0} \|P_t x - x\| = 0$ für alle $x \in X$

ist. Σ heißt Kontraktions- bzw. Übergangshalbgruppe, wenn alle P_t Kontraktions- bzw. Übergangsoperatoren sind. Eine zweite Halbgruppe $\Sigma' = \{P'_t: t \geq 0\}$ dominiert Σ , wenn $P'_t x \geq P_t x$ ist für alle $x \geq 0$ und $t \geq 0$. Untersucht wird die Frage nach der Existenz von Kontraktionshalbgruppen Σ' , die eine vorgegebene Kontraktionshalbgruppe Σ dominieren. Es wird gezeigt: (a) Ist Σ eine Übergangshalbgruppe, so ist $\Sigma' = \Sigma$ die einzige Σ dominierende Kontraktionshalbgruppe. (b) Ist die Kontraktionshalbgruppe Σ keine Übergangshalbgruppe, so existieren unendlich viele verschiedene Kontraktionshalbgruppen Σ' , die Σ dominieren. Wenn $\dim X > 1$ ist, gibt es unter diesen Σ' sogar unendlich viele verschiedene Übergangshalbgruppen. Solche Σ' werden konstruiert mit Hilfe eines infinitesimalen erzeugenden Operators für Σ . Die Aufgabe, alle Σ dominierenden Kontraktionshalbgruppen Σ' zu konstruieren, bleibt ungelöst.

H. Bauer.

Inoue, Sakuji: Simplification of the canonical spectral representation of a normal operator in Hilbert space and its applications. Mem. Fac. Educ. Kumamoto Univ. 3, Suppl. No. 1, 1—50 (1966).

Der Verf. gelangt zu dem (natürlich völlig falschen) Resultat, daß jeder normale Operator, dessen Inverse existiert und der zudem nur Punkteigenwerte besitzt, eine Spektraldarstellung in Form eines Linienintegrals über eine eindeutige, stetige Kurve der komplexen λ -Ebene besitzt.

H. O. Cordes.

Sandgren, Lennart: A vibration problem. Thesis. Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. 13, 82 p. (1955).

Es handelt sich um die Diskussion des folgenden Eigenwertproblems: D sei ein beschränktes Gebiet einer m -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit, dessen Rand S eine differenzierbare $(m-1)$ -dimensionale Fläche ohne Singularitäten bilde. Man betrachte folgende beiden quadratischen Formen:

$$A(u, u) = \int_D g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dR, \quad B(u, u) = \int_{S_q} \varrho u^2 ds.$$

Dabei seien g^{ik} die kontravarianten Komponenten des metrischen Tensors, S_q bezeichne einen gewissen Teil der Randfläche S , ϱ sei eine auf S_q definierte Funktion; dR und ds endlich mögen die Riemannschen Volumelemente auf D bzw. auf S_q bezeichnen. Als gemeinsamer Definitionsbereich von A und B wird der Raum aller in \bar{D} stetig differenzierbaren Funktionen, die auf $S - S_q$ verschwinden, bzw. eine leichte Variante dieses Raumes, betrachtet. Der Autor betrachtet die simultane Hauptachsentransformation beider Formen. Er führt A als Einheitsform ein und definiert mit Hilfe von A ein inneres Produkt sowie den zugehörigen Hilbertraum. Durch die Form B wird dann ein linearer Operator G definiert. Verf. zeigt, daß G

unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über D , S und ϱ vollständig ist, er gibt ferner ausführliche Formeln für die asymptotische Verteilung der Eigenwerte von G . Die dabei verwendeten Beweismethoden sind im wesentlichen die von H. Weyl und R. Courant zum Studium von Sturm-Liouvilleschen Problemen benutzten. Das Problem enthält als Spezialfall die von Hilbert (Integralgleichungen, S. 80) diskutierte Lösung eines gewissen hydrodynamischen Problems, das auch schon von Poincaré diskutiert wurde.

H. O. Cordes.

Bajraktarević, M.: Sur les itérées continues et leur application à la recherche des fonctions de certaines suites itérées. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 8, 13—22 (1955).

Es liegen bereits seit einiger Zeit tiefergehende Beiträge zum Thema vor (siehe z. B. Kneser, dies. Zbl. 35, 48 und Ref., dies. Zbl. 41, 405, wo auch weitere Literatur nachgewiesen wird), auf die Verf. aber leider nicht Bezug nimmt. Bei den Sätzen I und II handelt es sich um modifizierte ältere bekannte Ergebnisse. Interessant bleibt bei Satz III die vom Verf. bereits früher (dies. Zbl. 50, 119) eingeführte Methode, nach der — ebenso wie dort — eine Lösung der Abelschen Funktionalgleichung gewonnen wird (siehe auch Verf., dies. Zbl. 58, 336).

H. Töpfer.

Praktische Analysis:

Adachi, Ryuzo: On the Newton's method for the approximate solutions of simultaneous equations. Kumamoto J. Sci., Ser. A 2, 259—272 (1955).

Die Newtonsche Methode zur Auflösung der Gleichung $f(x) = 0$ wird auf den Fall, daß gleichzeitig zwei Gleichungen $f(x, y) = 0$ und $\varphi(x, y) = 0$ zu lösen sind, erweitert und an einigen numerischen Beispielen ausführlicher durchgeführt.

H. Molitz.

Aitken, A. C.: Studies in practical mathematics. VIII. On the iterative methods of Lin and Friedman for factorizing polynomials. Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 64, 190—199 (1955).

In der Arbeit werden zunächst drei Methoden beschrieben. 1. Bei Lins erster Methode (vgl. dies. Zbl. 26, 235) wird das Polynom $f_n(x)$ vom Grade n durch einen Versuchsteiler $t_m(x)$ vom Grade m solange dividiert, bis der Rest ebenfalls vom Grade m ist. Division des Restes durch den führenden Koeffizienten liefert den neuen Versuchsteiler (reduced penultimate remainder). Bezüglich Konvergenzuntersuchungen vgl. dies. Zbl. 46, 347; 52, 129. 2. Bei Lins zweiter Methode wird die Division durch den Versuchsteiler ganz durchgeführt, der Quotient q_{n-m} ermittelt und der Rest vernachlässigt. Anschließend wird $f_n(x)$ durch $q_{n-m}(x)$ dividiert und $t_m^*(x)$ erhalten. Diese Division erfolgt aber nach aufsteigenden Potenzen von links nach rechts, beginnend mit dem konstanten Glied, der Koeffizient bei x^m wird einfach 1 gesetzt. $t_m^*(x)$ stellt den neuen Teiler dar. 3. Bei dem Vorgehen von Friedman (vgl. dies. Zbl. 34, 218) wird der Koeffizient bei x^m genau ermittelt. Nach Division des Quotienten durch diesen Koeffizienten erhält man den neuen Teiler $t_m^{**}(x)$. — Dann folgen Konvergenzuntersuchungen über die Verfahren 2 und 3, indem die Fehlertransformationsmatrizen aufgestellt werden. Die Güte der Konvergenz wird durch die dominierenden Eigenwerte erfaßt. Mit Ausnahme des Falles, daß der Teiler linear ist, lassen sich keine praktisch brauchbaren Kriterien angeben. Empfohlen wird Methode 1, die theoretisch durchsichtiger ist und Konvergenzbeschleunigungen erlaubt (vgl. dies. Zbl. 64, 123). Zahlenbeispiele.

H. Unger.

Greenspan, Donald: Methods of matrix inversion. Amer. math. Monthly 62, 303—318 (1955).

Zusammenstellung von 10 Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix und Durchrechnung je eines Beispiels mit dem Ziel, Physikern mit geringen Kenntnissen in Matrizenrechnung die Anwendung der Methoden zu erleichtern. Die Darstellung lehnt sich an O. Taussky-J. Todd an (vgl. dies. Zbl. 48, 249) und schließt mit einer

ausführlichen Bibliographie der neueren Arbeiten (vorwiegend in englischer Sprache) über Matrixinversion.

H. Rohrbach.

Householder, A. S.: Terminating and nonterminating iterations for solving linear systems. J. Soc. industr. appl. Math. 3, 67—72 (1955).

Verf. zeigt, daß das folgende allgemeine Iterationsverfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = h$ (A nichtsingulär, n -reihig) die bekannten Lösungsmethoden durch Orthogonalisierung bzw. — bei Vertauschung der Begriffe Zeile und Spalte — die Methode der konjugierten Gradienten als Spezialfälle enthält. Mittels einer nahezu beliebig vorgegebenen Vektorfolge u_v und den daraus gebildeten $v_v = Au_v$ lautet die Iterationsvorschrift für die Lösungsfolge x_v mit den Residuen $r_v = h - h_v = h - Ax_v$:

$$x_{v+1} = x_v + \lambda_{v+1} u_{v+1}, \quad \lambda_{v+1} = r_v^\top v_{v+1} / v_{v+1}^\top v_{v+1}.$$

Das Verfahren konvergiert z. B. immer, wenn $u_{n+v} = u_v$ und u_1, \dots, u_n linear unabhängig. Geometrisch bedeutet die Vorschrift, daß r_{v+1} die zu v_{v+1} orthogonale Komponente von r_v ist. Durch zusätzliche Orthogonalitätsforderungen erhält man die genannten, nach spätestens n Schritten abbrechenden Verfahren; bei nur approximativer Erfüllung dieser Forderungen kann man unter zyklischer Fortsetzung der konstruierten Vektoren u_1, \dots, u_n nach dem vorgeschlagenen Verfahren gut konvergente iterative Verbesserungen anbringen. Auch auf Ausgleichsprobleme nach der Methode der kleinsten Quadrate ist das Verfahren anwendbar.

J. Weissinger.

Bauer, Friedrich L.: Der Newton-Prozess als quadratisch konvergente Abkürzung des allgemeinen linearen stationären Iterationsverfahrens I. Ordnung (Wittmeyer-Prozess). Z. angew. Math. Mech. 35, 469—470 (1955).

Die Matrizenfolge $Y_i = [E - (E - B^{-1}A)^i] A^{-1}$, die gegen A^{-1} konvergiert, falls die Beträge aller Eigenwerte von $E - B^{-1}A$ kleiner als 1 sind, besitzt das Additionstheorem $Y_{i+k} = Y_i + Y_k(E - AY_i)$, läßt sich also zugleich als ein Wittmeyerscher ($k=1$) und als ein Newtonscher ($k=i$) Prozeß auffassen. Zur Berechnung von A^{-1} ist der Newtonsche, zur Lösung des Gleichungssystems $Ay = b$ der Wittmeyersche Prozeß $y_{i+1} = y_i + B^{-1}(b - Ay_i)$ im allgemeinen überlegen. Die für $y_i = Y_i b$ geltende Formel $y_{2i} = y_i + (E - B^{-1}A)^i y_i$ hat den Nachteil, nicht selbstkorrigierend zu sein.

J. Weissinger.

Wittmeyer, H.: Berechnung einzelner Eigenwerte eines algebraischen linearen Eigenwertproblems durch „Störiteration“. Z. angew. Math. Mech. 35, 441—452 (1955).

Seien A, B quadratische Matrizen n -ter Ordnung, λ_e ein beliebiger einfacher Eigenwert von $(A - \lambda B)x = 0$ mit dem Eigenvektor x_e , $\lambda^{(0)}$ und $x^{(0)}$ entsprechende Näherungslösungen. Das Zeichen \sim bedeute das Streichen der ersten Zeile in einer ein- oder mehrspaltigen Matrix, das Zeichen \wedge das Streichen der ersten Zeile und Spalte in einer quadratischen Matrix. Die Matrix $H = A - \lambda^{(0)}B$ habe die Spalten- bzw. Zeilenvektoren H_1, \dots, H_n bzw. K'_1, \dots, K'_n . Voraussetzungen: I. $\lambda^{(0)}$ liege näher an λ_e als an allen übrigen Eigenwerten, es sei $\det H \neq 0$. II. Die Spalten von H seien so geordnet, daß die erste Komponente x_{e1} von x_e nicht gleich Null und möglichst die absolut größte ist. III. Die Zeilen von H seien so geordnet, daß $\det \hat{H} \neq 0$ ist. IV. Der Näherungsvektor $x^{(0)}$ sei auf $x_1^{(0)} = 1$ normiert und enthalte (bei Entwicklung nach Hauptvektoren) eine nicht verschwindende Komponente von x_e ; die Iteration soll nicht auf einen Vektor $x^{(i)}$ führen mit $y' B x^{(i)} = 0$. Dabei ist $y = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$, wobei \tilde{y} aus $\hat{H}' \tilde{y} = -\tilde{K}_1$ zu berechnen ist. Die auf einem Störansatz beruhende Iterationsvorschrift lautet: Ist $x^{(i)}$ mit $x_1^{(i)} = 1$ bekannt, so bilde man $w^{(i)} = B x^{(i)}$ und $v^{(i+1)} = \alpha / y' w^{(i)}$ mit $\alpha = H_1' y$ und berechne $x^{(i+1)}$ aus $\hat{H} \tilde{x}^{(i+1)} = v^{(i+1)} \tilde{w}^{(i)} - \tilde{H}_1$, $x^{(i+1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{x}^{(i+1)} \end{pmatrix}$. Der Eigenwert braucht erst am Schluß der Iteration berechnet zu werden aus $\lambda^{(i+1)} = \lambda^{(0)} + v^{(i+1)}$, bzw. bei

symmetrischem A und B besser aus $\lambda^{(i+1)} = \lambda^{(0)} + v^{(i)} \cdot x^{(i)'} w^{(i-1)} / x^{(i)'} w^{(i)}$ ($i \geq 1$, $x^{(i)'} w^{(i)} \neq 0$) oder bei Hermiteschen A, B und positiv definitem B aus $\lambda^{(i+1)} = \lambda^{(0)} + v^{(i)} \cdot \bar{x}^{(i)'} w^{(i-1)} / \bar{x}^{(i)'} w^{(i)}$ ($i \geq 1$). Die Konvergenz wird sichergestellt durch den Beweis, daß jede Eigenvektor- und Eigenwertfolge einer Störiteration identisch ist mit der entsprechenden Folge einer gebrochenen Iteration nach Wielandt. Das allgemeine Verfahren ist mit zahlreichen Anweisungen für die praktische Durchführung versehen und durch ein numerisches Beispiel illustriert. In zwei Tabellen wird die Störiteration mit der gebrochenen und mit der Newtonschen (Unger) verglichen mit dem Resultat, daß die Zahl der benötigten Multiplikationen und Divisionen geringer ist und daß die Störiteration die Vorzüge der beiden anderen Verfahren vereint; insbesondere muß bei jedem Iterationsschritt ein lineares Gleichungssystem in $n-1$ Unbekannten gelöst werden, dessen Matrix fest und nicht nahezu singular ist.

J. Weissinger.

Paasche, I.: Ein Äquivalenzsatz für Summengleichungen. Z. angew. Math. Mech. 35, 333 (1955).

Sei $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_v z^v$ in $|z| \leq q$ regulär und $\neq 0$. Dann ist auch $\frac{1}{f(z)} = \sum_{v=0}^{\infty} \Gamma_v z^v$ dort regulär. Man kann γ und Q so wählen, daß $\max \left(\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{|\gamma_v|}, \lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{|\Gamma_v|} \right) < \gamma^{-1} < Q^{-1} < q^{-1}$. Dann wird der Satz bewiesen: Das Gleichungssystem $\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu v} x_{\mu+v} = c_\mu$ mit den Bedingungen $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt[\mu]{|c_\mu|} \leq q$, $|a_{\mu v}| \leq k_\mu Q^{-v}$, $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt[\mu]{k_\mu} < \gamma Q^{-1}$ besitzt bei der Konvergenzbedingung $\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{|x_v|} \leq q$ genau die gleichen Lösungen wie das transformierte System $\sum_{v=0}^{\infty} A_{\mu v} x_{\mu+v} = C_\mu$ mit $A_{\mu v} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\mu+\lambda, v-\lambda} \gamma_\lambda$, $C_\mu = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\mu+\lambda} \gamma_\lambda$. D. h. die neuen Koeffizienten genügen den gleichen Abschätzungen wie die alten. Es ist klar, daß solche Transformationen für die praktische Auflösung z. B. durch Iteration von großem Nutzen sein können.

G. L. Tautz.

Zanaboni, Osvaldo: Procedimento di risoluzione approssimata delle equazioni differenziali ordinarie. Revista Mat. Univ. Parma 6, 89—110 (1955).

Die Methode des Verf. besteht darin, daß eine allgemeine Differentialgleichung n -ter Ordnung $D(y) = 0$ in einer Form $M(y) = N(y)$ geschrieben wird, wo N ein Differentialoperator einer niedrigeren Ordnung und M ein Differentialoperator n -ter Ordnung von leicht integrierbarem Typus ist. Ist $\alpha(x)$ die Lösung der gegebenen Gleichung, so wird diese auch Lösung von $M(y) = N(\alpha)$ sein. Verf. geht jetzt von einer willkürlichen Funktion, die den Randbedingungen genügt, aus — $\alpha_0(x)$ — und löst die Gleichung $M(y) = N(\alpha_0)$. Das Integral dieser Gleichung enthält die Parameter der Funktion $\alpha_0(x)$ und einige Integrationskonstanten. Diese werden so gewählt, daß das Integral wieder den Randbedingungen genügt. Mit dieser so erhaltenen Funktion $\alpha_1(x)$ operiert Verf. in derselben Weise. Beispielsweise behandelt Verf. die Gleichungen und Probleme: I. $y'' + y = 0$, für $x = 0$ ist $y = 1$ und $y' = 0$; II. $y'' + y = 0$, für $x = 0$, $y = 1$, für $x = 1$, $y = 0$; III. die Bestimmung der ersten und dritten Eigenfunktion und der zugehörigen Eigenwerte von $y'' + \alpha^2 y = 0$, $y = 0$ für $x = +p$ und $x = -p$; IV. die Bestimmung von $y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$; V. $x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1) y = 0$, für $x = 0$ ist $y = 0$ und $y' = 0,5$. VI. $y''' + y^2 / \sin \frac{1}{2} \pi x = 10$, für $x = 0$ ist $y = 0$ und $y' = 1$, für $x = 2$ ist $y = 4$.

E. M. Bruins.

Urabe, Minoru and Shigetoshi Mise: A method of numerical integration of analytic differential equations. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 19, 307—320 (1955).

Neuere Möglichkeiten zur Fehlerabschätzung im Falle einer numerischen Approximation analytischer Funktionen sind von P. Davis (vgl. dies. Zbl. 50, 130) angegeben worden. Die Methoden werden hier auf die numerische Integration von analytischen Differentialgleichungen angewandt und den bisherigen Formeln gegenübergestellt. Die Integration erfolgt mit der Formel

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = h \sum_{j=-1}^N a_j f(x_{-j}) + E(f), \quad x_{-j} = x_0 - jh \quad (h > 0).$$

In $|z - x_0| < \varrho$ sei die Gültigkeit der Taylorentwicklung und $\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} f \bar{f} d\vartheta =$

$2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |c_n \varrho^n|^2 < \infty$ mit $z - x_0 = \varrho \exp i\vartheta$ vorausgesetzt. h werde so gewählt,

daß $|x_{-j} - x_0| < \varrho$ für $j = -1, 0, 1, \dots, N$. Mit $x = x_0 + \varrho u$, $h = \varrho h_0$ und $f(x_0 + \varrho u) = \Phi(u)$ ergibt sich für die Korrektur: $E(f) = \varrho E_0(\Phi)$. Bei E bzw. E_0 handelt es sich um beschränkte lineare Operatoren. Unter den gemachten Voraussetzungen ergibt sich folgende Abschätzung:

$$|E_0(\Phi)|^2 \leq \sigma_{E_0}^2 \|\Phi\|^2 \quad \text{mit} \quad 2\pi \sigma_{E_0}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |E_0(u^n)|^2.$$

$\sigma_{E_0}^2$ wird nun als Funktion der a_j aufgefaßt und es wird gezeigt, daß ein Minimum vorliegt bei Erfüllung der Gleichungen $\sum_{j=-1}^N g_{kj} a_j - g_k = 0$ für $k = -1, 0, 1, \dots, N$

mit $g_{kj} = 1/(1 - jkh_0^2)$ und $g_k = (1/kh_0^2) \log(1 + kh_0^2)$. Durch diese Gleichungen werden die Koeffizienten a_j im Sinne einer nach Davis günstigen Approximation ermittelt. Es folgen Vergleiche mit den bisher üblichen Formeln, die meist von $E_0(u^n) = 0$ für $n = 0, 1, 2, \dots, M$ ausgehen mit $M = N + 1$ (Interpolationsformel) bzw. mit $M = N$ ($a_{-1} = 0$) (Extrapolationsformel). Es wird gezeigt, daß bei stark veränderlichem $V^M f$ die neuen Formeln den bisherigen überlegen sind. Die neuen Koeffizienten sind jedoch von der Breite des Intervalls abhängig. — Es werden verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung der a_j , teilweise in Form von Korrekturen, die an den üblichen Koeffizienten anzubringen sind, besprochen. Für $N = 3$, $M = 3$; $N = 2$, $M = 3$; $N = 4$, $M = 4$ und $N = 3$, $M = 4$ werden bei $h_0 = 0,1$ die alten und neuen Koeffizienten einschließlich zweier einfach zu berechnender Korrekturen angegeben. Als Beispiel wird die Differentialgleichung $y' = 6y/(x-1)$ behandelt mit der exakten Lösung $(x-1)^6$. H. Unger.

Adachi, Ryuzo: A method on the numerical solutions of some differential equations. Kumamoto J. Sci., Ser. A 2, 244—252 (1955).

Eine gewöhnliche Differentialgleichung $y' = \varphi(x, y)$ mit der Bedingung $g(y_0, y_1, \dots, y_m) = 0$ soll durch Einführung von $y'_{j+k} = \sum_{i=0}^p B_{i,j} y_{i+k}$ gelöst werden. Das entstehende System von $m+1$ simultanen Gleichungen $\sum B_{i,j} y_{i+k} = \varphi(x_{i+k}, y_{j+k})$ läßt sich für $j+k = 0, 1, \dots, m$ wegen des Verschwindens der Determinante $|B_{i,j}|$ nicht benutzen, wohl aber das gleiche System mit $i+k = 1, 2, \dots, m$ in Verbindung mit der Bedingungsgleichung $g(y_0, y_1, \dots, y_m) = 0$. Analoges gilt für die Differentialgleichung 2. Ordnung. Nach einer kurzen Fehlerbetrachtung folgt die numerische Durchrechnung mehrerer einfacher Beispiele von Differentialgleichungen 2. Ordnung mit vorgegebenen Randbedingungen. H. Molitz.

Luke, Yudell L.: Remarks on the τ -method for the solution of linear differential equations with rational coefficients. J. Soc. industr. appl. Math. 3, 179—191 (1955).

Zur maschinellen Berechnung von Lösungen linearer Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten wird der τ -Methode eine geeignete Form gegeben für den Fall, daß die Koeffizienten der formalen Potenzreihenentwicklung der Lösung

einer zweigliedrigen Rekursionsformel genügen. Den eindrucksvollen Beispielen hierfür ist ein weiteres für den Fall einer dreigliedrigen Rekursionsformel hinzugefügt.

H. Tietz.

Peaceman, D. W. and H. H. Rachford jr.: The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. J. Soc. industr. appl. Math. 3, 28—41 (1955).

Die Verff. behandeln das instationäre Wärmeleitungsproblem

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u, \quad x = \pm 1: u = 0, \quad y = \pm 1: u = 0, \quad t = 0: u = 1$$

näherungsweise mit Hilfe des Differenzenverfahrens. Ist $\Delta x = \Delta y$ die Maschenweite des Gitters, das das Quadrat überdeckt und Δt die Zeitmasche, so ist das übliche Differenzenverfahren nur für $\lambda = \Delta t / (\Delta x)^2 \leq \frac{1}{4}$ stabil. Infolgedessen wird bei einer feinen Teilung die Zeitmasche sehr klein und die Rechenarbeit groß. Dieser Nachteil wird durch ein implizites Differenzenverfahren vermieden, das für beliebige λ -Werte stabil ist; bei ihm werden zur Approximation des Laplaceschen Operators u -Werte benutzt, die noch nicht bekannt sind. Man erhält so ein lineares Gleichungssystem, das iterativ lösbar ist. Eine Verringerung der Rechenarbeit erreicht man durch ein von den Verff. vorgeschlagenes Verfahren, bei dem zur Approximation von Δu einmal in x -Richtung, ein zweites Mal in der y -Richtung unbekannte Werte benutzt werden. Man erhält jetzt leicht lösbare dreigliedrige Gleichungssysteme. Das Verfahren ist für alle λ -Werte stabil. Auch auf das Dirichletsche Problem in der Ebene ist der Grundgedanke der Methode anwendbar.

A. Weigand.

Douglas jr., Jim: On the numerical integration of $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = \partial u / \partial t$ by implicit methods. J. Soc. industr. appl. Math. 3, 42—65 (1955).

Es wird bewiesen, daß das von D. W. Peaceman und H. H. Rachford angegebene implizite Differenzenverfahren (s. das vorhergehende Referat) für das dort behandelte spezielle Anfangs- und Randwertproblem der Wärmeleitung bei abnehmender Maschenweite gegen die Lösung des Differentialproblems konvergiert. Der Fehler ist $O(\Delta t)$, die Konvergenz unabhängig von $\lambda = \Delta t / (\Delta x)^2$.

Rall, L. B.: Error bounds for iterative solutions of Fredholm integral equations. Pacific J. Math. 5, Suppl. II, 977—986 (1955).

Für die linearen Operatoren T in einem vollständigen, normierten, linearen Raum X mit den Elementen x und der Norm $\|x\|$ werde gesetzt:

$$M(T) = \sup (\|Tx\| / \|x\|), \quad m(T) = \inf (\|Tx\| / \|x\|), \quad \|x\| \neq 0.$$

Verf. beweist folgende beiden Sätze. Satz 1: Ist F ein linearer Operator in X , so hat die Gleichung $Fx = y$ dann und nur dann für jedes $y \in X$ genau eine Lösung $x \in X$, wenn ein linearer Operator P in X samt seinem Inversen P^{-1} existiert mit der Eigenschaft

$$(1) \quad M(I - PF) < 1.$$

Die Lösung lautet $x = \sum_{j=0}^{\infty} (I - PF)^j P y$. Satz 2: Besitzt $Fx = y$ für jedes y aus dem normierten, linearen Raum X genau eine Lösung $x \in X$ und existiert ein Operator P mit der Eigenschaft (1), so konvergiert die Iterationsfolge $x_n = (I - PF)x_{n-1} + P y$ bei beliebigem $x_0 \in X$ gegen die Lösung x ; der Fehler kann abgeschätzt werden durch

$$\|x - x_n\| \leq [M(I - PF)]^n \|x - x_0\|$$

und

$$\|x - x_n\| \leq [m(PF)]^{-1} M(I - PF) \|x_n - x_{n-1}\|.$$

Verf. benutzt diese Sätze, um Fehlerabschätzungen für die Methoden von Neumann, Wiarda, Bückner, Wagner und Samuelson zur Lösung von Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art herzuleiten. Die drei ersten Methoden werden durch ein Zahlenbeispiel verdeutlicht.

J. Weissinger.

● **Todd, John** (edited by): **Experiments in the computation of conformal maps.** (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 42.) Washington: Government Printing Office. III, 61 p. 40 cents.

In diesem Bericht werden verschiedene Methoden zur effektiven Bestimmung der Abbildungsfunktion zunächst theoretisch untersucht und dann numerisch erprobt. I. A. M. Ostrowski: Abbildung des durch die Ellipse $(u/a)^2 + (v/b)^2 = 1$, $a = 1.2$, $b = 1$, berandeten endlichen Gebietes auf den Einheitskreis nach dem Verfahren von Theodorsen-Garrick. Die Hauptaufgabe besteht bei dieser Methode in der Auswertung von Integralen der Form $\int_0^{2\pi} (f(x+t) - f(x-t)) \cotg \frac{1}{2} t dt$. II. S. E. War-

shawski und J. Todd: Die glatte Jordankurve C mit der Parameterdarstellung $z = \zeta(s)$, $0 \leq s \leq L$, berandet ein endliches Gebiet G , das durch $w = f(z)$ auf $|w| < 1$ konform abgebildet wird. Die Funktion $\theta(s) = \arg f(\zeta(s))$ genügt der Integralgleichung von Gershgorin-Lichtenstein $\theta(s) = \int_0^L K(s, t) \theta(t) dt - \beta(s)$. Die iterative

Lösung dieser Integralgleichung wird theoretisch untersucht; die numerische Behandlung bezieht sich auf die in I. erwähnte Abbildungsaufgabe für $k = a/b = 1.2$, $k = 2$ und $k = 5$. III. L. Ahlfors, G. Blanch und L. K. Jackson: Ein geradliniges Polygon der z -Ebene mit den Ecken z_j wird nach Schwarz-Christoffel durch $z =$

$C \int \prod_{j=1}^n (w - a_j)^{\omega_j - 1} dw$ auf $|w| < 1$ abgebildet. C und $a_j = e^{i\omega_j}$ sind unbekannt

Wenn z_0 in $w = 0$ übergeht, gilt $\omega_{j+1} - \omega_j = 2\pi u(z_0)$. $u(z_0)$ ist das harmonische Maß der Polygonseite $z_j z_{j+1}$ für den Punkt z_0 . Falls diese Maße bekannt sind, können die unbekannten Größen bestimmt werden. Zur Bestimmung der harmonischen Maße werden zwei Methoden diskutiert: a) Polynome mit Extremaleigenschaften, b) Ausbau des klassischen alternierenden Verfahrens. Nach b) wird das harmonische Maß für ein Rechteck ($u = 1$ auf einer Seite, sonst $u = 0$) numerisch bestimmt. Dabei bewirken passende Mittelbildungen erhebliche Verbesserungen der Konvergenz.

H. Wittich.

Forsythe, George E.: **Computing constrained minima with Lagrange multipliers.** J. Soc. industr. appl. Math. 3, 173—178 (1955).

Bemerkungen über die numerische Berechnung der stationären Werte einer Funktion beim Vorhandensein von Nebenbedingungen. Johannes Nitsche.

Popoviciu, Tiberiu: **Sur la précision du calcul numérique dans l'interpolation par des polynômes.** Acad. Republ. popul. Romine, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 7, 953—960 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 960—961 (1955) [Rumänisch].

On examine l'effet des erreurs commises dans le calcul du tableau des différences divisées, sur le calcul effectif du polynome d'interpolation de Newton. Le résultat principal est le suivant: En désignant par \tilde{D}_i^j les valeurs approximatives calculées des éléments $D_i^j = [x_i, \dots, x_{i+j}; f]$ (où $f(x)$ est une fonction réelle et les x_i , $i = 1, \dots, n+1$, sont $n+1$ noeuds distincts, non nécessairement équidistants) du tableau des différences divisées et par $c_i^{(j)} = D_i^j - \tilde{D}_i^j$ les corrections respectives, la correction λ de la valeur approximative calculée de la valeur du polynome $\sum_{i=0}^n (x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_i) D_i^j$ de Newton est donnée par la formule

$$\lambda = \sum_{i=0}^n (x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_i) \left[\sum_{r=0}^i D_i^r \cdot c^{(i-r)} \right],$$

$$\text{où } D_i^{j,k} [f] = (D_{i+1}^{j-1,k} [f] - D_i^{j-1,k} [f]) / (x_{i+j+k} - x_i), \quad i = 1, \dots, n+1-k-j,$$

$$D_i^{0,k} [f] = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n+1-k.$$

S. Marcus.

Krejnes, M. A. und N. D. Ajzenštät: Über die Nomogrammdarstellung bis auf kleine Größen höherer Ordnung. Mat. Sbornik, n. Ser. 37, 337—352 (1955) [Russisch].

Verf. wiederholen mit Beweisen, die in einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. 55, 361) angegebenen Sätze und erweitern sie auf die Nomographierbarkeit bis zur neunten Ordnung, wobei die Bedingungen angegeben werden, damit eine näherungsweise Nomogrammdarstellung in der Umgebung eines Punktes möglich ist.

R. Ludwig.

Nikolaev, P. V.: Binäre Anamorphosen von Gleichungen, die einen einfachen A -Multiplikator zulassen. Doklady Akad. Nauk SSSR 103, 195—198 (1955) [Russisch].

Eine Gleichung $F(t, \tau) = F(t_1, \tau_1; t_2, \tau_2; t_3, \tau_3) = 0$ soll mittels eines einfachen A -Faktors (Faktor, der die Anamorphose ermöglicht) $\psi_3(t, \tau) = \psi_3(t_1, \tau_1; t_2, \tau_2)$ auf die Form $\Phi(t, \tau) = \psi_3(t, \tau) F(t, \tau) = 0$, die eine Anamorphose zuläßt, gebracht werden. Die vier Sätze, die teilweise notwendige und hinreichende Bedingungen angeben, daß eine bestimmte Gleichung einen A -Faktor zuläßt, gestatten die Elemente der Anamorphose allein mit Hilfe rationaler Operationen zu bestimmen aus speziellen Werten der Funktion $F(t, \tau)$.

R. Ludwig.

● Ward, T. G. C. and G. W. Blakey: The slide rule for students of science and engineering. London: The English Universities Press, Ltd. 1955. V, 94 p. 3 s. 6 d.

Die namentlich für Studenten in Universitäten, Technischen Hochschulen, Militärakademien geschriebene ausführliche, praktische Anleitung zum Gebrauch des logarithmischen Rechenschiebers behandelt den üblichen Stoff. Die Wichtigkeit der Übung ist gebührend hervorgehoben. Bei verschiedenen Gruppen eingefügter Aufgaben mit Antwort, insbesondere solchen für trigonometrische Rechnungen, wird empfohlen, zu dem genannten Zweck täglich 10 Minuten zu gebrauchen.

E. J. Nyström.

Hasselmeier, Hartwig: Die Inversoren nach Hart oder Peaucellier als Zirkel für große Kreisbögen. Eine fehlerkritische Untersuchung. Jenaer Jahrbuch 1955, 268—294 (1955).

Der Verf. untersucht, welchen Einfluß kleine Abweichungen in den Gelenkstangenlängen (einschließlich der Abweichungen von der exakten Lagerung in den Gelenkpunkten) eines Inversors bei dessen Benutzung als Zirkel für große Kreisbögen auf den Kreisradius r ausüben. Für den mit virtuellen Fehlern versehenen Gelenkmechanismus wird zunächst die Traktrix des (Gelenk-) Punktes mit den Koordinaten (x, y) durch zwei Gleichungen in Parameterform $P(x, y, \varphi) = 0$ und $Q(x, y, \varphi) = 0$ angegeben, die bei exakter Ausführung des Inversors einen Kreisbogen durchläuft. Der Parameter φ ist der Drehwinkel der Kurbel des Inversors. Mit Hilfe von Determinanten aus den partiellen Ableitungen dieser Funktionen wird eine Formel für den Krümmungsradius der Traktrix angegeben. Die eigentliche fehlerkritische Untersuchung besteht in einer Reihenentwicklung des Krümmungsradius an der Stelle $\varphi = 0$, bei der Fehler 0. Ordnung (Änderung des Krümmungsradius im Ausgangszustand $\varphi = 0$ durch die Fehler des Gelenkmechanismus) und 1. Ordnung (Änderung des Krümmungsradius in der Nachbarschaft von $\varphi = 0$) unterschieden werden. Die Ergebnisse werden geometrisch gedeutet. In 8 Tabellen werden die im Verlauf der Rechnung benötigten partiellen Ableitungen übersichtlich zusammengestellt.

H. Riesenbergs.

Antonowicz, K.: An integrating apparatus for the Schrödinger equation. II. Acta phys. Polon. 14, 385—393 (1955).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 53, 169) hat Verf. einen Integrierapparat für die Schrödingersche Gleichung beschrieben, der die Analogie zwischen dieser Gleichung und der der Bewegung einer Magnetnadel im homogenen Felde benutzt, d. h. auf der Analogie zwischen den Gleichungen $d^2\psi/dx^2 + (2\mu/\hbar^2) [E - U(x)] \psi = 0$ und $d^2\chi/dt^2 + (m/B) [H_0 - H(t)] \chi = 0$ beruht. Mittels dieses Apparates war es

möglich, Eigenfunktionen eines harmonischen Oszillators mit sehr großer Genauigkeit zu erhalten. Man stieß aber auf ernstliche Schwierigkeiten bei Bestimmung der Eigenwerte und bei Eichung des Apparates. Die Stabilität war zu schlecht und die Empfindlichkeit gegen äußere Störungen zu groß, um genaue Messungen machen zu können. Der Apparat wurde daher verbessert durch Einbau eines astatischen Nadelsystems, durch Stabilisierung des Verstärkers und der Rotationsgeschwindigkeit, ferner wurde ein Apparat zur Herstellung exakter Potentialkurven gebaut.

Fr.-A. Willers.

Winkler, Helmut: Über Funktionstransformatoren mit Bildabtaströhre und einer Photozelle mit Sekundärelektronenvervielfacher für die Verwendung in elektronischen Analogierechenmaschinen mit großer Arbeitsgeschwindigkeit. *Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau* **1** (1954/55), 93—98 (1955).

In elektrischen Analogie-Rechengeräten stellt sich die Aufgabe, eine vorgegebene Funktion ohne die Verwendung beweglicher Teile darzustellen. Dafür werden zwei Verfahren angegeben: Das erste arbeitet mit Diapositiven, deren Schwärzung dem jeweiligen Funktionswert entspricht und die unter Verwendung einer Kathodenstrahlröhre durch eine Photozelle abgetastet werden. Das zweite verwendet eine undurchsichtige Schablone, deren Berandung der darzustellenden Funktion entspricht. Die Schablone wird auf dem Schirm einer Kathodenstrahlröhre angebracht. Mit Hilfe einer Photozelle und einer Gegenkopplungsschaltung wird der Elektronenstrahl gezwungen, dem Rand der Schablone zu folgen.

Ambros Speiser.

Snyder, James N.: On the improvement of the solutions to a set of simultaneous linear equations using the ILLIAC. *Math. Tables Aids Comput.* **9**, 177—184 (1955).

Verf. behandelt die bereits von Bodewig 1947 (dies. Zbl. **29**, 272) vorgeschlagene und im Lehrbuch „Matrizen“ von Zurmühl (dies. Zbl. **36**, 149) eingehend behandelte iterierte Anwendung des Gaußschen Algorithmus, die bei großen linearen Gleichungssystemen zwecks Verbesserung ungenauer Lösungen gelegentlich notwendig wird. — Verf. beschreibt die Anwendung des Verfahrens mit einem schnellen Rechenautomaten; die vorgeschlagene Anordnung der Berechnung (durch die Eigenart der Maschine bedingt) erfordert aber bei jedem Iterationsschritt eine neue Eingabe der Koeffizientenmatrix sowie eine neue Elimination. Die numerischen Beispiele zeigen einige unerwartete Rundungseffekte, die der Übersetzung der Ausgangswerte ins Dualsystem zur Last gelegt werden müssen.

H. Rutishauser.

Atkinson, Cyril: Polynomial root solving on the electronic differential analyser (A technique for finding the real and complex roots of a polynomial using an electronic differential analyser). *Math. Tables Aids Comput.* **9**, 139—143 (1955).

Um die reellen Wurzeln eines Polynoms mit reellen Koeffizienten $f(z) = 0$ zu finden, bildet man $f'(z)$, $f''(z)$ und integriert mit $f^{(n)}(0)$ aufwärts, bis man $f(z)$ erhält. Die Schnitte dieser Kurve mit der x -Achse geben die reellen Wurzeln. Um die komplexen Wurzeln von $f(z) = U(x, y) + iV(x, y) = 0$ zu erhalten, bildet man ebenso für ein angenommenes y_1 wie oben die Kurven $U(x, y_1) = 0$ und $V(x, y_1) = 0$. Falls diese sich auf der x -Achse in x_1 schneiden, hat man ein paar komplexe Wurzeln $x_1 \pm iy_1$, andernfalls wiederholt man die Konstruktion für ein passend verschobenes y_1 .

Fr.-A. Willers.

Šestova, G. A.: Untersuchung der Störfestigkeit bei der Befehlsübermittlung einer Fernsteuerung nach der Methode der Theorie der potentiellen Störfestigkeit. I. *Avtomat. Telemekh.* **16**, 344—355 (1955) [Russisch].

Nach V. A. Kotelnikov wird die Störfestigkeit eines Fernsteuerungssystems im Falle, daß die Störung einen Gaußschen stochastischen Prozeß darstellt, durch zwei Parameter, die Wahrscheinlichkeit des Verschwindens des Befehls und den Erwartungswert der Anzahl der falschen Befehle in der Zeiteinheit, charakterisiert. angenommen, daß das Verhältnis der Energie des Befehls und der spezifischen (auf die Bandeinheit fallenden) Leistung der Störung festgestellt wurde. Derselbe Forscher

hat ferner in seiner (bisher unpublizierten) Dissertation bewiesen, daß die Störfestigkeit eines gegebenen Systems bei gegebener Energie des Signals einen optimalen Wert, die sog. „potentielle Störfestigkeit (p. S.)“ nicht überschreiten kann. — Auf Kotelnikovs Arbeiten fußend bestimmt Verf. die p. S. verschiedener Übertragungsmethoden von Fernsteuerungsbefehlen, falls die Scheitelleistung eines Signals begrenzt, der Empfänger „grob“ synchronisiert ist und die Störung einen Gaußschen stochastischen Prozeß repräsentiert. Zuerst wird die p. S. bei der Übertragung eines einzelnen Befehls (d. h. das Signal besteht aus Befehl und Pause), dann diejenige bei der Übertragung mehrerer Befehle (zusammengesetzte Signale) im Falle von Video- bzw. Radio-Impulsen und verschiedenen Kode-Arten untersucht. Im zweiten Falle wird auch der Einfluß solcher Einrichtungen, welche eine Bewahrung vor falschen Befehlen gewährleisten, ins Kalkül gezogen. Die Möglichkeiten der Erhöhung der p. S. werden in allen Spezialfällen bestimmt. *P. Medgyessy.*

● **Table of the descending exponential, $x = 2.5$ to $x = 10$.** (National Bureau of Standards, Appl. Math. Ser. 46.) Washington: Government Printing Office 1955. 76 p. 50 c.

e^{-x} für $x = 2,5(0,001)10$ mit 20 Dezimalen. Die Berechnung wurde auf dem elektronischen Rechenautomaten SEAC durchgeführt gemäß der Beziehung $e^{-x} \cdot e^{-\Delta x} = e^{-(x+\Delta x)}$. *H. Unger.*

● **Dijkstra, E. W. and A. van Wijngaarden: Table of Everett's interpolation coefficients.** (Computation Department of the Mathematical Centre, Amsterdam, Report R 294.) The Hague: Excelsio Photo-Offset 1955. I, 200 p.

Diese Tafel der Funktionen $E_0^2(p)$, $E_1^2(p)$, $E_0^4(p)$, $E_1^4(p)$, $E_0^6(p)$, $E_1^6(p)$, für $0 \leq p \leq 1$, mit einem Intervall $\Delta p = 0.0001$ ist mit der elektronischen Maschine ARRA, im Auftrage der Empresa Nacional Bazan de Construcciones Navales Militares in Madrid, berechnet worden und ist hier reproduziert. *E. M. Bruins.*

● **Osterberg, Harold and Gordon L. Walker: Table of $\int_0^z [J_1(x)/x] dx$.** (Communication No. 1, September 1, 1955). Southbridge, Mass.: Research Center, American Optical Company 1955. 7 p.

Tafel der angegebenen Funktion für reelles Argument $z = 0(0,01)3,85$ und $z = 4(1)25$, jeweils 7 geltende Ziffern. Für die Berechnung wurden die Taylorentwicklung bzw. Tafeln Besselscher Funktionen benutzt. Auf die Möglichkeit der Auswertung von $\int_0^z J_n(x) x^{-n} dx$ mit Hilfe der vorliegenden Tafel wird hingewiesen. *E. Kreyszig.*

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Lal, D. N.: A note on a form of Tchebycheff's inequality for two or more variables. Sankhyā 15, 317—320 (1955).

It is proved for a two-dimensional r. v. with mean zero that

$$\text{Prob} \{ |x_1| < k_1 \sigma_1, |x_2| < k_2 \sigma_2 \} \geq \frac{1}{2 k_1^2 k_2^2} \{ k_1^2 + k_2^2 + \sqrt{(k_1^2 + k_2^2)^2 - 4 r^2 k_1^2 k_2^2} \}.$$

This generalizes a result of P. O. Berge (this Zbl. 18, 263). A further generalization to more than 2 variables is also given. *S. Vajda.*

Barton, D. E. and F. N. David: Sums of ordered intervals and distances. Mathematika 2, 150—159 (1955).

Eine Strecke der Länge 1 wird durch $n - 1$ Punkte, die unabhängig Gleichverteilungen unterworfen sind, in n Intervalle zerlegt. Die Abstände der Punkte

vom linken Randpunkt der Strecke werden der Größe nach geordnet: x_1, \dots, x_{n-1} , ebenso die Intervallängen: g_1, \dots, g_n . Die Verf. gewinnen mit Hilfe von erzeugenden Funktionen die Verteilungen der Summen $G_{rs} = \sum_{i=r}^s g_i$ und $X_{rs} = \sum_{i=r}^s x_i$ sowie die gemeinsame Verteilung von G_{tu} und G_{rs} ($u < r$). Sie zeigen ferner, daß G_{rs} beim Grenzprozeß $n \rightarrow \infty$ mit $s/n \rightarrow \alpha$, $r/n \rightarrow \beta$, $\alpha > \beta$ und $(\alpha, \beta) \neq (1, 0)$ gegen eine Gaußvariable konvergiert, und untersuchen, wie gut sich im Fall $n = 10$ die Grenzverteilung zur Approximation heranziehen läßt.

D. Bierlein.

Smith, W. L.: Regenerative stochastic processes. Proc. roy. Soc. London, Ser. A **232**, 6—31 (1955).

Let $\{t_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) be a sequence of independent non-negative identically distributed random variables and t_0 a non-negative random variable, independent of t_i ($i \geq 1$) and not necessarily with the same distribution. The sequence $\{t_i\}$ ($i = 0, 1, \dots$) is called a general renewal process and let us put $T_{-1} = 0$, $T_k = t_0 + \dots + t_k$ ($k = 0, 1, \dots$); for all $t \geq 0$, n_t is the greatest integer k such that $T_{k-1} \leq t$. Denote by \mathfrak{X} an abstract space of x -points on which a stochastic process x_t takes its values. Let z be a random variable which specifies boundary or starting conditions at $t = 0$. $z \in \mathfrak{Z}$, where \mathfrak{Z} is an abstract space. A process x_t is regenerative with respect to \mathfrak{Z} over \mathcal{A} if for all $z \in \mathfrak{Z}$, $A \in \mathcal{A}$ (\mathcal{A} is a class of x -sets), there is a function $\Phi_A(\cdot)$, such that $P\{x_t \in A | z; n_t > 0; T_{n_t}; x_s, s \leq T_{n_t}\} = \Phi_A(t - T_{n_t})$. If this condition is replaced by the weaker one $P\{x_t \in A | z; n_t > 0; T_{n_t}\} = \Phi_A(t - T_{n_t})$, x_t is an equilibrium process and under certain regularity conditions for all $z \in \mathfrak{Z}$, $A \in \mathcal{A}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{x_t \in A | z\} = \frac{1}{\mu_1} \int_0^\infty \Phi_A(v) \{1 - F(v)\} dv,$$

if $\mu_1 = E t_i < \infty$, where the limit is zero for $\mu_1 = \infty$ (F is the distribution function of t_i , $i \geq 1$). This and other related results are then applied to the so-called S. M.-processes with a countably set of states A_μ , a generalisation of Markov processes; it is shown that $\lim_{t \rightarrow \infty} P\{x_t \in A_\mu | x_0\} = Q_\mu m_{\mu\mu} / l_\mu$, where Q_μ is the probability that, given

x_0 , a transition into A_μ occurs in a finite time, l_μ the mean recurrence time to A_μ and $m_{\mu\mu} < \infty$ the mean waiting time in every A_μ . Finally, $\{w_t\}$ is called a cumulative process if: (i) $\{w_{T_n} - w_{T_{n-1}}\}$ for $n = 1, 2, \dots$ is a sequence of independent, identically distributed random variables; (ii) w_t is, with probability one, of bounded variation in every finite t -interval. Let us denote now by $y_n = w_{T_n} - w_{T_{n-1}}$, $k_1 = E y_n$ (when

it exists); $\tilde{w}_t = \int_0^t |dw_t|$ is a cumulative process if w_t is so and let \tilde{y}_n and \tilde{k}_1 be the

corresponding notations. For these processes the following ergodic property is proved: if $\mu_1 < \infty$, $\tilde{k}_1 < \infty$ and if for $t_0 = 0$, $w_0 = 0$, then $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w_t}{t} = \frac{k_1}{\mu_1}$ with

probability one. Moreover, central limit theorems for these processes are investigated. Generally, the methods used by the author are analogous to those considered by W. Feller in this Zbl. **39**, 133.

R. Theodorescu.

Root, W. L. and T. S. Pitcher: On the Fourier series expansion of random functions. Ann. math. Statistics **26**, 313—318 (1955).

The paper deals with some theorems concerning the representation of stationary random functions by a Fourier-series with pairwise orthogonal random coefficients. A random function $x(t)$ belonging to L_2 , stationary in a wide sense ($\overline{x(s)x^*(t)} = \varrho(t-s)$ with $\overline{x(t)} = 0$, continuous in meansquare, has a representation $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n a_k e^{ik\omega t} \left(\omega = \frac{2\pi}{T} \right)$, with the random orthogonal coefficients a_k , if and only if $x(t)$ is periodic with the period T . A second theorem gives us a represen-

tation of a gaussian process $x(t)$ with a given correlation function

$$\varrho(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega u} \quad \left(-\frac{T}{2} \leq u \leq \frac{T}{2}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \right),$$

by the process $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=-n}^n x_l e^{il\omega t}$, where x_l are complex gaussian variables satisfying the conditions $\overline{x_k} = 0$, $|x_k|^2 = c_k$, $\overline{x_l x_h^*} = 0$, $h \neq l$. y and x have the same multivariant distributions in the interval $(0, \frac{1}{2} T)$. Other theorems are stating tight evaluations concerning the Fourier-coefficients of whatever a random function.

O. Onicescu.

Smith, Walter L.: Extensions of a renewal theorem. Proc. Cambridge philos. Soc. **51**, 629—638 (1955).

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendentes identiquement distribuées, absolument continues, ayant l'espérance mathématique μ_1 ,

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i, \quad f_k(x) \text{ la densité de probabilité de } S_k, \quad f_{k+1}(x) = \int f_1(x-y) f_k(y) dy,$$

et $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Les conditions suivantes sont considérées: (i) $\{X_i\}$ sont des variables aléatoires non-négatives; (ii) $f_1(x) \in L_{1+\delta}$ pour un $\delta > 0$; (iii) $f_1(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow \infty$; (i)* $\{X_i\}$ sont des variables aléatoires non-négatives et $\mu_1 \leq \infty$; (i)** $0 < \mu_1 \leq \infty$; (iii)* $f_1(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow -\infty$. Dans un travail antérieur (ce Zbl. **55**, 124) l'A. a donné le théorème suivant: en supposant que les conditions (i), (ii), (iii) soient vérifiées, alors on ait $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1/\mu_1$. En partant de ce résultat, l'A. donne

dans cet article les généralisations suivantes: (I) si les conditions (i)*, (ii), (iii), sont vérifiées, alors on a $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1/\mu_1$ pour $\mu_1 < \infty$, resp. 0 pour $\mu_1 = \infty$; (II)

a) si les conditions (i)***, (ii), (iii) sont vérifiées, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1/\mu_1$ pour $\mu_1 < \infty$, resp. 0 pour $\mu_1 = \infty$; b) si les conditions (i)***, (ii), (iii)* sont vérifiées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$.

R. Theodorescu.

Takahashi, Shigeru: Notes on the Riemann-sum. Proc. Japan Acad. **31**, 8—13 (1955).

Let (Ω, B, P) be a probability space, $\{t_i(w)\}$, $i = 1, 2, \dots$ a sequence of independent identically distributed random variables, having as distribution function the uniform law in $[0, 1]$, $t_i^{(n)}(w)$ the i -th value of $\{t_j(w)\}$ ($1 \leq j \leq n$) arranged in the increasing order $[t_0^{(n)}(w) = 0, t_{n-1}^{(n)}(w) = 1, n = 1, 2, \dots]$ and $f(t)$ ($-\infty < t < +\infty$) a Borel measurable function of period 1, $f(t) \in L_1(0, 1)$. Denote by

$$S_n(w, s) = \sum_{i=1}^{n+1} f(t_i^{(n)}(w) + s) (t_i^{(n)}(w) - t_{i-1}^{(n)}(w))$$

the translated Riemann sum. If $f(t) \in L_2(0, 1)$ and for any $\varepsilon > 0$

$$\left(\int_0^1 |f(t+h) - f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = O \left(1 - \log \left(\frac{1}{|h|} \right)^{1+\varepsilon} \right) \quad (|h| \rightarrow 0),$$

then for any fixed s ,

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(w, s) = \int_0^1 f(t) dt \right) = 1,$$

where the w -set on which $S_n(w, s) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt$ depends on s . It is also shown that if for an $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^1 |f(t+h) - f(t)| dt = O \left(1 - \log \left(\frac{1}{|h|} \right)^{1+\varepsilon} \right) \quad (|h| \rightarrow 0),$$

then for any fixed w , except for a w -set of probability zero, there is a set $M_w \subset [0, 1]$ of measure 1 such that $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(w, s) = \int_0^1 f(t) dt \quad (s \in M_w)$. *O. Onicescu.*

Ramakrishnan, Alladi: Phenomenological interpretation of the integrals of a class of random functions. I, II. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 58, 470—482, 634—645 (1955).

I. Starting from a discontinuous Markov process $x(\tau)$ form the iterated integrals of $x(\tau)$ over an interval $(0, t)$. These can be considered as solutions to linear differential equations with a random disturbance. To study their probability distribution the author introduces the inverse trajectory $x(t - \tau)$ and shows that the variable studied has the same probability distribution as a quantity derived in the analogous way from the inverse trajectory. The distribution of this quantity satisfies a difference-differential equation. — II. Continuing the investigation of I the author considers the case when the basic process is the Poisson one. Functional equations are derived for the probability densities, and it is shown that the problem can be simplified to one involving only one integration. It is pointed out that the device of the inverse trajectory corresponds to the backward equation for a Markov process.

U. Grenander.

Ramakrishnan, Alladi: Processes represented as integrals of a class of random functions. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 59, 120—127 (1956).

This paper presents a unified approach to a problem dealt with in earlier work (see above) of the same author. Equations are derived for the probability density and one of them is solved by using the Laplace transform. It is shown how the moments of the stochastic variable studied are related to the product densities of various degrees.

U. Grenander.

Moustafa, M. D.: Infinite matrix-products associated with Markov chains. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 58, 234—242 (1955).

The paper is concerned with products AB and BA of two stochastic matrices A and B in connection with the ordinary and $(C, 1)$ -limits of the sequences $(AB)^n$ and $(BA)^n$. Some applications to Markov chains represented by products of infinite stochastic matrices are given. The last section of the paper is dealing with convolution of stochastic matrices.

R. Theodorescu.

Heine, V.: Models for two-dimensional stationary stochastic processes. *Biometrika* 42, 170—178 (1955).

Verf. untersucht im Anschluß an P. Whittle (dies. Zbl. 58, 356) stationäre stochastische Prozesse in zwei Dimensionen, die durch lineare stochastische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung $[a(\partial^2/\partial x^2) + 2h(\partial^2/\partial x \partial y) + b(\partial^2/\partial y^2) + 2g(\partial/\partial x) + 2f(\partial/\partial y) + c]\xi(x, y) = \varepsilon(x, y)$ beschrieben werden. Durch $\varepsilon(x, y)$ sind die zufälligen Impulse gegeben, die die Variable $\xi(x, y)$ beeinflussen. Ihre Mittelwerte werden gleich Null angenommen. Drei Modelltypen werden unterschieden, je nachdem der Differentialoperator parabolisch, elliptisch oder hyperbolisch ist. Weiter kommt es darauf an, ob die Koordinatenachsen zeitartig (Beeinflussung nur von der Vergangenheit her) oder raumartig (Beeinflussung der Ereignisse in beiden Richtungen) sind. Die Lösung wird mittels einer Greenschen Funktion in der Form

$$\xi(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-u, y-v) \varepsilon(u, v) du dv$$

angesetzt. Für die einzelnen Fälle werden die Greenschen Funktionen, die Kovarianzfunktion von ξ und von ε sowie die Funktion

$$R(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u, v) G(u-x, v-y) du dv,$$

deren Verwendung sich empfiehlt, sowie ihre zweiseitigen Laplace-Transformierten berechnet und Bedingungen für die Zulässigkeit der fraglichen Modelle angegeben.

G. Schulz.

Fisz, M. and K. Urbanik: The analytical characterization of the composed non-homogeneous Poisson process. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 149—150 (1955).

Fagen, R. E. and John Riordan: Queuing systems for single and multiple operation. J. Soc. industr. appl. Math. 3, 73—79 (1955).

Verff. betrachten Schlangenbildungs-Systeme mit unabhängig voneinander zufällig eintreffenden Kunden, also Poisson-verteilter Anzahl von Kundeneintritten pro festes Zeitintervall, und n Schaltern, für welche unabhängig voneinander die Bedienungszeit S eines Kunden der gleichen Verteilung $F(s)$ folge. Verglichen wird der Erwartungswert der vom Kunden im System verbrachten, aus Wartezeit W und Bedienungszeit S zusammengesetzten Zeit $T = W + S$ bei Einzelbedienung (1 Schalter je Kunde) und bei multipler Bedienung (d. h. alle n Schalter bedienen denselben Kunden, solange bis mindestens einer fertig ist), bei welcher die Bedienungszeit S des Kunden der Verteilungsfunktion $G(s) = 1 - [1 - F(s)]^n$ folgt.

Multiple Bedienung führt bei Γ -Verteilung $F(s) = \frac{k!}{\Gamma(k)} \int_0^s v^{k-1} e^{-kv} dv$ im Falle $k = 1$ auf exponential verteiltes T mit $E(T) = (n - a)^{-1}$, im Falle $k = 2$ auf $E(T) = \rho 2^{-1} (1 - \rho)^{-1} [n^{-1} + 1/g(n)] + g(n)/2n$ mit $g(n) = n! e^{-n} \cdot (1 + n + \dots + n^n/n!)$, $\rho = a g(n)/2n$; Einzelbedienung hingegen bei $k = 1$ (nach A. K. Erlang) auf $E(T) = 1 + (n - a)^{-1} C(n, a)$ mit $C(n, a) = a^n (n - a)^{-1} [1 + a + \dots + a^{n-1}/(n - 1)! + a^n (n - a)^{-1}/(n - 1)!]^{-1}/(n - 1)!$. Analog wird der Fall der Rechteckverteilung $F(s) = (s - 1 + c)/2c$, $1 - c \leq s \leq 1 + c$, untersucht. Allgemein erweist sich bei kleinem a multiple, bei großem a Einzel-Bedienung als vorteilhafter.

M. P. Geppert.

Mayne, A. J.: The storage of fissile material. Nuclear Energy 2, 77—84 (1955).

Betrachtet werden Anordnungen von Kugeln, die bei Auftreffen von Partikeln eine M -fache Anzahl davon aussenden, wobei gewisse, vom Abstand abhängige Wahrscheinlichkeiten dafür bestehen, daß andere Kugeln getroffen werden. Abgeschätzt werden Anzahl bzw. Abstände derartiger regulärer Kugelanordnungen, bei denen keine explosionsartigen Kettenreaktionen auftreten können. Formal läuft das auf Abschätzungen der größten Eigenwerte von Matrizen mit positiven Elementen hinaus.

D. Morgenstern.

Mycielski, Jan and A. Zięba: On infinite games. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 133—136 (1955).

Es sei die disjunkte Einteilung $C = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ der Menge C aller Folgen $c = (c_i | i = 1, 2, \dots; c_i = 0 \text{ oder } 2)$ fest gegeben. C wird in der üblichen Weise mit einem Cantorschen Diskontinuum identifiziert und dadurch topologisiert gedacht. Das in der Arbeit behandelte 2-Personenspiel $\Delta(A, B)$ besteht darin, daß die beiden Spieler \mathfrak{A} bzw. \mathfrak{B} in dem unendlichen Baum Δ mit 2-zähligem Ausgangspunkt \mathfrak{D} und sonst nur 3-zähligen Punkten, in \mathfrak{D} beginnend, abwechselnd eine der beiden von \mathfrak{D} fortführenden Richtungen $c_i = 0$ oder 2 auswählen. Partien sind dann die von \mathfrak{D} ausgehenden unendlichen Wege in Δ . Sie entsprechen umkehrbar eindeutig den Folgen $c = (c_1, c_2, \dots) \in C$. Ist $f_{\mathfrak{A}}$ bzw. $f_{\mathfrak{B}}$ die hierbei von \mathfrak{A} bzw. \mathfrak{B} verwendete Strategie, so werde $c = (f_{\mathfrak{A}}, f_{\mathfrak{B}})$ gesetzt. Gewonnen hat \mathfrak{A} bzw. \mathfrak{B} , wenn $(f_{\mathfrak{A}}, f_{\mathfrak{B}}) \in A$ bzw. B ist. Existiert für \mathfrak{A} eine Strategie $f_{\mathfrak{A}}^*$ mit $(f_{\mathfrak{A}}^*, f_{\mathfrak{B}}) \in A$ für alle Strategien $f_{\mathfrak{B}}$ von \mathfrak{B} , so heiße $\Delta(A, B)$ für \mathfrak{A} abgeschlossen; entsprechend für \mathfrak{B} . Es wird bewiesen: (1) Ist A oder B als Teilraum von C abgeschlossen, so ist $\Delta(A, B)$ für \mathfrak{A} oder \mathfrak{B} abgeschlossen. (2) Hat A höchstens abzählbare Mächtigkeit, so ist $\Delta(A, B)$ für \mathfrak{B} abgeschlossen; entsprechend für \mathfrak{A} . (3) Es gibt Spiele $\Delta(A, B)$, die weder für \mathfrak{A} noch für \mathfrak{B} abgeschlossen sind.

W. Gaschütz.

Statistik:

Castro, Gustavo de: Induktives Verhalten und mathematische Statistik. Inst. Actuários Portug., Bol. Nr. 11, 19—45 (1955) [Portugiesisch].

Castro, Gustavo de: Eine kleine Bibliographie über die mathematische Theorie der Entscheidung. Inst. Actuários Portug., Bol. Nr. 11, 49—60 (1955) [Portugiesisch].

Ville, M. J.: Principes d'analyse matricielle. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 4, 141—218 (1955).

Enthält eine Zusammenstellung einiger Sätze über Matrizen, die in der Statistik Anwendung finden. Einfache Beispiele zur Anwendung der Matrizen in der Korrelationstheorie werden gegeben. *H. Bergström.*

• **Tables of the cumulative binomial probability distribution.** Edited by the Staff of the Computation Laboratory. Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1955. 503 p. \$ 8,00.

Masuyama, Motosaburo: Tables of two-sided 5% and 1% control limits for individual observations of the r -th order. Sankhya 15, 291—294 (1955).

Es werden Tabellen für die Sicherheitsschranken der geordneten Stichprobenfunktionen in Stichproben vom Umfang $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$ für die Fälle der Normalverteilung und der Gleichverteilung angegeben. [Ähnliche Tabellen wurden auch von Fontányi, Sarkadi und Vas mitgeteilt: Publ. Inst. Math. appl. Acad. Sci. Hongrie 2, 307—334 (1953)]. *K. Sarkadi.*

Bennett, B. M.: On the joint distribution of the mean and standard deviation. Ann. Inst. statist. Math. 7, 63—66 (1955).

Für Mittelwert $\bar{x} = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{n}$ und Varianz $s^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \bar{x})^2}{(n-1)}$ von n unabhängigen Beobachtungen einer mit beliebiger Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ verteilten Variablen X ergibt sich mittels der klassischen Helmert-Transformation und Übergang zu Polarkoordinaten die Simultan-Verteilung in der Form

$$h_n(\bar{x}, s) d\bar{x} ds = \frac{1}{2} \sqrt{n} [(n-1)s^2]^{(n-3)/2} g_n(\bar{x}, s) d\bar{x} d[(n-1)s^2].$$

Hieraus wird die Simultan-Verteilung $h_{n+1}(\bar{x}_{n+1}, s_{n+1})$ von Stichproben-Mittelwert \bar{x}_{n+1} und -Varianz s_{n+1}^2 der um eine unabhängige Beobachtung erweiterten Stichprobe abgeleitet. *M. P. Geppert.*

Breny, H.: L'état actuel du problème de Behrens-Fisher. Trabajos Estadíst. 6, 111—131 (1955).

Sind zwei mit Mittelwerten ξ, η und Varianzen σ^2, τ^2 normal verteilten Populationen P_1, P_2 unabhängig voneinander die Stichproben x_1, \dots, x_n bzw. y_1, \dots, y_m entnommen, so ist die Hypothese $a \leq \xi - \eta \leq b$ zu prüfen, wobei die zulässigen Hypothesen alle möglichen Werte $\xi, \eta, \sigma^2, \tau^2$ umfassen. Dieses für die geistige Durchdringung der modernen statistischen Methodik zum Angelpunkt gewordene Problem und die Geschichte der von den verschiedenen Richtungen angebotenen Lösungen werden hier diskutiert, beginnend bei dem pseudo-bedingten, logisch nicht haltbaren Lösungsversuch von W. U. Behrens [Ein Beitrag zur Fehlerberechnung bei wenigen Beobachtungen. Landwirtschaftl. Jahrb. 68, 807—837 (1929)] und dessen Reinterpretierung durch R. A. Fisher im Sinne seiner Fiducialverteilung, die zu dem von P. V. Sukhatme tabulierten Behrens-Fisher-Sukhatme-Test führte. Wie J. Neyman, der Begründer der auf dem objektiven, einer Häufigkeitsinterpretation fähigen Wahrscheinlichkeitsbegriff beruhenden Intervallschätzung mittels Confidenzintervallen [Fiducial argument and the theory of confidence intervals. Biometrika 32, 128—150 (1941)] an diesem Problem eindeutig geklärt hat, differieren sein Confidenzschluß und Fishers nur formal zu verstehende, aber nicht häufigkeitsinterpretierbare Fiducial-Wahrscheinlichkeit begrifflich und numerisch. Verf. diskutiert die beiden Standpunkte im Hinblick auf das Bayessche Theorem und behandelt als

klassische (Confidenz-) Lösungen: M. S. Bartlett's (dies. Zbl. 15, 261) und H. Scheffé's [On solutions of the Behrens-Fisher problem based on the t -distribution. Ann. Math. Stat. 14. 35—44 (1943)] auf Stochastisierung (randomization) beruhende, exakte Lösungen für $n = m = 2$ bzw. $n = m$ sowie approximative Methoden, insbesondere von B. L. Welch (dies. Zbl. 43, 141). *M. P. Geppert.*

Kamat, A. R.: Modified mean square successive difference with an exact distribution. Sankhyā 15, 295—302 (1955).

Eine Stichprobe x_i ($i = 1, \dots, n$) werde normal verteilten Populationen $N(\mu_i, \sigma^2)$ mit gleicher Varianz, aber nicht notwendig gleichen Mittelwerten μ_i entnommen. An Stelle der von J. von Neumann, R. H. Kent, H. R. Bellinson, B. Hart (dies. Zbl. 25, 200) eingeführten mittleren quadratischen sukzessiven Differenz δ^2 empfiehlt Verf. als Schätzer für σ^2 bei geradem $n = 2m$ das praktisch ebenso effiziente modifizierte Maß

$$\delta'^2 = \frac{1}{2(m-1)} \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} (x_i - x_{i+1})^2 + \sum_{i=1}^{m-1} (x_{m+i} - x_{m+i+1})^2 \right\}.$$

Aus den von von Neumann angegebenen Eigenwerten $\lambda_j = 4 \sin^2(j\pi/2m)$ ($j = 0, 1, \dots, m-1$) der Matrix A der quadratischen Form $X_{(m)} = \sum_{i=1}^{m-1} (x_i - x_{i+1})^2 \equiv x' A x$ ergibt sich für $X_{1(m)} + X_{2(m)} = 2(m-1) \delta'^2$ die charakteristische Funktion $\Phi(t) = \prod_{j=1}^{m-1} (1 - 2i\lambda_j t)^{-1}$, durch deren Partialbruchzerlegung man die Verteilungsfunktion von δ'^2 erhält:

$$\Pr \{ \delta'^2 \leq x \} = 1 - \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{m-j-1} \lambda_j^{m-1} \lambda_{m-j} e^{-(m-1)x/\lambda_j}.$$

Nach analoger Herleitung der Verteilung von $Y_{(m)} = X_{(m)} + 2x_m^2$ ergeben sich aus

$$X_{1(m)} + X_{2(m)} \leq \delta^2 (2m-1) = \sum_{i=1}^{2m-1} (x_i - x_{i+1})^2 \leq Y_{1(m)} + Y_{2(m)}$$

obere und untere Grenzen für die Fraktile der unbekannten Verteilung von δ^2 . Schließlich werden analog dem F - und t -Test die exakten Verteilungen von $\varphi_{m,n} = \delta'^2_{(m)} / \delta'^2_{(n)}$, wo $\delta'^2_{(m)}$, $\delta'^2_{(n)}$ auf $2m$ bzw. $2n$ voneinander unabhängigen Beobachtungen beruhende Schätzer der Form δ'^2 sind, und von $u = (\bar{x} - \mu) / \delta'$, wo \bar{x} das arithmetische Mittel der dem Schätzer δ'^2 zugrunde liegenden $2n$ beobachteten x -Werte ist, hergeleitet, wobei die zu prüfenden Populationen normal verteilt sind mit gleicher unbekannter Varianz, und zwar im ersten Falle bei beliebig verschiedenen unbekannten Mittelwerten ($N(\mu_i, \sigma^2)$), im zweiten bei festem Mittelwert μ ($N(\mu, \sigma^2)$). *M. P. Geppert.*

Patnaik, P. B.: Hypotheses concerning the means of observations in normal samples. Sankhyā 15, 343—372 (1955).

Die Arbeit befaßt sich mit Testproblemen, die vorliegen, wenn die n Beobachtungen x_1, \dots, x_n einer Stichprobe n Normalverteilungen mit gleicher, unbekannter Varianz σ^2 und im allgemeinen verschiedenen Mittelwerten $\mu_i = \sigma \rho_i$ entstammen. Im Falle $\mu_1 = \dots = \mu_n$ entwickelt Verf. zur Prüfung der Nullhypothese H_0 ($\mu/\sigma = \rho = \rho_0$) eine Methode zur Konstruktion einer allgemeinen Klasse bezüglich σ ähnlicher Bereiche und bestimmt den besten kritischen Bereich zur Prüfung von H_0 gegen $\rho > \rho_0$ oder gegen $\rho < \rho_0$; der Test beruht auf dem der nicht-zentralen Student-Verteilung mit $n-1$ F. G. und Parameter $\rho \sqrt{n}$ folgenden Kriterium $t' = \bar{x} \sqrt{n-1}/s$. Die Fraktile dieser Verteilung werden zunächst nach dem Cornish-Fisher-Verfahren approximiert und tabuliert, so dann mittels Gram-Charlier-Typ A-Reihe. Zur Prüfung von H_0 gegen $\rho \geq \rho_0$ wird nach einer allgemeiner verwendbaren Methode ein lokal unverfälschter, trennschärfster Test entwickelt, der ebenfalls auf t' -Vertei-

lung fußt. Analog wird der allgemeinere Fall $\mu_i = \sigma \varrho_i$ behandelt, in welchem bei Geltung von H_0 ($\varrho_i = \varrho_{i0}$) die Größe

$$t' = \sqrt{n-1} \frac{\sum x_i \varrho_{i0}}{\sqrt{\sum \varrho_{i0}^2 \sum x_i^2 - (\sum \varrho_{i0} x_i)^2}}$$

nicht-zentraler Student-Verteilung mit $n-1$ F. G. und Parameter $\sqrt{\sum \varrho_{i0}^2}$ und das Kriterium

$$t'_1 = \sqrt{n-1} \frac{\sum (\varrho_{i1} - \varrho_{i0}) x_i}{\sqrt{\sum x_i^2 \sum (\varrho_{i1} - \varrho_{i0})^2 - [\sum x_i (\varrho_{i1} - \varrho_{i0})]^2}}$$

der seit H. Robbins (dies. Zbl. 31, 368) bekannten Verteilung des Quotienten aus einer nicht-zentralen normalen und einer nicht-zentralen χ^2 -Variablen folgt. — Ferner untersucht Verf. den Fall, in welchem der standardisierte Mittelwert $\mu_i/\sigma = \varrho_i$ bei $n-m$ der n Normalverteilungen gleicher unbekannter Varianz ϱ lautet und bei den m restlichen $\varrho + \gamma$ mit bekanntem γ ; Prüfung von H_0 ($\varrho = \varrho_0$) gegen $\varrho > \varrho_0$ fußt auf t'_1 -Verteilung von $\bar{x}/\sqrt{n-1}$ als gegen $\varrho > \varrho_0$ oder $\varrho < \varrho_0$ bestem Test. Ein Zwei-Stichproben-Test dient schließlich der Prüfung von H_0 ($\mu = \mu_0$) im Falle, daß $n-m$ der μ_i gleich μ , die m restlichen $\mu + b$ mit bekanntem b sind.

M. P. Geppert.

Cornish, E. A.: The sampling distributions of statistics derived from the multivariate t -distribution. Austral. J. Phys. 8, 193—199 (1955).

Seien die Variablen x_1, \dots, x_p mit Mittelwert-Vektor 0 und Dispersionsmatrix $\sigma^2 R$ nicht-singulär normal verteilt, wobei die Korrelationsmatrix R bekannt, die gemeinsame Varianz σ^2 hingegen unbekannt sei und durch einen auf ν F. G. beruhenden Schätzer s^2 geschätzt werde. Für die aus einer n -gliedrigen Stichprobe x_{ik} ($i = 1, \dots, p$; $k = 1, \dots, n$) berechneten Größen $\bar{t}_i = \frac{\sum_{k=1}^n t_{ik}}{n} = \frac{\bar{x}_i}{s}$

und entsprechenden Quadrat- und Produktsummen $T_{ij} = \sum_{k=1}^n (t_{ik} - \bar{t}_i)(t_{jk} - \bar{t}_j)$

leitet Verf. aus der bekannten Simultan-Verteilung von $t_{ik} = x_{ik}/s$ die Simultanverteilung der t_i und T_{ij} her. Hieraus resultiert als Randverteilung der t_1, \dots, t_p p -dimensionale Studentverteilung, während die Simultanverteilung der T_{ij} als Randverteilung von T_{ii} Fishers F -Verteilung mit $n-1$ und ν F. G. ergibt und im Falle $p=2$ mittels $T_{12} = b_{21} T_{11}$ die bekannte Verteilung des Regressionskoeffizienten b_{21} liefert.

M. P. Geppert.

Bennett, B. M.: Note on the moments of the logarithmic non-central χ^2 and z distributions. Ann. Inst. statist. Math. 7, 57—61 (1955).

Let x_i be a random variable which is normally distributed with mean ξ_i and variance $\sigma^2 = 1$ ($i = 1, \dots, n$), and let x_1, x_2, \dots, x_n be independently distributed.

Define $\chi'^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. This paper gives (1) the characteristic function of $\frac{1}{2} \log \left(\frac{\chi'^2}{n} \right)$

both in terms of the confluent hypergeometric function and in terms of an infinite series of exponential functions where the exponents are again infinite series involving polygamma functions of orders up to infinity and the generalized zeta function,

(2) the first four central moments of $\frac{1}{2} \log (\chi'^2/n)$ in terms of infinite series involving k -gamma functions where $k = l + 1$ if l is the order of the moment ($l = 1, \dots, 4$),

(3) the characteristic function of $z' = \log [(\chi_1'^2 n_2)/(\chi_2'^2 n_1)]$, where $\chi_1'^2$ is a noncentral chi-square with n_1 degrees of freedom and $\chi_2'^2$ is a central one with n_2 degrees of freedom) in terms of an infinite series of exponential functions where the exponents are again infinite series involving polygamma functions of orders up to infinity,

(4) the mean and variance of z' . These results are derived from Tang's results (this Zbl. 20, 243) on the non-central chi-square distribution. The author uses the term moment generating function instead of characteristic function. There are two small misprints: in equation (4) K_j should be read instead of k_j , and in the bottom line of p. 58 γ should be read instead of r . The analysis of the moments is exact (one

hint being given as to an asymptotic approximation of the digamma-function and its derivatives). There is no attempt to derive approximations to the distribution functions of $\frac{1}{2} \log (\chi'^2/n)$ or z' either from the moments calculated or in some other way (cf. for instance, Patnaik, this Zbl. 33, 292). The speed of convergence of the series given is not investigated.

H. R. van der Vaart.

Marakathavalli, N.: Unbiased test for a specified value of the parameter in the non-central F distribution. Sankhya 15, 321—330 (1955).

Folgen die stochastisch unabhängigen Variablen $\chi_1'^2$ und $\chi_2'^2$ einer nicht-zentralen χ^2 -Verteilung mit ν_1 F. G. und Parameter λ bzw. einer gewöhnlichen χ^2 -Verteilung mit ν_2 F. G., so hat der Quotient $F' = \chi_1'^2 \nu_2 / \chi_2'^2 \nu_1$ nach P. B. Patnaik (dies. Zbl. 33, 292) die Verteilungsfunktion

$$P(F') = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda/2} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^j \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2+j} F'^{\nu_1/2-j-1} (1 + F' \nu_1/\nu_2)^{-(\nu_1+\nu_2)/2-j} / j! B(\tfrac{1}{2} \nu_2, \tfrac{1}{2} \nu_1 + j).$$

Zur Prüfung der Nullhypothese $H_0 (\lambda = \lambda_0)$ gegen Alternativ-Hypothesen $\lambda > \lambda_0$

liefert das Kriterium F' (man verwerfe H_0 , wenn $F' > F'_2$ mit $\int_{F'_2}^{\infty} P_{\nu_1, \nu_2}(F' | \lambda_0) dF' = \alpha$)

einen gleichmäßig trennschärfsten (uniformly most powerful) einseitigen Test. Durch Differentiation der Testschärfe (power function) des entsprechenden zweiseitigen Tests von $H_0 (\lambda = \lambda_0)$ gegen $\lambda \geq \lambda_0$ (H_0 zu verwerfen, wenn $F' < a_1$ oder $F' > a_2$) zeigt Verf., daß die durch

$$\int_0^{a_1} P_{\nu_1, \nu_2}(F' | \lambda_0) dF' + \int_{a_2}^{\infty} P_{\nu_1, \nu_2}(F' | \lambda_0) dF' = \alpha,$$

$$\int_0^{a_1 \nu_1/(\nu_1+2)} P_{\nu_1+2, \nu_2}(F' | \lambda_0) dF' + \int_{a_2 \nu_1/(\nu_1+2)}^{\infty} P_{\nu_1+2, \nu_2}(F' | \lambda_0) dF' = \alpha$$

eindeutig bestimmten Grenzen a_1, a_2 einen lokal unverfälschten (unbiased) kritischen Bereich ergeben. Dieser Test findet Anwendung in der zweifachen Varianzanalyse nach dem Modell $x_{ij} = A + B_j + T_i + z_{ij}$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k$) wo $(k-1)k \sum_i (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2 / \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..})^2$ der F' -Verteilung mit $\nu_1 = n-1, \nu_2 = (n-1)(k-1), \lambda = k \sum_i T_i^2 / \sigma^2$ folgt; bei der Prüfung des Populations-Korrelationsverhältnisses E^2 mittels des wie $\nu_1 F' / (\nu_2 + \nu_1 F')$ mit $\nu_1 = k-1, \nu_2 = k(n-1), \lambda = k n E^2 / (1 - E^2)$ verteilten, empirischen $\eta^2 = n \sum_j (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2 / \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2$; zur Testung der unbekannten multiplen Korrelation ρ zwischen x_1, \dots, x_{n_1} und y mittels der an einer n -gliedrigen Stichprobe beobachteten empirischen multiplen Korrelation R , wobei R^2 wie $\nu_1 F' / (\nu_2 + \nu_1 F')$ mit $\nu_1 = n_1, \nu_2 = n - n_1 - 1$ F. G. und $\lambda = \nu_2 \rho^2$ verteilt ist; schließlich zur Beurteilung der studentisierten Distanz D^2 .

M. P. Geppert.

Barton, D. E.: A form of Neyman's Ψ_K^2 test of goodness of fit applicable to grouped and discrete data. Skand. Aktuarietidskr. 1955, 1—16 (1955).

Zur Prüfung der Nullhypothese H_0 bezüglich der Verteilungsdichte $p(x|H_0)$ einer kontinuierlichen Variablen X an Hand einer zufälligen Stichprobe (x_1, \dots, x_n) benutzt J. Neyman (dies. Zbl. 18, 34) das für $n \rightarrow \infty$ mit K F. G. asymptotisch χ^2 -verteilte Kriterium

$$\psi_K^2 = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^K \left\{ \sum_{i=1}^n \pi_r(z_i) \right\}^2, \text{ wo } z_i = \int_{-\infty}^{x_i} p(x|H_0) dx - \frac{1}{2}$$

und $\pi_r(z)$ Legendre-Polynome bedeuten. Dessen Anwendung ist für große n im allgemeinen sehr mühsam, da es Tabulierung der Funktion $z(x)$ erfordert. Daher entwickelt Verf. eine allgemeinere Testform, Ψ_K^2 , welche bei Beibehaltung der Eigenschaften von ψ_K^2 auch für diskrete sowie für gruppierte kontinuierliche Zufallsvariablen gilt

und den klassischen χ^2 -Test als Spezialfall umfaßt. Bei Einteilung des Definitionsbereichs von X in g Intervalle $X_0 < X_1 < \dots < X_g$ wird jedes derselben durch eine ihm angehörende feste Zahl $X_{t-1} < \xi_t \leq X_t$ gekennzeichnet und mittels $p_t = P(X_{t-1} < x \leq X_t | H_0) = P(\xi = \xi_t | H_0)$ ($t = 1, \dots, g$) eine diskret verteilte Variable ξ eingeführt. Neymans z entspricht im diskreten Fall $\xi_t = \sum_{s=1}^{t-1} p_s + \frac{1}{2} p_t$

und bei Gruppierung $\xi_t + p_t z'$, wo z' eine in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gleichverteilte Variable bedeutet. Durch Konstruktion eines Systems bezüglich p_t orthogonaler Polynome mit $\sum_{t=1}^g P_r(\xi_t) P_s(\xi_t) p_t = \delta_{rs}$ wird erreicht, daß $\Psi_K^2 = \sum_{r=1}^K U_r^2$ mit $U_r = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n P_r(\xi_i)$ nach dem zentralen Grenzwertsatz für $n \rightarrow \infty$ mit K. F. G. asymptotisch χ^2 -verteilt ist. Für $K = g - 1$ ergibt sich der klassische χ^2 -Test mit $g - 1$ F. G. Untersuchung der Momente von Ψ_K^2 ergibt unter H_0 sowie unter Alternativ-Hypothesen H_N der Form $p'_t = p_t \left\{ 1 + \sum_{r=1}^N \theta_r P_r(\xi_t) \right\}$ gute Übereinstimmung der Verteilungen von Ψ_K^2 und von ψ_K^2 für $K = 1, 2$ und beliebige n ; Vergleich der Teststärke (power) von Ψ_K^2 gegen H_N mit derjenigen von ψ_K^2 zeigt, daß für $K = 1, 2$ der durch Gruppierung verursachte Verlust an Teststärke gering ist.

M. P. Geppert.

Eeden, Constance van and J. Hemelrijk: A test for the equality of probabilities against a class of specified alternative hypotheses, including trend. I, II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser A 58, 191—198, 301—308 (1955).

Betrachtet werden k unabhängige Versuchsreihen, in denen p_i die Wahrscheinlichkeit für „Erfolg“, $q_i = 1 - p_i$ die Wahrscheinlichkeit für „Fehler“, n_i die Zahl der Einzelversuche, a_i die Zahl der Erfolge und b_i die Zahl der Fehler in der i -ten Reihe sind ($i = 1, \dots, k$). $n = \sum_i n_i$ ist die Gesamtzahl der Einzelversuche. Geprüft wird die Hypothese $H_0: p_1 = p_2 = \dots = p_k$. Bei der gebräuchlichen Anwendung des χ^2 -Testes wird keine Annahme über Alternativhypothesen gemacht. Die Einbeziehung solcher Hypothesen ist gerade Gegenstand dieser Arbeit. — Für $v = 1, 2, \dots$ bezeichne T_v ein Versuchsschema mit k_v Einzelreihen, es sei $T_{v-1} \subset T_v$. Es wird ein Test beschrieben, der die Hypothese $H_0: p_1 = p_2 = \dots = p_{k_v}$ prüft, und der für $v \rightarrow \infty$ und $n_v \rightarrow \infty$ konsistent ist. Die Klasse der Alternativhypothesen ist wie folgt gegeben: g_1, g_2, \dots, g_{k_v} seien beliebige Gewichte mit $\sum_i g_i = 0$, $\sum_i |g_i| = 1$. Es wird $\theta_v = \sum_i g_i p_i$ gesetzt und $\lim_{v \rightarrow \infty} \theta_v \geq 0$ geprüft. Hierzu wird $W_v = \sum_i n_i^{-1} g_i a_i$ definiert, $t_1 = \sum_i a_i$, $t_2 = \sum_i b_i$ und $s^2 = (n(n-1))^{-1} t_1 t_2 \sum_i n_i^{-1} g_i^2$. Dann ist $V_v = s^{-1} W_v$ die in den Test eingehende Variable. Für V_v werden einseitige und zweiseitige kritische Regionen gebildet. Der Test ist konsistent, wenn die n_i und g_i noch gewisse Konvergenzbedingungen erfüllen. Es wird noch der Spezialfall untersucht, daß als Alternativhypothese ein linearer Trend der p_i angenommen wird. Es ist unbekannt, welche Güte der Test besitzt. Verf. vermuten, daß in den Fällen, in denen Konsistenz besteht, der Test strenger ist als der übliche χ^2 -Test.

F. Wever.

Eeden, Constance van: A sequential test with three possible decisions for comparing two unknown probabilities, based on groups of observations. Revue Inst. internat. Statist. 23, 20—28 (1955).

Verf. beschreibt zunächst drei aus der Literatur bekannte sequentielle Tests, nämlich: a) einen Test mit zwei Entscheidungen für (binomische) Wahrscheinlichkeiten, wenn die Beobachtungen gruppenweise genommen werden (Sequential analysis of statistical data; applications: Section 3. Statistical Research Group of the Columbia University. New York, 1945); b) Walds Test für den Mittelwert einer normal verteilten Variablen mit bekannter Varianz für zwei Entscheidungen (A. Wald: Sequential Analysis, dies. Zbl. 29, 158); c) das Analogon für drei Entscheidungen

(M. Sobel and A. Wald, dies. Zbl. 34, 230). a) läßt sich mit Hilfe der arc-sin-Transformation auf b) zurückführen; bei b) und c) wird zugelassen, daß die Varianz nicht konstant ist; in diesem Fall sind jedoch die graphischen Verfahren von Wald bzw. Sobel und Wald nicht anwendbar. Verf. schlägt einen Test vor, in dem das zu a) analoge Problem für drei Entscheidungen betrachtet wird. Auf Grund der arc sin-Transformation kann das Problem analog c) behandelt werden. Graphisch entsprechen den Regionen der drei Entscheidungen von gewissen Ellipsenbögen im Einheitsquadrat begrenzte Gebiete. *O. Ludwig.*

Bhattacharyya, B. C.: A possible use of certain measurements in control by gauging. *Sankhyā* 15, 210—213 (1955).

Bei Entnahme einer n -gliedrigen Stichprobe aus einer Normalverteilung $N(0, \sigma^2)$ werden die $a + c$ in die Intervalle $A (x < -x_1)$ bzw. $C (x > x_1)$ zweier fester symmetrischer Eichmarken $\mp x_1$ fallenden Stücke als Ausschuß betrachtet. Übersteigt die Ausschußzahl $a + c$ ihre Kontrollgrenzen $n(p + r) \pm 3\sqrt{n(p + r)(1 - p - r)}$, wo p, r die Wahrscheinlichkeiten für $x \in A$ bzw. $x \in C$ bei nach $N(0, \sigma^2)$ verteiltem x bedeuten, so zieht Verf., anknüpfend an W. L. Stevens (dies. Zbl. 33, 82), zur Entscheidung, ob Veränderung des Mittelwertes oder solche der Varianz der Ausgangsverteilung vorliegt, die Größen

$$X = \sum_C |z_C| - \sum_A |z_A| = \sum_C x + \sum_A x - (c - a)x_1,$$

$$Y = \sum_C |z_C| + \sum_A |z_A| = \sum_C x - \sum_A x - (c + a)x_1$$

mit $z_C = x - x_1$ für $x > x_1$, $z_A = x + x_1$ für $x < -x_1$ heran. Wählt man als Eichmarken $\mp x_1$ die Quartile ($p = r = \frac{1}{4}$), so berechnet Verf. $E(X) = 0$, $E(Y) = \frac{1}{2} n\sqrt{\pi} (\sigma \sqrt{2} e^{-x_1^2/2\sigma^2} - x_1\sqrt{\pi})$ und die Varianzen von X, Y . Signifikante Abweichung der Größe X von 0 wird als Veränderung des Mittelwertes, solche der Größe Y von $E(Y)$ als Veränderung der Varianz gedeutet. *M. P. Geppert.*

Chandra Sekar, C., S. P. Agarwala and P. N. Chakraborty: On the power function of a test of significance for the difference between two proportions. *Sankhyā* 15, 381—390 (1955).

Zur Prüfung der Gleichheit der Erfolgswahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 zweier Behandlungsweisen diene eine 2×2 -Tafel mit je n Behandlungen und den Erfolgszahlen x_1 und x_2 . Der kritische Bereich werde so festgelegt, daß er auf jeder Geraden $x_1 + x_2 = \text{const}$ symmetrisch ist mit der bedingten Irrtumswahrscheinlichkeit α . Die Arbeit gibt zu $\alpha = 0,05$ und zahlreichen (p_1, p_2) -Kombinationen die zugehörige exakte Teststärke an für $n = 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 100, 200$; außerdem eine analoge Tabelle für den entsprechenden einseitigen Test zur Hypothese $p_2 \geq p_1$. — Anwendungsbeispiele. *H. Richter.*

Ikeda, Sadao: On the estimation of the quality of a group of lots by the single sampling inspection in destructive case. *Osaka math. J.* 7, 131—156 (1955).

Die Ergebnisse von Girshick, Mosteller, Savage [*Ann. math. Statistics* 17, 13—23 (1946)]; Savage [*ibid.* 18, 295—297 (1947)] und Wolfowitz [*ibid.* 17, 489—493 (1946)] werden auf den Fall einer endlichen Grundgesamtheit übertragen, d. h. genauer formuliert, daß die Binomialverteilung durch die hypergeometrische Verteilung ersetzt wird. Für die Untersuchung der Operationscharakteristik beim einfachen Stichprobenverfahren benützt Verf. auch ein Ergebnis von Kolmogorow (dies. Zbl. 39, 151). *L. Schmetterer.*

Page, E. S.: Control charts with warning lines. *Biometrika* 42, 243—257 (1955).

The usual control chart inspection schemes, using samples of fixed size taken at regular intervals, have several disadvantages owing to the fact that the decision to interfere with the process under inspection is based on the occurrence of a single sample-point outside the control limits drawn on the chart. In most cases the total sampling effort is limited by practical considerations and one can take either small

samples frequently or large samples at long intervals. In the first case there will be a considerable chance that the process is needlessly interfered with, while in the second case the detection of undesirable changes in the process may be delayed. Better results are obtained if the decision to take action is based on a number of consecutive sample-points. In the present paper inspection schemes of the following type are considered: use a control chart with two kinds of control limits, called warning lines and action lines respectively; take samples of size N ; take action if any sample-point falls outside the action lines or if k out of the last n points fall outside the warning lines. A useful criterion to judge the merits of a particular scheme, obtained by specifying the position of the warning lines and action lines, the sample size and the numbers k and n , is its average run length, defined as the average number of objects that are inspected before the scheme requires rectifying action. In the special cases $k = 2$ and $k = n$ this quantity can be expressed easily in terms of the probabilities that a sample-point falls in the various regions of the control chart. By choosing the constants mentioned above one can obtain schemes that satisfy certain prescribed conditions regarding their average run length. To facilitate this choice tables of the average run length of various schemes are given in an appendix to the paper. These concern schemes for controlling the mean of a normal population with known variance, and schemes for the simultaneous control of the mean and variance of a normal population on a single chart when changes in the variance are relatively rare or unimportant.

J. J. Bezem.

Kallianpur, G. and C. Radhakrishna Rao: On Fisher's lower bound to asymptotic variance of a consistent estimate. *Sankhyā* 15, 331—342 (1955).

After stating that Fisher's definition of consistency contains more than the usual interpretation, the authors introduce conditions which ensure that the lower bound mentioned in the title exists. This is carried out for a multinomial, and for a continuous distribution. In the latter case use is made of Fréchet's concept of differentiable functionals.

S. Vajda.

Siotani, Minoru: The significance of the discordant variance estimates. *Ann. Inst. statist. Math.* 7, 39—55 (1955).

Let S_1^2, \dots, S_k^2 be independent variance estimates based on samples of the same size drawn from k normal populations $N(\mu_1, \sigma_1^2), \dots, N(\mu_k, \sigma_k^2)$. The author extends Cochran's test for the equality of variances [*Ann. Eugenics* 11, 47—52 (1941)] to situations where one is interested in alternatives that exactly ν variances have slipped to the right. He proposes the test statistic

$$G(k, \nu) = \sum \nu \text{ largest } S^2\text{'s} / (S_1^2 + \dots + S_k^2)$$

and similarly, against alternatives that exactly ν variances have slipped to the left, $S(k, \nu) = \sum \nu \text{ smallest } S^2\text{'s} / (S_1^2 + \dots + S_k^2)$. The sampling distribution of $G(k, \nu)$ and $S(k, \nu)$ are studied under the null-hypothesis. Approximate values of the upper 5% points of $G(k, 1)$ and the lower 5% points of $S(k, 1)$, $S(k, 2)$ are given for various sample sizes and values of k . Also the decision rule of D. R. Truax (this *Zbl.* 51, 361) is extended in an obvious manner to the case $\nu = 2$, but is shown to be optimal (under certain restrictions) only when the two variances have slipped by the same amount.

W. Gautschi.

Yamamoto, Sumiyasu: On the theory of sampling with probabilities proportionate to given values. *Ann. Inst. statist. Math.* 7, 25—38 (1955).

Using ideas and methods introduced by M. H. Hansson and W. N. Hurwitz the author considers samplings from finite universe with probabilities proportional to certain given values. Only twostage sampling is considered. Out of each stratum Ω_i ($i = 1, 2, \dots, r$) a single first stage sampling unit β_{ix} is sampled with some associated probability p_{ix} , $\sum p_{ix} = 1$. In the second stage equal probability sampling is used. To every β_{ix} a general linear form C_{ix} to these samples is constructed. A

linear form $C = \sum_{i=1}^r a_{ij} C_{ix}$ is called a quasi-linear estimate of the universe. The author determines the estimate of minimal variance in the class of all quasi-linear estimates which are consistent and unbiased. Further he determines the optimum set of probabilities which minimize the last variance. *H. Bergström.*

Chapman, Douglas G.: Population estimation based on change of composition caused by a selective removal. *Biometrika* **42**, 279—290 (1955).

Considering a population made up of two classes, a method of estimating the sizes is studied on the basis of random samples taken before and after a selective removal. Optimum sample allocation is determined. The method is compared with the one on capture-recapture in reference to the amount of information and the reasonability of an assumption. The combination of these procedures is also discussed. An extension is made to the case of several selective removals, each followed by a random sample. *Y. Komatu.*

Masuyama, M. and J. M. Sengupta: On a bias in a crop-cutting experiment (Application of integral geometry to areal sampling problems. V). *Sankhya* **15**, 373—376 (1955).

An experiment is described to show the bias which arises through the neglect of a precaution mentioned in a previous paper of one of the authors (this *Zbl.* **50**, 364). *S. Vajda.*

Cox, D. R.: Some statistical methods connected with series of events. *J. roy. statist. Soc., Ser. B* **17**, 129—164 (1955).

Verf. entwirft und untersucht eine Fülle von Test- und Schätzmethoden zur Beurteilung einer Reihe im Laufe der Zeit zufallsmäßig eintreffender Ereignisse. Dem Modell völlig zufälliger Ereignisse, d. h. eines einfachen Poisson-Prozesses mit konstantem Parameter λ , werden als Alternativen gegenübergestellt: 1. Trend, d. h. λ = Funktion der Zeit, z. B. $\lambda = \alpha e^{\beta t}$ bzw. $\lambda = \alpha (t + t_0)^\beta$; 2. = 1. mit einer stetigen Funktion von t an Stelle der Zeit t ; 3. λ = Funktion der seit dem letzten Ereignis verstrichenen Zeit allein, wobei die Zeitintervalle zwischen sukzessiven Ereignissen unabhängig voneinander der gleichen Verteilung folgen; 4. autokorrelierte Intervalle: λ ist Funktion der seit dem letzten, vorletzten, usw. Ereignis verstrichenen Zeit (Markoff-Prozeß); 5. λ variiert stochastisch; 6. in zufällig verteilten Ereigniszeitpunkten treten mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten 1, 2, usw. Ereignisse gleicher bzw. verschiedener Art ein; u. a. m. Hauptgegenstand bilden Zufälligkeitsprüfungen, Varianzkomponenten, Korrelationen sowie eine nützliche Modifikation des in der laufenden Fabrikationskontrolle gebräuchlichen Schnappschuß-Verfahrens [L. H. C. Tippett, *J. Text. Inst.* **26**, T 13—33 (1935)].

M. P. Geppert.

Hammersley, J. M. and J. A. Nelder: Sampling from an isotropic Gaussian process. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **51**, 652—662 (1955).

ξ, η, \dots seien Punkte des n -dimensionalen euklidischen Raumes. W sei der Raum aller Funktionen $w(\xi)$. Ein isotroper Gaußscher Prozeß ist definiert als Wahrscheinlichkeitsmaß $P(w)$ über W derart, daß für jede gegebene endliche Menge von Punkten $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ die gemeinsame Verteilung von $w(\xi_1), w(\xi_2), \dots, w(\xi_k)$ eine k -dimensionale Normalverteilung ist und daß für jedes gegebene Paar von Punkten ξ, η der Korrelationskoeffizient oder bei passender Normierung die Kovarianz ρ von $w(\xi)$ und $w(\eta)$ nur von $r = |\xi - \eta|$ abhängt. Verf. behandelt die Stichprobenentnahme bei solchen Prozessen und stellt Bedingungen für die die Stichprobe festlegenden Funktionen in ihrer Abhängigkeit von $\rho(r)$ auf. Diese Fragestellungen führen u. a. auf eine Verallgemeinerung einer von Schlömilch behandelten Integralgleichung:

$$C_n \int_0^{\pi/2} \varphi_n(t \sin \vartheta) \cos^n \vartheta \, d\vartheta = \psi_n(t), \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

Die recht allgemeinen Ergebnisse werden spezialisiert auf drei und weniger Dimensionen. Insbesondere werden bekannte Ergebnisse betreffend lineare Markoff-Prozesse, raumartige Pseudo-Markoff-Prozesse und den von P. Whittle behandelten ebenen Prozeß in die Theorie eingeordnet. *G. Schulz.*

Bates, Grace E.: Joint distributions of time intervals for the occurrence of successive accidents in a generalized Polya scheme. *Ann. math. Statistics* 26, 705—720 (1955).

From the moment $t = 0$ individuals are exposed to the risk of nonfatal accidents. For one particular individual the conditional probability $P_{m,n}(T_1, T_2)$ of n accidents occurring in the interval (T_1, T_2) , given that m accidents have occurred at given points of time before T_1 , is independent of the given points of time; and obeys the following relations $P_{m,1}(t, t + dt) = [\lambda_m dt / (1 + \nu t)] + o(dt)$, $P_{m,n}(t, t + dt) = o(dt)$ if $n > 1$. Differential equations for the P 's are obtained and solved. The author derives the conditional joint probability density of the points of time for accidents in $(T, T + 1)$, given that the individual will incur m accidents before time T . Furthermore, the author derives the probability density of the mean time for accident in $(T, T + 1)$ subject to the same conditioning, assuming $\nu = 0$ and $\lambda_{m+1} - \lambda_m = \psi$ independent of m . The following risk problem is solved: It is assumed that $\lambda_{m+1} - \lambda_m = \psi$ is independent of m , that $\nu = 0$ and that accident times are independent from one individual to another. In a group of individuals, the points of times of accidents in $(T, T + 1)$ and the persons to whom they occur are observed. A test is wanted for $\psi = 0$ against one-sided and two-sided alternatives. It appears that uniformly most powerful, respectively uniformly most powerful unbiased, tests exist and these tests depend only on the mean point of time for accident, this mean being a sufficient statistic. In the course of the derivation of these results, Neyman-Pearson's classical results and Lehmann-Scheffe's theory of completeness are applied. Finally the power functions of the tests are obtained. *E. Sverdrup.*

Ghurye, S. G.: Note on asymptotic estimation of parameters of an autoregressive process. *Ganita* 6, 1—7 (1955).

The author considers the problem of estimating the parameters in a linear stochastic difference equation of the form $x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_k x_{t-k} + x_0 = \varepsilon_t$; $t = k + 1, k + 2, \dots$. This problem was treated by A. Wald and the reviewer [*Econometrica* 11, 173—220 (1943)] under the assumption that the ε_t are independent random variables with finite moments. The author considers the same problem under the condition that the ε_t have finite second moments and are m -dependent, that is to say ε_t and ε_{t+m} are independent. The author gives estimates for this case and shows that his estimates are in the limit normally distributed. *H. B. Mann.*

Gourlay, Neil: *F*-test bias for experimental designs in educational research. *Psychometrika* 20, 227—247 (1955).

Gourlay, Neil: *F*-test bias for experimental designs of the latin square type. *Psychometrika* 20, 273—287 (1955).

Brogden, Hubert E.: Least squares estimates and optimal classification. *Psychometrika* 20, 249—252 (1955).

Burros, Raymond H.: The estimation of the discriminial dispersion in the method of successive intervals. *Psychometrika* 20, 299—305 (1955).

Rimoldi, H. J. A. and M. Hormaeche: The law of comparative judgement in the successive intervals and graphic rating scale methods. *Psychometrika* 20, 307—318 (1955).

Luce, R. Duncan, Josiah Macy jr. and Renato Tagiuri: A statistical model for relational analysis. *Psychometrika* 20, 319—327 (1955).

Parker, E. T. and A. M. Mood: Some balanced Howell rotations for duplicate bridge sessions. *Amer. math. Monthly* 62, 714—716 (1955).

In der Note werden sogenannte „Howell rotations“ behandelt, die bei „duplicate bridge“ eine Rolle spielen. [Für die Terminologie verweist die Arbeit auf G. W. Beynon, Duplicate Bridge, New York (1944).] Es wird gezeigt, daß „balanced rotations“ nicht existieren, wenn die Tischanzahl T und die Anzahl der Runden = Anzahl der boards = $2T - 1$ ist. W. Gaschütz.

Cvetkov, B.: A new method of computation in the theory of least squares. Austral. J. appl. Sci. 6, 274—280 (1955).

Die Methode ist als „Ausgleichung mit reduzierten Bedingungsgleichungen“ seit langem bekannt. (Vgl. Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde Bd. 1, Stuttgart 1935.) Man kommt heute auf dem von H. Boltz gewiesenen Weg wesentlich rascher zum Ziel. W. Hofmann.

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

● **Lazarsfeld, Paul F.** (edited by): Mathematical thinking in the social sciences. 2nd ed. revised. Glencoe, Ill.: The Free Press 1955. 444 p. \$ 10,—.

Über die in allen empirischen Wissenschaften unentbehrliche und heute längst eingebürgerte beschreibende und (wahrscheinlichkeitstheoretisch begründete) zufallskritische Statistik hinaus, findet die Mathematik, und insbesondere die Wahrscheinlichkeitstheorie, neuerdings sowohl in der Ökonometrie als auch in Soziologie und Psychologie an vielen Stellen und in verschiedensten Richtungen direkten Eingang, insofern als sie, ähnlich wie in den Naturwissenschaften, (deterministische oder stochastische) mathematische Modelle und Theorien zur Erklärung der betrachteten Phänomene liefert, weiterhin aber auch die hier besonders deutlich klaffende begrifflich-logische Lücke zwischen beobachtbaren bzw. meßbaren Daten einerseits und den „hinter dem Phänomen“ stehenden wahren, nicht direkt erfaßbaren, ursächlichen Faktoren desselben andererseits schließt oder wenigstens zu überbrücken sucht. In diesem Sinne bieten die im vorliegenden Buch vereinigten 8 Vorlesungen eines Symposiums aus der Feder von Forschern verschiedener Fachrichtungen einen zwar keineswegs vollständigen, aber treffenden Einblick in die Rolle, die mathematische Denkweise in der modernen Soziologie und verwandten Gebieten spielt. — Nach einer Einleitung, in welcher **P. F. Lazarsfeld** (3—16), eine übersichtliche Synthese der Einzelbeiträge gibt, deren Zusammenhang mit anderen verwandten Gedankengängen aufzeigt und ergänzend auf weitere einschlägige Arbeiten hinweist, wendet **T. W. Anderson** (1. Probability models for analyzing time changes in attitudes, 17—66) als Mathematiker auf das in der Meinungsforschung wichtige Problem der Meinungsänderung mit der Zeit die Theorie der stochastischen Prozesse an. Ausführlich wird behandelt der Fall der einfachen Markoff-Kette mit konstanter $m \times m$ -Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten für 1 Person zwischen sukzessiven Zeitpunkten. Das Modell wird ausgedehnt auf n unabhängig meinende Personen mit gleicher Übergangsmatrix mittels der bedingten Multinomialverteilung der zur Zeit $t-1$ Meinung i Innehabenden nach ihrer Meinung j ($= 1, \dots, m$) zur Zeit t . Die Konstanz der Matrix in $t = 1, 2, \dots, T$ wird für großes n geprüft mittels des asymptotisch mit $(T-1)m(m-1)$ F. G. χ^2 -verteilten Kriteriums $-2 \ln \lambda$, wo λ das Wahrscheinlichkeitsverhältnis bedeutet. Analog wird der kompliziertere Fall, in welchem die Meinung einer Person in t stochastisch abhängt von den in $t-1, t-2, \dots, t-q$ innegehabten Meinungen, behandelt, der durch sinngemäße Definition von m^q Zuständen (entsprechend den in $t-1, \dots, t-q$ je m möglichen Meinungen) wieder auf einfache Markoff-Ketten führt. — Der bekannte, führende Biophysiker **N. Rashevsky** (2. Two models: imitative behavior and distribution of status, 67—104) berichtet über größtenteils eigene Beiträge zur mathematischen Theorie der menschlichen Beziehungen, wobei die Auswirkungen der persönlichen Kontakte an auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Differential-, Integral- und Integrodifferentialgleichungen fußenden Modellen studiert werden. Behandelt wird

speziell die Theorie des Nachahmungstriebes und diejenige der sozialen Ordnungen (z. B. Hackordnung im Tierreich). — Anschließend versucht **J. S. Coleman** (3. An expository analysis of some of Rashevsky's social behavior models, 105—165), für den Nichtmathematiker die Struktur einiger von Rashevskys Modellen (außer den eben genannten noch: Theorie der Vermögensverteilung und Theorie altruistischer und egoistischer Gesellschaft) zu durchleuchten, indem er die logische Natur der beteiligten Begriffe und Prozesse analysiert und dementsprechend die Modelle klassifiziert. Die Überlegungen schließt der interessante Versuch ab, den mathematischen Apparat auf andere Begriffsinhalte der Soziologie sinngemäß zu übertragen.

J. Marschak (4. Probability in the social sciences, 166—215) erörtert in Abschnitt I (probabilities and the norms of behavior) vom Standpunkt des Ökonometrikers aus Zusammenhänge zwischen subjektiver Wahrscheinlichkeit, Nützlichkeit und Spieltheorie, wobei insbesondere die Auffassungen von Th. Bayes (1763), F. P. Ramsey (1926/31), B. de Finetti, L. J. Savage, J. von Neumann, O. Morgenstern zur Sprache kommen. In Abschnitt II (probabilities and descriptive special science) skizziert er die Natur der zugrunde gelegtes Modell und Beobachtungsmaterial verknüpfenden Vorwärts- und Rückschlüsse, wobei insbesondere Fragen der Identifizierbarkeit und die Bedeutung der statistisch nicht prüfbaren impliziten Voraussetzungen des Modells berücksichtigt werden. Abschnitt III (probability and policy) ist den Beziehungen solcher stochastischer Modelle zu politischen Maßnahmen und Handlungen gewidmet. — Der Soziologe **L. Guttman** (5. The principal components of scalable attitudes, 216—257) vertieft und erweitert hier seine bekannte Skalogrammanalyse, die der in Psychologie und Soziologie besonders wichtigen Aufgabe dient, aus qualitativen Beobachtungen in Wahrheit zugrunde liegende, aber nicht direkt erfassbare quantitative Merkmale zu erschließen. Von den 2^n möglichen Antworten-Kombinationen auf n dichotome Fragen sind, wenn die nk Antworten von k Versuchspersonen einer perfekten, d. h. widerspruchsfreien Skala entsprechen, höchstens $n + 1$, die sog. Skalatypen, zulässig, die eine eindeutige Rangordnung bezüglich der durch die n Fragen zu erfassenden Grundeigenschaft aufweisen. Analoges gilt für n Fragen mit je ≥ 2 verschiedenen Antworten. Einer bloßen Rangordnung wird sodann eine Metrik unterlegt, d. h. auf Grund des klassischen Prinzips, Zwischen-Abweichungsquadratsummen zu maximalisieren und Binnen-Abweichungsquadratsummen zu minimalisieren, eine kontinuierliche Variable konstruiert; die Lösung der diese Forderung ausdrückenden Matrixgleichung führt auf die Eigenvektoren der Matrix als „Hauptkomponenten“, wobei Verf. die Lösungen nach steigender Anzahl ihrer Extrema ordnet und psychologisch interpretiert. — Einer anderen, älteren Aufgabe aus diesem Gebiet ist der folgende Beitrag von **L. Guttman** (6. A new approach to factor analysis: the radex, 258—348) gewidmet. Seine (Thurstones Faktorenanalyse als Spezialfall umfassende) Theorie der Elementarkomponenten sucht, die n psychologischen Tests entsprechenden, also beobachtbaren Testvariablen oder -noten auszudrücken durch ein neues Variablensystem, dessen Struktur sich — ähnlich wie in der Faktorenanalyse — in mathematisch handlichen Eigenschaften der Korrelationsmatrix der n Testvariablen manifestiert. Während der „Schwierigkeitsgrad“ verschiedener psychologischer Tests gleichen Inhalts eine Rangordnung derselben erlaubt, lassen psychologische Tests verschiedenen Inhalts nach ihrer Komplexität nur zyklische Ordnung zu; die entsprechenden Begriffe des „Simplex“ und „Circumplex“ kombiniert Verf. im „Radex“. — Guttmans ursprünglichen Grundgedanken der Konstruktion einer Skala aus qualitativen Daten weitet **P. F. Lazarsfeld** (7. A conceptual introduction to latent structure analysis, 349—387) aus durch ein Modell, welches die Parameter der gesuchten Klassenaufteilung mit den qualitativen Beobachtungen stochastisch verknüpft. Die auch in der Anwendung stochastischer Prozesse auf soziologische Zeitreihen brauchbare Theorie, deren mathematische Hintergründe in S. A. Stouffer et al. [Measurement and pre-

dition, Princeton (1950)] dargelegt sind, wird hier für den Soziologen dargestellt. — Den Schlußstein setzt **H. A. Simon** (8. Some strategic considerations in the construction of social science models, 388—415), indem er einen „strategischen Kanon“ zur Konstruktion für die Soziologie geeigneter mathematischer Modelle entwickelt. Wie in der bisherigen Geschichte der Soziologie der Weg von letzten Endes auf Maximalisierung gewisser Funktionen, also Aufgaben der Differentialrechnung beruhenden Optimums-Modellen rationalen Verhaltens zu Regel-Modellen adaptiven Verhaltens (Servomechanismen u. a.) führte, sollte sinngemäß auch in Zukunft bei dem Aufbau eines bzw. einer Schaar mathematischer Modelle für soziologische Probleme vorgegangen werden. — Die einzelnen Vorlesungen sind naturgemäß begrifflich und methodisch eng miteinander verflochten. Wichtige Zusammenhänge verknüpfen u. a. 3.), 4.), 5.), 7.), ferner 1.), 2.), 4.) sowie 4.), 7.), 1.). — Das zwar für mathematisch geschulte Soziologen, also Nichtmathematiker geschriebene Buch, von dem streng genommen nur 1.) und 6.) einige neue mathematische Ergebnisse aufweisen, ist trotzdem auch für den Mathematiker zweifellos lesenswert, da es ihm wertvolle Ausblicke auf die mannigfachen Möglichkeiten öffnet, mathematische Begriffe, Gedankengänge und Methoden in der Soziologie fruchtbar anzuwenden. *M. P. Geppert.*

Bailey, Norman T. J.: Some problems in the statistical analysis of epidemic data. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **17**, 35—68 (1955).

Verf. betrachtet Epidemien im Kleinen auf Grund zwei verschiedener rein stochastischer Modelle: I. des von M. S. Bartlett und Verf. selbst mehrfach untersuchten „zeitstetigen“ Modells, II. des „Binomialketten“-Modells. Bei I sind in der zur Zeit t aus r Infizierbaren und s Infizierten bestehenden Bevölkerung Neuinfektion und Abgang (d. h. Manifestation der Symptome) zufällige Ereignisse mit Wahrscheinlichkeiten $\beta r s dt$ bzw. $\gamma s dt$. Das diesen stochastischen Prozeß beschreibende Differenzen-Differentialgleichungssystem

$$dp_{rs}/dt = \beta (r+1) (s-1) p_{r+1, s-1} - (\beta r + \gamma) s p_{rs} + \gamma (s+1) p_{r, s+1}$$

untersucht Verf. mittels Laplace-Transformation. Deutung des Epidemieverlaufes als Irrfahrt des Punktes (r, s) von (n, a) bis $(n-w, 0)$ ergibt explizite die Wahrscheinlichkeit P_w für den Gesamtumfang w der Epidemie. Da Pascalisierung des Poisson-Prozesses bekanntlich auf Γ -Verteilung, also auf negativ-exponentielle Verteilung des Zeitintervalls t zwischen 2 sukzessiven Erkrankungen in einer Familie führt, ist bei Aufteilung von N Familien, bestehend aus je n Infizierbaren und 1 Infizierten, nach der Anzahl w der zusätzlich Infizierten $\left(N = \sum_{w=0}^n a_w\right)$, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Intervall zwischen der $(w-1)$ -ten und w -ten Erkrankung der i -ten Familie t_{wi} betrage, proportional

$$\prod_{w=0}^n P_w^{a_w} \cdot \prod_{w=1}^n \prod_{i=1}^{a_w} \gamma e^{-\gamma t_{wi}};$$

hieraus werden für β, γ bzw. $q = \gamma/\beta$ plausibelste (Maximum-likelihood-) Schätzer hergeleitet. Bei II hingegen ist die Inkubationszeit konstant und die Infektiosität auf einen Punkt reduziert, so daß die Epidemie schrittweise verläuft. Ist S_t bzw. C_t die Anzahl der just vor dem Zeitpunkt t vorhandenen Infizierbaren bzw. Infizierten und $p = 1 - q$ die Wahrscheinlichkeit für Infektion ermöglichenden Kontakt zwischen irgend 2 Personen der Gesamtheit, so lautet nach Reed und Frost die Verteilung von C_{t+1}

$$\binom{S_t}{C_{t+1}} (1-qC_t)^{C_{t+1}} q^{C_t S_{t+1}},$$

nach dem mehrfache Infektionsquellen vernachlässigenden Greenwood-Modell

$$\binom{S_t}{C_{t+1}} p^{C_{t+1}} q^{S_{t+1}}.$$

Die aus diesen Binomialverteilungen aufzubauenden Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen möglichen Epidemieverläufe in einer Familie sowie die daraus

folgenden Verteilungen für die Gesamtzahl der Fälle in der Familie tabuliert Verf. für Familien von 2, 3, 4, 5 Personen mit 1 bis 4 Primärfällen. Die Kontaktwahrscheinlichkeit p wird aus beobachteten Ketten bzw. Gesamterkrankungszahlen geschätzt. Der Gedankengang wird erweitert zunächst auf zwischen Familien variierendes, Beta-verteiltes p , sodann auf individuell variierendes p , womit als Spezialfall auch die durch Immunität verursachten Erfassungsschwierigkeiten der richtigen Infizierbaren-Anzahl erledigt sind. Die in N Familien mit je 2 Infizierbaren, von denen wenigstens 1 erkrankt, beobachtete Verteilung des zwischen den beiden Erkrankungen liegenden Zeitintervalls erklärt Verf. durch Zusammensetzung aus 3 Verteilungen: A (2 Primärfälle), B (1 Primär- + 1 Sekundärfall), C (1 Primärfall) und Annahme normalverteilter — $N(m, \sigma^2)$ — Latenz- und konstanter Infektiositätszeit a , sowie eines Poisson-Prozesses (λdt) für die Sekundärinfektion. Die Schätzung der Parameter m , σ , a und λ erfolgt mit Momentenmethode.

M. P. Geppert.

Boguslavsky, G. W.: A mathematical model for conditioning. Psychometrika 20, 125—138 (1955).

Unter gewissen Annahmen über den Zusammenhang zwischen Sinnesreizungen und Reaktionen eines Lebewesens, der in einem math. Modell erfaßt wird, gibt der Verf. eine suffiziente Statistik für die Anzahl der „specific vigilance reactions“ an, deren das Lebewesen fähig ist.

D. Bierlein.

Böck, H. S.: Über die Gesetzmäßigkeit des natürlichen Zugrundegehens. Österreich. Ingenieur-Arch. 9, 319—342 (1955).

Verf. überträgt Beziehungen, welche für das Absterben erwachsener Personen gelten (im Prinzip Makehamfunktion), auf das Zugrundegehen von Holzschwellen. Neben der Herleitung von Maßzahlen für das Zugrundegehen (durchschnittliche „Lebens“-dauer, Intensität des Ausscheidens usw.) finden sich Ansätze zum Erfassen der Auslese.

E. Zwinggi.

Stange, K.: Zur Ermittlung der Abgangslinie für wirtschaftliche und technische Gesamtheiten. Mitteil.-Bl. math. Statistik 7, 113—151 (1955).

Ähnlich wie für biologische Gesamtheiten Sterbetafeln, sind für wirtschaftliche und technische Gesamtheiten Ausscheideordnungen aufzustellen, aus denen die mittlere Verweilzeit (Lebensdauer) und andere Kennwerte abgeleitet werden können. Wie Verf. feststellt, erfordern die üblichen analytischen Verfahren einen nur in seltenen Fällen gerechtfertigten, erheblichen Rechenaufwand. Außerdem haben sie andere Nachteile, z. B. ist die Ausgleichung nach der Ausscheideformel von Gompertz-Makeham $F(t) = at^b e^{-t}$ gerade für die ersten Jahre wenig brauchbar, für die die Kennwerte der wirtschaftlichen und technischen Gesamtheiten am wichtigsten sind. Verf. gibt eine dem Ansatz von Makeham verwandte Lösung $F(t) = e^{-(t/T)^\alpha}$ mit den beiden Parametern T („kennzeichnende Lebensdauer“) und α . Durch zweimaliges Logarithmieren geht diese Lösung in eine Linearform über, so daß die Parameter zeichnerisch leicht zu bestimmen sind. Die Ausführungen werden durch zahlreiche Beispiele aus Technik und Wirtschaft illustriert.

H. Härten.

Gumbel, E. J.: The calculated risk in flood control. Appl. sci. Research, A 5, 273—280 (1955).

x sei eine stetige zufällige Veränderliche mit bekannter Verteilungsfunktion $F(x)$. In regelmäßigen Zeitabständen werden Beobachtungen gemacht und die Alternativereignisse $x \leq x$, $x > x$ registriert. Verf. untersucht für verschiedene $F(x)$ die Wiederkehrzeiten des Ereignisses $x > x$, ihre Erwartungswerte und ihr asymptotisches Verhalten; er schlägt ihre Verwendung zur Berechnung von Risiken vor. Anwendung bei der Berechnung von Hochwasserschäden.

G. Schulz.

Lah, Ivo: Das Restglied der Taylorschen Reihe des Rentenbarwertes und einige Formeln des Zinsfußproblems für große Zinsspannungen. Skand. Aktuarietidskr. 1955, 165—179 (1956).

Verf. entwickelt den Barwert einer mit dem Zins i gerechneten nachschüssigen, lebenslänglichen Leibrente $a_x(i)$ in eine Taylorsche Reihe der Form $a_x(i) = \sum_{r=0}^{n-2} \frac{(i-i_0)^r}{r!} M_r(i_0) v_0^r + R_{n-2}$, wobei $M_n(i) v^n = (-1)^n n! v^n S_{x+1}^{(n)}/D_x$ mit $S_{x+1}^{(n)} = \sum_{t=1}^{n-x} \binom{n-1+t}{n} D_{x+t}$ ist. Nach Bestimmung des Restgliedes R_{n-2} werden einige Näherungsformeln für R_{n-2} ermittelt, die auch bei großen Zinsdifferenzen $i - i_0$ für die Praxis brauchbare Werte liefern. *G. Reichel.*

Jecklin, Heinrich: Sulla rappresentazione delle curve della riserva matematica per mezzo di iperboli. Giorn. Ist. Ital. Attuari 18, 35—42 (1955).

Verf. führt die Beschreibung der F -Methode zur Reserveberechnung (dies. Zbl. 67, 361) fort und sucht Sterbetafeln, für welche der hyperbolische Verlauf des Deckungskapitals exakt zutrifft. *E. Zwinggi.*

Haacke, Wolfhart: Zur iterativen Bestimmung der Rentabilität einer Zinsanleihe. Z. angewandte Math. Mech. 35, 327—330 (1955).

Zwischen dem als gegeben angesehenen Kurs K_0 einer Anleihe, welche über n ganze restliche Jahre läuft, mit dem Betrag $1 + \alpha$ rückzahlbar ist und nominell den Ertrag i_0 abwirft, besteht die Relation $K_0 = (1 + \alpha) v^n + i_0 a_n = (1 + \alpha)/(1 + i)^n + i_0 [1 - (1 + i)^{-n}]/i$, wobei i die zu bestimmende Rendite ist. Verf. untersucht die approximative Berechnung von i mittels Iterationsverfahren im Bereiche $0,02 \leq i \leq 0,10$ und $1,0 \leq 1 + \alpha \leq 1,1$. *E. Zwinggi.*

Mazzoni, Pacifico: Sulla costituzione di un capitale per inseguimento. Giorn. Ist. Ital. Attuari 18, 43—58 (1955).

Il problema finanziario è il seguente: costituire mediante il pagamento di una rendita un capitale in un dato numero di anni, quando il capitale (per acquistare un dato bene o per rinnovare un impianto industriale) varia col tempo, ad es. per effetto di svalutazione monetaria. In altri termini si tratta di ricavare le rate che dovranno essere versate per adeguarsi alle variazioni che alterano col tempo le condizioni di partenza. L'A. espone dapprima il caso fisico di due mobili che si inseguono, sotto differenti condizioni per i loro moti, rileva che il problema è indeterminato e indica una soluzione semplice per determinare la velocità che deve avere il mobile inseguitore perchè alla fine del tempo possa raggiungere il mobile inseguito. Successivamente passa a considerare il problema finanziario in cui interviene — in aggiunta al precedente caso fisico — il saggio di interesse, il quale, a sua volta, può essere costante oppure variabile tra l'epoca iniziale e l'epoca n . Fissate le condizioni iniziali, il problema ammette più soluzioni. Il Mazzoni ne illustra 3 differenti che svolge sia per distribuzioni continue che per distribuzioni discontinue. Esse possono essere indicate nel seguente modo. Indicando $p(t)$ la rata, $Q(t)$ il valore del capitale all'epoca t si ha: a) nell'ipotesi di un saggio di interesse costante δ (saggio nominale nella capitalizzazione continua)

$$p(t) = Q(0) \bar{\sigma}_n \delta + Q'(t) e^{-\delta(n-t)}$$

dove il primo termine serve a costituire il capitale inizialmente previsto $Q(0)$ e l'altro a compensare le variazioni di valore $Q'(t) dt$; b) nell'ipotesi di un saggio di interesse variabile $\delta(t)$, e di un capitale costante,

$$p(t) = p + p [\delta(0) - \delta(t)] \int_0^t e^{\delta(0)(t-z)} dz;$$

c) nel caso che varia il capitale e varia l'interesse

$$p(t) = (Q(t)/Q(0)) p \{1 + [\delta(0) - \delta(t) \bar{s}_t]\} + (Q'(t)/Q(0)) p s_t.$$

Da queste formule si ricavano le corrispondenti nel caso discreto e anche vari casi particolari molto importanti e utili. L'A. illustra pure un'applicazione numerica per la costituzione, in 10 anni, di un capitale variabile in progressione geometrica di ragione $1 + k$. *T. Salvemini.*

Jongmans, F.: Le problème duopoliste. Bull. Soc. roy. Sci. Liège **24**, 326—365 (1955).

The behaviour of two competing producers of identical commodities is treated as a two-person non-zero-sum game. Let their productions be x_i ($i = 1, 2$) and the pay-off $x_i f(x_1 + x_2) - F_i(x_i)$, where f and F have commonsense properties. Their precise form may or may not be known to both producers. — Aided by a geometrical representation, and starting from a partial order relation of dominance between outcomes, the author investigates the tendencies towards stable positions, by analysing likely strategies, negotiations, and agreements between the players. An example is dealt with in some detail and a mathematical treatment is briefly given at the end of the paper. S. Vajda.

Bellman, Richard: Dynamic programming and a new formalism in the calculus of variations. I. Rivista Mat. Univ. Parma **6**, 193—213 (1955).

The contents of this paper have since been incorporated as Chapter IX into the author's book Dynamic Programming (this Zbl. **77**, 136), so that here a quotation of some of the section headings, with remarks in brackets, will suffice. 2. The calculus of variations as a continuous decision process. 3. and 4. Applications I and II.

[Maximize $\int_0^\infty F(x, y) dt$ subject to $\frac{dx}{dt} = G(x, y)$, $x(0) = c$, and a more general problem.] 5. and 6. Constraints I and II. [Maximize $\int_0^T F(x, y) dt$ subject to $\frac{dx}{dt} = G(x, y)$, $x(0) = c$, $0 \leq y \leq x$, and also the same problem with an additional constraint.] 9. Eigenvalue problems ($u'' + \lambda^2 \Phi(t) u = 0$, $u(0) = u(1) = 0$). 11. The functional equation for $f(k, T)$ $\left(= \min_u \int_0^T u'^2 dt \right)$. S. Vajda.

Geometrie.

Hodge, W. V. D.: Changing views of geometry. Math. Gaz. **39**, 177—183 (1955).

In diesem Vortrag, welchen Verf. als Vorsitzender der „Mathematical Association“ gehalten hat, wird die Aufmerksamkeit gerichtet auf eine Wandlung im geometrischen Denken, die eine Entfernung vom „Erlanger Programm“ bedeutet. Statt ein System von Definitionen und Sätzen zu sein, die invariant sind bezüglich einer Gruppe von Transformationen, sieht man jetzt die Geometrie sich entwickeln als das Studium eines Raumes mit einer gewissen Struktur. Man sieht das am klarsten in der Topologie und in der modernen Differentialgeometrie.

J. C. H. Gerretsen.

Aleksandrow (Aleksandrov), A. D.: Was ist Geometrie? Wiadom. mat. **1**, Nr. 1, 4—46 (1955) [Polnisch].

Der Artikel stellt die Übersetzung des entsprechenden Artikels des Verfassers (Geometrie) aus der großen sowjetischen Encyklopädie (Bd. **10**, 533—555) dar. Nach einer Einleitung formuliert Verf. den ursprünglichen Gegenstand der Geometrie. Sodann schildert er die Entwicklung der Geometrie, wobei er vier Perioden unterscheidet. Die letzte beginnt mit der Konzeption der nichteuklidischen Geometrie von Lobatschewsky. Nach Erörterung der weiteren Verallgemeinerungen der geometrischen Theorien werden die geometrischen Methoden besprochen. Mehr Platz wird den Grundlagen der Elementargeometrie gewidmet. Es folgt ein Paragraph über die letzten Verallgemeinerungen (Kleinsches Prinzip, Riemannsche Mannigfaltigkeiten, affine Konnexionen). In einer kurzen Übersicht der allerletzten Resultate werden hauptsächlich die Erfolge der russischen Forscher erwähnt. Der Artikel endet mit zwei Kapiteln über die Bedeutung der Geometrie in der Mathematik und über das Verhältnis der Geometrie zur Wirklichkeit. St. Golab.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

● Baur, A.: Analytische Geometrie in vektorieller Behandlung. I. Elementare analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. — II. Affine Geometrie. — III. Die projektiven Verwandtschaften. München-Düsseldorf: Verlag von R. Oldenbourg 1955. VIII, 83 S. DM 4,40; IV, 111 S. DM 6,40; V, 120 S. DM 7,80.

Teil I bringt zunächst die wichtigsten Regeln der Vektoralgebra im R_3 , sowie das einfachste über zwei- und dreireihige Determinanten. Der Multiplikationssatz für die letzteren wird vektoriell (nicht besonders einfach) bewiesen. Es folgt in vektorieller Darstellung die Bestimmung von Länge, Winkel, Flächen- und Rauminhalt im kartesischen Koordinatensystem. Sodann: Verschiebung und Drehung des Koordinatensystems der Ebene; verschiedene Darstellungen von Gerade und Ebene; Schnittpunkt, Abstände; hyperbolisches Paraboloid als Erzeugnis ähnlicher Punktreihen (der Nachweis der zweiten Regelschar ist nicht ganz geglückt). Im Schlußkapitel werden behandelt: Kreis, Kreisbüschel, Kugel; Tangente und Tangentialebene, Polare und Polarebene; der Kugel umschriebene Zylinder und Kegel; Rotationshyperboloid; Drehung des räumlichen Koordinatensystems. — Teil II beginnt unter Voranstellung der Parallelprojektion mit der Aufstellung der Grundgesetze der affinen Verwandtschaft zweier Ebenen. Diese wird in der Form $r = \xi a + \eta b$ untersucht, wobei ξ, η, r die kartesischen Koordinaten des Originalpunktes und den Ortsvektor seines Bildes bedeuten. Nach Besprechung der Ellipse als affines Bild des Kreises wird noch auf die Eulersche und die perspektive Affinität eingegangen. Eine ähnliche Behandlung erfährt dann die affine Verwandtschaft zweier Räume in der Form $r = \xi a + \eta b + \zeta c$, sowie das Ellipsoid als affines Bild der Kugel. Die affine Abbildung des Raumes auf die Ebene wird ebenfalls kurz gestreift. Die zweite Hälfte von Teil II befaßt sich mit Kurven und Flächen zweiter Ordnung. Ellipse, Hyperbel und Parabel werden mit ihren wichtigsten Eigenschaften in der Form $r = 2a + 2\lambda b / (1 \pm \lambda^2)$ bzw. $r = \lambda^2 a + \lambda b$ besprochen, die Hyperbel auch mit $r = \mu u + \mu^{-1} v$. Ferner wird gezeigt, wann die Gleichung $r = 2a + 2\lambda b / (p\lambda^2 + q\lambda + s)$ eine Ellipse bzw. Hyperbel bzw. Parabel darstellt. An die Aufstellung der impliziten Gleichungen dieser Kurven schließt sich die Darstellung der allgemeinen Kurve zweiter Ordnung im Raum. Nun folgen die Flächen zweiter Ordnung mit der Gleichung $r = 2a + 2\lambda b + 2\mu c/N$, wo N ein quadratisches Polynom in λ, μ bedeutet. Die Normalformen $N = \lambda^2 \pm \mu^2 + 1$, $1 - \lambda^2 - \mu^2$, $\lambda^2 \pm \mu^2$, $\lambda^2 + 2\mu$, $1 \pm \lambda^2$, λ^2 liefern die 9 nicht-zerfallenden Quadriken, von denen jede einzelne einschließlich ihrer vektorfreien Normalgleichung kurz besprochen wird. — Im Teil III wird zuerst, sehr ausführlich und anschaulich, die Zentralprojektion einer Ebene auf eine dazu senkrechte zeichnerisch und rechnerisch behandelt. Daran schließt sich die ebene und die freie Perspektive, sowie die analytische Behandlung der allgemeinen Zentralprojektion. Dann folgt ein Kapitel über die projektive Verwandtschaft zweier Ebenen mit der Abbildungsgleichung $r = \xi a + \eta b + c/(a_3\xi + b_3\eta + c_3)$. Durch Herstellung der Normalform $r = a + b\eta/j\xi$ wird die Überführbarkeit in eine Perspektive gezeigt. An die Betrachtung projektiver Punktreihen und Strahlenbüschel schließt sich der Beweis, daß die Existenz einer Perspektivitätsachse die eines Zentrums nach sich zieht und umgekehrt. Die Bestimmung der projektiven Verwandtschaft durch vier Paare entsprechender Punkte und der Nachweis der Gruppeneigenschaft beschließen dieses Kapitel. Eine analoge Behandlung erfährt sodann die projektive Verwandtschaft zweier Räume. Auch die Perspektivität und die entartete Abbildung bei verschwindender Determinante finden dabei Berücksichtigung. Das letzte Kapitel beginnt mit der projektiven Transformation der Quadriken und bringt die affine und die projektive Einteilung derselben. Es folgen: Projektive und perspektive Abbildung der Kugel; Erzeugnis zweier projektiver Ebenenbüschel sowie zweier reziproker Bündel. Den Schluß bilden die projektiven Abbildungen des Kreises und der Kugel auf sich selbst, speziell die Polarspiegelungen. — Laut Vorwort wendet sich das Buch in erster Linie an die oberen Gymnasialklassen; es will aber auch eine Lücke zwischen Schul- und Hochschulmathematik ausfüllen. Als kennzeichnende Züge desselben fallen in die Augen: die weitreichende Verwendung von Vektoren und von Abbildungsverfahren, das erfolgreiche Streben nach Anschaulichkeit (284 sorgfältig gezeichnete Abbildungen) und die Beigabe von über 1000 verschiedenartigen Übungsaufgaben. Besonders hervorzuheben sind die schönen, mit einem Blick erfassbaren Abbildungen räumlicher Gegenstände. Schade ist, daß Verf. nicht auch dem Text überall die gleiche Sorgfalt angedeihen ließ. Dies gilt insbesondere von manchen Begriffen (z. B. Winkel, Rechtssystem, Flächenvektor, Fernelemente, Gruppe u. a.), die nicht eindeutig oder klar genug definiert sind. So entstanden Unklarheiten, manchmal auch Irrtümer (z. B. I S. 38), an denen gerade der Anfänger oft hängen bleibt. Zerfallende Kegelschnitte und Quadriken bleiben fast durchweg außer Betracht. Bei den Deutungen der Zentralprojektion (III S. 3) hätte neben Kamera und Projektionsapparat das altbekannte Verfahren zum Entwerfen perspektiver Bilder auf der Glastafel Erwähnung verdient. In dem Kapitel über Vektoralgebra vermißt man die Darstellung eines Vektors durch eine allgemeine Basis und durch die reziproke; auch würde hier eine Zusammenstellung der wichtigsten Formeln von Nutzen sein. Die formale Art, das skalare und das vektorielle Produkt einzuführen, ein Stück weit gemeinsam unter Postulierung des distributiven Gesetzes, hernach ge-

gabelt mittels weiterer, mehr oder weniger willkürlich erscheinender Forderungen hinsichtlich der Produkte der Grundvektoren i, j, k , erscheint dem Ref. gerade für die Schule nicht besonders geeignet. Auch dürfte sich nicht empfehlen, für diese beiden Produkte weitere Benennungen (Punkt-, Kreuzprodukt) einzuführen und für den Einheitsvektor von a die wenig glückliche Bezeichnung a^0 zu benutzen. Wenn Verf. schließlich bei der Entwicklung einer dreireihigen Determinante nach den Elementen einer Reihe sagt: der Beweis der Regel ist einfach, man rechnet die 6 Möglichkeiten nach, so vermittelt dies dem Lernenden kein besonders imponierendes Bild vom Wesen der Mathematik. — Trotz dieser kritischen Bemerkungen ist Ref. der Ansicht, daß dieses Buch, das auf verhältnismäßig engem Raum erstaunlich viel bietet, im ganzen eine erfreuliche Neuerscheinung darstellt. Es ist, nicht nur in der Schule, geeignet, die Freude an der Geometrie, besonders der anschaulichen, zu wecken und zu pflegen. Da sein Stoff verschiedentlich über das Maß des normalen Schulunterrichts hinausgeht, wird es auch einerseits eine Fundgrube für Arbeitsgemeinschaften, andererseits eine Brücke zur Hochschule sein können.

E. Schönhardt.

• Steen, Frederick H. and Donald H. Ballou: *Analytic geometry*. 3rd ed. New York: Ginn and Co. 1955. V, 225, 19 p. \$ 3,50.

Barsotti, Leo: *Baryzentrische Koordinaten auf den Gebilden erster Stufe*. Soc. Paranaense Mat., *Anuário* 2, 7—11, 25 (1955) [Portugiesisch].

Bulatović, Z.: *Sur la forme normale de l'équation de la droite*. Enseignement math.-phys. Beograd 4, 89—94, französ. Zusammenfassg. 94 (1955) [Serbokroatisch].

Ein Artikel von nur methodischem Interesse. Der Verf. behandelt die bekannte Frage der Wahl des Richtungssinnes des vom Ursprung auf die Gerade gefällten Lotes bei der Herleitung der Hesseschen Normalform der Gleichung einer Geraden.

T. P. Angelitch.

Seidel, J.: *Angles and distances in n -dimensional euclidean and noneuclidean geometry*. I, II, III. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 329—335, 336—340, 535—541 (1955).

Der Verf. betrachtet als Basisraum einen reellen linearen Raum Σ , der mit einem inneren Produkt (a, b) von zwei Elementen a, b ausgestattet ist. Ein solcher Raum Σ wird halbeinfach genannt, wenn aus $a \in \Sigma$ und $(a, b) = 0$ für alle $b \in \Sigma$ $a = 0$ folgt. Für eine endliche Folge von Elementen a_i aus Σ können wir die sogenannte Gramsche Determinante $D(a_1, \dots, a_n)$ bilden, deren Elemente a_{ij} gleich den (a_i, a_j) sind. Ein a aus Σ heißt eigentlich bzw. uneigentlich je nachdem $(a, a) > 0$ oder $(a, a) = 0$ ist. Ein Unterraum von Σ heißt eigentlich, falls er wenigstens ein eigentliches Element enthält. Ein Σ -Raum heißt ein JH -Raum, falls jeder endlichdimensionale eigentliche Unterraum halbeinfach ist. Die JH -Räume zerfallen in zwei Klassen, J -Räume und H -Räume, wobei ein J -Raum ein solcher ist, für welchen der Rang der Gramschen Determinante gleich n ist, wenn n die Dimension des linearen von den Elementen a_i aufgespannten Unterraumes ist, und zugleich die Signatur auch gleich n ist. Ein JH -Raum, der kein J -Raum ist, heißt ein H -Raum. Sind in einem JH -Raume zwei endlichdimensionale einfache Unterräume Γ und Δ gegeben, so definiert der Verf. den Begriff der Projektion von Δ auf Γ , die Orthogonalität zwischen Γ und Δ , den Grad des Zusammenschneidens von Γ, Δ und den Pol von Γ in bezug auf $\Gamma \cup \Delta$. Es wird untersucht die gegenseitige Lage von zwei Unterräumen Γ und Δ eines JH -Raumes, indem der Begriff einer Invariante von (Γ, Δ) eingeführt wird. Mit Hilfe der Wurzeln einer gewissen Säkulargleichung gewinnt Verf. eine vollständige Reihe von Invarianten (Γ, Δ) in einem J -Raum und eine analoge in einem H -Raum. In einem weiteren Paragraphen führt Verf. den Begriff einer g_1 -Invariante ein, d. h. einer Invariante von (Γ, Δ) , wo $\Gamma \cap \Delta$ nicht halbeinfach ist und ein uneigentliches Element g_1 enthält. Mit Hilfe einer speziellen g_1 -Invariante $\delta(\Gamma, \Delta)$ gewinnt Verf. eine vollständige Reihe von g_1 -Invarianten. $\delta(\Gamma, \Delta)$ kann ausgedrückt werden mit Hilfe von Wurzeln der oben erwähnten Säkulargleichung und von $\delta(\Phi, \Psi)$, wo $\Phi \subset \Gamma$, $\Psi \subset \Delta$ und Φ, Ψ zweidimensional sind. Die dritte Arbeit zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teil werden zunächst durch einen dreiartigen Abstraktionsprozeß mit Hilfe von Äquivalenzrelationen aus JH - bzw. J -, bzw. H -Räumen vier neue Räume abgeleitet, deren Elemente Atome bzw.

Halbatome, bzw. Molekeln genannt werden. Die abgeleiteten Räume werden durch passend gewählte Distanzfunktionen zu halbmetrischen Räumen. Von diesen hat der zweite die Eigenschaft, daß der Abstand von zwei beliebigen Elementen (Atomen) nicht größer als $\frac{1}{2} \pi r$ ist (r eine positive Konstante) und der dritte ist r -diametrisierbar [d. h. für jedes Element a (Halbatom) gibt es mindestens ein b von der Eigenschaft, daß der Abstand zwischen a und b gleich πr ist]. Es zeigt sich, daß die vier abgeleiteten Räume (H, J, S, R) metrische Räume sind, und falls der ursprüngliche JH -Raum endlichdimensional ist, so sind sie metrische vollständige Räume. Im letzten Falle, wenn der Basisraum $(n+1)$ -dimensional ist, sind die abgeleiteten Räume entsprechend kongruent mit einem n -dimensionalen hyperbolischen Raum, mit einem n -dimensionalen elliptischen Raum, mit einem n -dimensionalen sphärischen Raum und mit einem $(n-1)$ -dimensionalen euklidischen Raum. Der letzte Paragraph der Arbeit (von welchem eigentlich der Titel aller drei Arbeiten herkommt) ist dem Zusammenhange gewidmet, der zwischen dem Abstände von zwei linearen Unterräumen und den m Winkeln (m die nicht größere der beiden Dimensionen der Unterräume), die beide Unterräume miteinander einschließen (diese Winkel hat ehemals für den euklidischen Fall P. H. Schoute eingeführt). Dieser Zusammenhang ist für den euklidischen Fall explizit in der Form einer Gleichung zwischen dem Abstände l und den Winkeln φ_i angegeben. *St. Golab.*

Tamássy, Lajos: Über eine Verallgemeinerung der Möbiusschen Kreisgeometrie. Acta Univ. Debrecen. Ludovico Kossuth 2, 137—143 (1955) [Ungarisch mit deutscher Zusammenfassg.]

Betrachtet wird jenes Analogon der Möbiusschen Kreisgeometrie, das sich ergibt, wenn man die absoluten Kreispunkte der Ebene durch zwei reelle Fernpunkte ersetzt. An Stelle der Kreisverwandtschaften tritt hierbei eine sechsgliedrige Gruppe von Hyperbelverwandtschaften, die vermöge der stereographischen Projektion des einschalen Hyperboloids $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ aus dem Punkt $(0, 0, -1)$ mit dessen automorphen Kollineationen zusammenhängt. *W. Wunderlich.*

Longo, Carmelo: Sui fasci di complessi lineari di piani in S_5 . Rend. Sem. mat. Univ. Padova 24, 300—311 (1955).

Verf. untersucht in der vorliegenden Arbeit die projektiven Invarianten einiger wesentlicher Büscheltypen von linearen Ebenenkomplexen des S_5 . In der bekannten Übertragung der Ebenen des S_5 auf die Punkte der Graßmannschen $G_{5,2}$ des S_{19} sind den Komplexbüscheln die S_{17} des S_{19} oder auch, was auf dasselbe herauskommt, die Geraden des S_{19} zugeordnet. Bereits C. Segre hatte die linearen Ebenenkomplexe des S_5 , d. h. die Punkte des S_{19} gegenüber der $G_{5,2}$, in 4 Typen eingeteilt, was hier benötigt wird [vgl. Segre, Ann. Mat. pura appl., III. Ser. 27, 75—123 (1918)]. Diese 4 Typen sind folgende: a) Allgemeiner Typ mit 2 Kernebenen p und q , derart, daß alle p und q gleichzeitig treffenden Ebenen dem Komplex angehören. b) Spezielle Komplexe, bei denen die Ebenen p und q in a) zusammengefallen sind. c) Singuläre Komplexe mit nur einem Zentrum, d. h. einem singulären Punkt von der Art, daß alle Ebenen durch ihn dem Komplex angehören. d) Gesamtheit der eine feste Ebene E treffenden Ebenen, d. h. ein Komplex, für den alle Punkte von E singulär sind. Spannt man jetzt durch 2 allgemeine lineare Komplexe mit insgesamt 4 Kernebenen a, b, c, d allgemeiner Lage ein Büschel auf, so sind für dies Büschel die 3 Treffgeraden u, v, w von a, b, c, d singulär, d. h. alle Ebenen je durch u, v, w gehören allen Komplexen des Büschels an. Dieser allgemeinste Büscheltyp enthält 4 spezielle Komplexe, und die 3 Doppelverhältnisse, welche durch a, b, c, d auf u, v, w bestimmt werden, sind Büschelinvarianten. Der nächste behandelte Büscheltyp ist derjenige, wo die soeben erklärten 4 Ebenen noch verschieden sind, aber nicht nur 3 Treffgeraden besitzen, sondern einen ganzen Regulus von solchen nebst einer dazu fremd liegenden weiteren; eine noch weitere Spezialisierung ist schließlich der Fall, daß a, b, c, d ∞^2 Treffgeraden einer Segreschen $S_{2,1}$ besitzen, die für alle Komplexe des Büschels

singulär sind. Dann wird noch der Sonderfall behandelt, daß 2 der 4 Ebenen a, b, c, d zusammenfallen. Alle bisherigen Büschel besitzen noch keine singulären Punkte, d. h. die ihnen im S_{19} zugeordnete Gerade liegt fremd zu einer gewissen Mannigfaltigkeit von 14 Dimensionen. Am Schluß wird aber auch ein solcher Typ behandelt, wobei es unter den Komplexen des Büschels einen gibt, der zu c) der oben angeführten Segreschen Klassifikation gehört. Für alle behandelten Typen werden durch Annahme geeignet angepaßter Koordinaten kennzeichnende Gleichungen angegeben.

W. Burau.

• Gerretsen, J. C. H.: *La geometria degli aggregati*. Roma: Istituto Matematico dell'Università 1955. 33 p.

Seien S_m und S_n zwei projektive Räume, bezogen auf homogene Hyperebenenkoordinaten ξ_μ ($\mu = 0, 1, \dots, m$) bzw. η_ν ($\nu = 0, 1, \dots, n$). Eine bilineare Beziehung $c^{\mu\nu} \xi_\mu \eta_\nu = 0$ (zu summieren über wiederholte Indizes) definiert dann eine kontravariante Korrelation zwischen S_m und S_n , deren Ausartungsgrad sich nach dem Rang $h + 1$ der Koeffizientenmatrix richtet. Wird S_m als Parameterraum aufgefaßt, dann definiert dieselbe Beziehung einen Unterraum $S_h \subseteq S_n$, bestehend aus den Punkten $y^\nu = c^{\mu\nu} \xi_\mu$ ($\nu = 0, 1, \dots, n$); dieses parametrisierte Gebilde wird „ m -dimensionales kontravariantes Aggregat“ in S_n genannt. Deutet man die $c^{\mu\nu}$ als homogene Punktkoordinaten in einem projektiven Raum von $R = m + n + 1$ Dimensionen, so erfüllen daselbst die Bildpunkte aller Matrizen $(c^{\mu\nu})$ vom Maximalrang $h + 1$ mit $h \leq m, n$ eine gewisse algebraische Mannigfaltigkeit der Dimension $R - (m - h)(n - h)$. Das eingehende Studium dieser mit $[m; n]_h$ bezeichneten, bereits in *Enz. math. Wiss.* III C 7, Abschn. 10 erwähnten Gebilde, die die durch $h = 0$ gekennzeichneten Segreschen Mannigfaltigkeiten umfassen, bildet das Hauptthema. Gleichzeitig werden die dualen Mannigfaltigkeiten $]m; n[_h$ betrachtet, die als Bild der Menge aller kovarianten Korrelationen $\gamma_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = 0$ zwischen S_m und S_n mit einem Rang $\leq h + 1$ oder der entsprechenden „kovarianten Aggregate“ erhalten werden. Eine wichtige Rolle spielt dabei die, durch $c^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} = 0$ erklärte „apolare Lage“ zweier Korrelationen oder Aggregate. Die von diesem Gesichtspunkt aus entwickelte Theorie der in Rede stehenden Gebilde führt zwanglos u. a. auf gewisse projektive Erzeugungen derselben, insbesondere auf zwei durch $[m|n]_h$ und $[n|m]_h$ bezeichnete Erzeugendenscharen der $[m; n]_h$, bestehend aus $\infty^{(h+1)(m-h)}$ linearen $S_{R-(n+1)(m-h)}$ bzw. $\infty^{(h+1)(n-h)}$ $S_{R-(m+1)(n-h)}$. Die Schar $[m|n]_h$ etwa tritt dabei auch als Ort der Scheitel einer dualen Erzeugendenschar $]m|n[_{m-h-1}$ auf. Viele Eigenschaften übertragen sich auf die von einem $S_r \subset S_R$ ausgeschnittenen Gebilde; insbesondere kann der Schnitt einer Schar $]m|n[_0$ mit einem S_r als lineares System von ∞^n m -dimensionalen kovarianten Aggregaten in S_r interpretiert werden (darstellbar durch eine trilineare Beziehung). Unter den hierher gehörigen Resultaten ist eine bemerkenswerte Verallgemeinerung der Schläflischen Doppelsechs hervorzuheben, die auf dem paarweisen Auftreten von Erzeugenden erhöhter Dimension in den Erzeugendenscharen eines Schnittgebildes beruht. Ferner bestehen zwischen gewissen Schnittmannigfaltigkeiten bestimmte birationale Beziehungen, denen sich zahlreiche bekannte Spezialfälle unterordnen lassen, beispielsweise die Abbildung der V_3^2 auf die Ebene nach Clebsch. Hinsichtlich einer ausführlichen Darstellung vgl. man die inzwischen erschienene Dissertation von I. W. van Spiegel (s. dies. Zbl. 77, 146), die sich auf das vorliegende römische Vortragsmanuskript stützt.

W. Wunderlich.

Bompiani, E.: *Sulla varietà rappresentativa degli elementi lineari del piano proiettivo*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 19, 207—212 (1955).

Bompiani, Enrico: *Ancora sulla varietà rappresentativa degli elementi lineari del piano proiettivo*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 19, 361—367 (1956).

Die Gesamtheit der Linienelemente 1. Ordnung E_1 der projektiven Ebene P_2 kann man bekanntlich auf die Punkte einer Mannigfaltigkeit F_3^6 des P_7 abbilden. Diese F_3^6 ist das Minimalmodell unter allen Bildmengen der E_1 des P_2 und als allgemeiner hyperebener Schnitt der Segreschen $S_{2,2}$ (Produkt zweier Ebenen) zu erklären. Verf. gibt nun in den vorliegenden beiden Noten einige weitere Einzelheiten über die Geometrie der F_3^6 und ihre Abbildungseigenschaften an; davon seien folgende erwähnt: 1. F_3^6 wird durch 2 Scharen von je ∞^2 Geraden erzeugt, die je den E_1 mit festem Punkt und fester Geraden entsprechen. 2. Die Geraden aus 1. bilden 2 Scharen von je ∞^2 Normregelflächen 3. Grades $F_{2,2}^3$, deren Punkte je allen E_1 mit Gerade durch einen festen Punkt oder Punkt auf fester Geraden zugeordnet sind. 3. Alle Tangential- T_3 der F_3^6 schneiden sich im allgemeinen in Punkten, und die F_3^6 läßt sich daher durch Schnitt ihrer T_3 mit einem festen A_3 derselben auf die Punkte von A_3 birational beziehen; das abbildende Linearsystem ist eine gewisse ∞^3 -Schar von Flächen 4. Grades. 4. Die einen Kegelschnitt berührenden Linienelemente werden auf die Punkte einer rationalen Normkurve C^4 abgebildet. Die durch die Punkte einer solchen C^4 gehenden erzeugenden Geraden einer Schar bilden eine Regelfläche 6. Grades. 5. Durch 2 allgemeine Punkte A, B auf F_3^6 ist ein Büschel von C^4 (gemäß Nr. 4) bestimmt. Die Schmiegeebenen an diese C^4 im Punkte A oder B bilden je ein Büschel. 6. Die ∞^1 E_1 , deren Punkte auf einem Kegelschnitt k liegen und deren Geraden durch einen Punkt P gehen, werden auf die Punkte einer Normkurve 4. Grades I^4 abgebildet, wenn P nicht auf k liegt. Bei $P \in k$ ist diese Bildmenge eine Normkurve I^3 3. Grades. Die erzeugenden Geraden erster Art durch die Punkte einer solchen I^4 bilden eine Regelfläche, auf der eine C^4 von Nr. 4 Leitkurve ist.

W. Baur.

Longo, Carmelo: Gli elementi differenziali del 2° ordine di S_r . Rend. Mat. e Appl. 13, 335—372 (1955).

Engel [Ber. Verhdl. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, math.-phys. Kl. 54, 17—51 (1902)] und Study [ibid. 53, 338—403 (1901)] haben sich zuerst mit der Konstruktion von Punktmodellen für die Kurvenelemente 2. Grades E_2 der Ebene beschäftigt. Gherardelli (dies. Zbl. 26, 150) und Semple (dies. Zbl. 55, 145) haben diese Fragen aufgegriffen und auf den S_3 ausgedehnt. In der vorliegenden Arbeit werden nun erstmalig alle derartigen Modelle für den S_r konstruiert. Nun sind die Elemente E_2 eines S_r nicht mehr ausnahmslos projektiv gleichberechtigt, wie es die Elemente E_1 erster Ordnung (d. h. Punkt-Gerade in vereinigter Lage) sind. Denn es gibt 1. die sog. Flexionselemente, die den Elementen E_1 eineindeutig zuzuordnen sind, und 2. die sog. Kuspidalelemente, die nur je untereinander gleichberechtigt sind. In der Ebene sind nun die Kuspidalelemente auch durch ein Linienelement, nämlich ihren Ursprung und die Spitzentangente, bestimmt, bei $r \geq 3$ benötigen sie jedoch noch eine Ebene durch die Kuspidualtangente, um festgelegt zu sein, d. h. sie sind den Gesamtheiten Punkt-Gerade-Ebene in vereinigter Lage zugeordnet und nicht zu den Flexionselementen dual wie in der Ebene. Jedes Punktmodell der E_2 des S_r muß demnach je als Teilmenge ein Modell $M_{0,1}$ der Linienelemente und ein solches $M_{0,1,2}$ der Gesamtheiten Punkt-Gerade-Ebene in vereinigter Ebene als Untermengen enthalten. Daher beschäftigt sich Verf. im ersten Teil der Arbeit erst damit, die genannten Modelle $M_{0,1}$ und $M_{0,1,2}$ zu konstruieren (vgl. hierzu auch die Arbeit des Ref., dies. Zbl. 57, 129). Man erhält diese Modelle leicht durch Multiplikation aller Monome der Grade λ und μ der Punkt- und Geradenkoordinaten, bzw. aller Monome der Grade λ, μ und ν in den Punkt-, Geraden- und Ebenenkoordinaten des S_r , wobei außerdem noch die Inzidenzrelationen zwischen den Koordinaten zu berücksichtigen sind. Die Mannigfaltigkeiten seien sinngemäß mit $M_{0,1}^{\lambda,\mu}$ und $M_{0,1,2}^{\lambda,\mu,\nu}$ bezeichnet. Im Falle $\lambda = \mu = 1$, und $\lambda = \mu = \nu = 1$ handelt es sich um die Minimalmodelle. Für alle diese Mannigfaltigkeiten gibt Verf. die Basis an und stellt Ordnungsformeln

auf. Danach werden in Fortsetzung des schon von Study im Falle $r = 2$ beschrittenen Weges Koordinaten für die Elemente E_2 des S_r eingeführt. Diese sind Aggregate $(x^i, u^{ik}, X, U^{ijk})$, wobei x^i die Punktkoordinaten des Ursprungs von E_2 , u^{ik} und U^{ijk} je die Koordinaten der Tangente und der Ebene des Elements bedeuten. ($\varrho x^i, \sigma u^{ik}, \nu \varrho^3 X, \nu \sigma^3 U^{ijk}$) mit nicht verschwindenden Faktoren ϱ, σ, ν soll demselben Element zugeordnet sein. Durch Verschwinden aller U^{ijk} sind die Flexions-elemente gekennzeichnet, bei denen ja die Elementebene unbestimmt ist, durch Verschwinden der Hilfskoordinate X die Kuspidalelemente. Ein von den natürlichen Zahlen λ, m, n abhängiges Modell $W^{\lambda, m, n}$ für die E_2 des S_r erhält man dann in der Parameterdarstellung: $\xi = X^\lambda (x)^m (u)^{n-3\lambda}$, $\eta = (U)^\lambda (x)^{m-3\lambda} (u)^n$. Dabei ist unter den Ausdrücken rechts die Gesamtheit der Produkte aller Momente der in den Klammern stehenden Koordinaten von dem als oberer Index vermerkten Grade zu verstehen. Für $\lambda = m = n = 1$ liegt das Minimalmodell $W^{1,1,1}$ vor. Dies entsteht in folgender Weise: Man nehme je ein Modell $M_{0,1}^{0,4}$ und $M_{0,1,2}^{4,1,1}$ und beachte, daß $M_{0,1,2}^{4,1,1}$ von ∞^{2r-1} Räumen Σ_{r-2} erzeugt wird, die man den E_1 des S_r und damit auch den Punkten der $M_{0,1}^{0,4}$ zuordnen kann. $W^{1,1,1}$ entsteht dann durch Verbinden zugeordneter Punkte und Σ_{r-2} je aus $M_{0,1}^{0,4}$ und $M_{0,1,2}^{4,1,1}$. Durch Anwendung von Basisbetrachtungen wird die Ordnung dieser $W^{1,1,1}$ berechnet. Bereits bei $r = 3$ spannt sie einen S_{659} auf und hat die Ordnung 87570. Betrachtet man die Veronesesche Bildmenge V_r^2 des Systems aller Quadriken des S_r , so hat man in der Gesamtheit aller Schmiegebenen an Kurven auf V_r^2 auch ein Modell für die E_2 des S_r . Doch gilt dabei: 1. Allen Flexionstangenten mit derselben Wendetangente ist dieselbe Kegelschnittebene, 2. allen Kuspidalelementen mit demselben Ursprung und der gleichen Schmiegebene ist auch dieselbe Tangentialebene der V_r^2 zugeordnet. Daher ist dies Modell nicht ausnahmslos eineindeutig. Durch Bildung der Graßmannkoordinaten der genannten Schmiegebenen kommt man jedoch leicht zu dem obigen minimalen Punktmodell.

W. Burau.

Algebraische Geometrie:

● Campedelli, Luigi: *Esercitazioni complementari di geometria*. A cura del Dott. A. Barlotti. 2. ed. Padova: CEDAM Casa Editrice Dott. Antonio Milani 1955. VIII, 420 p., 51 fig. L. 3300.

Cet ouvrage d'exercices de géométrie rendra de grands services à tous ceux qui désirent poursuivre leurs études dans la direction de la géométrie algébrique; un soin particulier est, en effet, apporté par l'A. à tout ce qui traite des singularités trop souvent négligées dans les cours de géométrie analytique; cette étude des points singuliers est abordée tant par les procédés classiques de la géométrie analytique qu'à l'aide de procédés dérivés de notions plus élevées: étude par la méthode du faisceau et par celle des transformations quadratiques, ceci à la fois pour courbes planes, surfaces et courbes gauches. On notera également l'emploi du principe de correspondance dans les recherches de lieu, et l'étude de quelques systèmes linéaires, qui donnera à l'étudiant trop souvent mécanisé dans le pur calcul l'occasion d'exercer intuition et raisonnement. Pour le tracé des courbes est à signaler le recours à des transformations et à quelques notions simples de topologie réelle trop souvent négligées dans cette discipline. Chaque chapitre, outre un rappel substantiel des propriétés utilisées, qui constitue à lui seul un véritable „vade mecum“ du géomètre, comprend de nombreux exercices, entièrement traités, souvent par diverses méthodes; ces exemples permettent ainsi l'étude de très nombreuses courbes et surfaces remarquables qu'un index permet de retrouver, si besoin. La reproduction de certaines surfaces par de magnifiques planches photographiques transforme presque ce livre d'études en livre d'art et rend plus visible le désir de l'A. de réaliser cette „rappresentazione immaginativa, che va dalla visione concreta, a maniera più astratta“.

B. d'Orgeval.

● **Centro Internazionale Matematico Estivo (C. I. M. E.): Teorema di Riemann-Roch e questioni connesse.** (1° Ciclo, Varenna, Villa Monastero, 29 giugno — 8 luglio 1955.) Roma: Istituto Matematico dell'Università 1955. 3 nr.

I. **B. L. van der Waerden**, Démonstration algébrique du théorème de Riemann-Roch (S. 1—31); II. **Francesco Severi**, Del teorema di Riemann-Roch per curve, superficie e varietà. Le origini storiche e lo stato attuale (S. 1—44); III. **F. Hirzebruch**, Arithmetic genera and the theorem of Riemann-Roch (S. 1—11). I. Beweis des R.-R.-Satzes im eindimensionalen Fall, einerseits mit Hilfe der klassischen funktionentheoretischen Methoden, andererseits mit bewertungstheoretischen Methoden nach dem Vorbild von F. K. Schmidt und A. Weil. Der Beweis gilt auch, wenn der Grundkörper K nicht kommutativ ist oder durch eine direkte Summe von Körpern ersetzt wird, d. h. geometrisch gesprochen, für reduzible Kurven. — II. Nach einem kurzen Überblick über den eindimensionalen Fall wird der R.-R.-Satz auf Flächen behandelt mit Berücksichtigung der historischen Entwicklung seit M. Noether (1886), Clebsch, Castelnuovo, Enriques. Es folgen Verallgemeinerungen auf reduzible und virtuelle Kurvensysteme, ferner die viel untersuchten Regularitätskriterien. Wenn man algebraische Äquivalenz zugrunde legt, kennt man befriedigende Sätze nur bei hemiregulären Kurven. Auch die wichtige Frage der Vollständigkeit der charakteristischen Schar eines vollständigen algebraischen Systems ist noch nicht allgemein geklärt. Bei höheren Dimensionen muß zunächst die Frage nach den möglichen Definitionen des arithmetischen Geschlechtes und deren Übereinstimmung beantwortet werden. Wesentliche Resultate bringt hier der nachfolgende Verfasser. Besonders interessant und anzustreben wären Verallgemeinerungen des R.-R.-Satzes auf allgemeine Äquivalenzsysteme. — III. Einleitende Darstellung ohne ausführliche Beweise der Theorie des Verf., die in seinem Ergebnis-Bericht (Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, dies. Zbl. 70, 163) entwickelt wird.

W. Gröbner.

Marchionna Tibiletti, Cesarina: Trece algebriche di curve di diramazione. Costruzioni ed applicazioni. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 24, 183—214 (1955).

Die Chisinische Theorie der algebraischen Zöpfe ist von besonderer Bedeutung für die Untersuchung der mehrfachen Ebenen. Kennt man die Verzweigungszöpfe (oder Windungszöpfe) einer algebraischen Kurve C , auf deren Fäden die Vertauschungen einer entlang C verzweigten mehrfachen Ebene bezeichnet sind, dann sind damit alle birational identischen Flächen F eindeutig festgelegt, die umkehrbar eindeutig der mehrfachen Ebene zugeordnet sind, und man kann von F viele algebraische und topologische Eigenschaften aus dem Zopf ablesen. Verf. gibt die Zöpfe an, die allgemeine Flächen der Ordnung n darstellen. Es ist dann vielleicht möglich, alle Verzweigungskurven zu konstruieren. Jedenfalls gibt es bemerkenswerte Beispiele von Kurven mit vorgegebenen Plückerschen Zahlen. Zunächst wird der Zopf untersucht, der zu den Verzweigungskurven eines gewissen Typus von mehrfachen Ebenen gehört, und die Existenzfrage dieser Ebene wird erledigt. Als weiteres Beispiel wird gezeigt, wie man Flächen gegebener Ordnung konstruieren kann mit einer genügend hohen Anzahl von Doppelpunkten (z. B. die Togliattische Fläche der Ordnung 5 mit 31 Doppelpunkten).

J. C. H. Gerretsen.

Marchionna Tibiletti, Cesarina: Trece relative a forme canoniche del gruppo di monodromia. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 88 (III. Ser. 19), 25—40 (1955).

Von Chisini sind sogenannte kanonische Formen von algebraischen Zöpfen konstruiert worden (dies. Zbl. 16, 414), die zu einer algebraischen Kurve $f(x, y) = 0$ gehören. Aber diese waren auf einige besondere Fälle der Monodromiegruppe der Funktion $y(x)$ beschränkt und außerdem auf Kurven, die nicht durch den unendlich fernen Punkt der y -Achse gehen. Diese Arbeit bedeutet eine Erweiterung und Vervollständigung der Chisinischen Ergebnisse.

J. C. H. Gerretsen.

Marchionna Tibiletti, Cesarina: La irregolarità di un piano multiplo dedotta dalla treccia diramante. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 480—486 (1955).

Es bezeichne T_φ einen Windungszopf einer Verzweigungskurve φ einer mehrfachen Ebene F , d. h. auf den Fäden von T_φ sind die Vertauschungen der Zweige einer von der Ebene repräsentierten algebraischen Funktion $z = z(x, y)$ bezeichnet. In dieser Note zeigt Verf., wie man mit Hilfe des Zopfes die Irregularität der mehrfachen Ebene bestimmen kann.

J. C. H. Gerretsen.

Marchionna, Ermanno: Sulle varietà multiple non lineari. Estensioni del teorema d'Enriques relativo all'esistenza dei piani multipli. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 38, 321—338 (1955).

Verf. bestimmt einige notwendige und hinreichende Bedingungen, damit eine auf einer algebraischen Fläche F liegende Kurve D^* eine Verzweigungskurve sei für eine auf F definierte algebraische Funktion. Enriques hat das Problem mit topologischen Mitteln gelöst für den Fall, daß F eine Ebene ist, und Severi hat das Existenzproblem auf den Fall von mehrfachen Räumen erweitert. — Man betrachte eine algebraische Fläche $F(x, y, z) = 0$ und die dadurch bestimmte algebraische Funktion $z = z(x, y)$, die auf der Ebene eine gewisse Verzweigungskurve Φ besitzt. Es sei $u = u(x, y, z)$ eine μ -wertige algebraische Funktion auf F , mit einer zu F gehörigen Verzweigungskurve D^* . Die Funktion u ist eine $m\mu$ -wertige Funktion von x und y , die mit w bezeichnet wird, d. h. $w = w(x, y) = u(x, y, z(x, y))$. Diese Funktion heißt eine zu u assoziierte vielfache Ebene. Sie besitzt auf der (x, y) -Ebene eine Verzweigungskurve $\Psi = \Phi + D$, bestehend aus der μ -fach gezählten Kurve Φ und der orthogonalen Projektion D von D^* . Es handelt sich um die Bestimmung der Bedingungen, welchen eine Kurve genügen muß, damit die Funktion w und folglich auch u , existiere. Die vom Verf. gefundenen Bedingungen sind natürliche Erweiterungen der Invarianzbedingungen von Enriques. In einem Schlußparagraphen zeigt Verf., daß die Existenz einer vielfachen Verzweigungsmannigfaltigkeit abhängt von der Existenz einer ihrer vielfachen Schnittflächen. Damit wird eine topologische Lösung des Riemann-Hurwitzschen Existenzsatzes einer algebraischen Funktion mit mehreren Veränderlichen gegeben.

J. C. H. Gerretsen.

Canetta, Pietro: Sulla esistenza di una curva piana algebrica di ordine 8 con 14 cuspidi e 2 nodi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 478—480 (1955).

Man weiß nicht, unter welchen Umständen eine algebraische Kurve mit vorgegebenen Plückerschen Zahlen existiert. Jedenfalls sind die Plückerschen Gleichungen keine hinreichenden Bedingungen. R. Apéry (dies. Zbl. 26, 345) hat behauptet, daß es keine Kurve gibt von der Ordnung 8, dem Geschlecht 5 und mit mehr als 13 Kuspidalpunkten. Im Gegensatz zu dieser Behauptung bewies C. F. Manara (dies. Zbl. 42, 152) die Existenz einer derartigen Kurve mit 14 Kuspidalpunkten und zwei Knoten. Mit Hilfe der Chisinischen Theorie der algebraischen Zöpfe bestätigt Verf. das Manarasche Ergebnis.

J. C. H. Gerretsen.

● **Samuel, P.: Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique.** (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Heft 4. Reihe: Algebraische Geometrie.) Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1955. IX, 133 S., DM 23,60.

Vorliegende Monographie ist ein Abriß eines rein-algebraischen Aufbaus der Grundtatsachen der globalen und lokalen Theorie algebraischer Mannigfaltigkeiten über einem beliebigen Grundkörper. — Inhalt: Kap. I (Globale Theorie): Affine und projektive k -Mannigfaltigkeiten V [k = beliebiger Körper, K = algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper von k , V = Lösungsmannigfaltigkeit in einem affinen (projektiven) Raum über K eines (homogenen) Gleichungssystems mit Koeffizienten aus k]; Komponentenzerlegung, k -irreduzible Mannigfaltigkeiten.

Dimension, allgemeiner Punkt, Funktionenkörper; Projektionen, Produktmannigfaltigkeiten; Dimension von Schnittmannigfaltigkeiten, Normalisierung; absolute (absolut-irreduzible) Mannigfaltigkeiten, Grundkörpererweiterungen; „fast überall“ gültige Eigenschaften; Zyklentheorie, Chowse Koordinaten, Korrespondenzen. — Kap. II (Lokale Theorie, Schnittmultiplizitäten): Stellenringe irreduzibler Mannigfaltigkeiten, Dimension und vollständige Hülle von Stellenringen; normale Punkte; Tangentenkegel und Tangentenraum; einfache Punkte (definiert durch die Regularität des Stellenringes) und ihre Charakterisierung; lokale Schnittmultiplizitäten von absoluten Mannigfaltigkeiten $i(C; V \cdot W)$ [definiert durch die Multiplizität von Primäridealen in absoluten Stellenringen mit Hilfe des höchsten Koeffizienten im charakteristischen Polynom]; Rechenkalkül des Symbols $i(C; V \cdot W)$; Kriterien für die Multiplizität 1 und Beziehungen zu anderen Multiplizitätsdefinitionen (Weil, Chevalley); Schnitte von Zyklen, Divisoren von Funktionen; Korrespondenzkalkül. — Das Buch setzt die folgenden algebraischen Vorkenntnisse voraus: Idealtheorie, insbesondere von Polynomringen; allgemeine Spezialisierungstheorie (einschließlich allgemeiner Bewertungsbegriff); tensorielle Produkte kommutativer Algebren, Theorie der Stellenringe einschließlich Multiplizitätstheorie. Der Leser wird in dieser Hinsicht durch einen „Rappel algébrique“ unterstützt, der aber, wie auch die gesamte Darstellung der Schrift, im allgemeinen recht knapp gehalten ist; offensichtlich wendet sich die Monographie hauptsächlich an die Kenner der Materie. Ein kurzer historischer Überblick und ein terminologisches Lexikon (wegen der recht unterschiedlichen Bezeichnungen in den gängigen Lehrbüchern) beschließen das Buch.

E. Lamprecht.

Northcott, D. G.: Analytically biregular mappings. Proc. London math. Soc., III. Ser. 5, 219—237 (1955).

Es sei U eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K , eingebettet in einen m -dimensionalen affinen Raum, also dargestellt durch einen Ring $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_m/\mathfrak{p}$, wobei \mathfrak{p} ein Primideal aus dem Polynomring $\mathfrak{P}_m = K[x_1, \dots, x_m]$ ist; ferner seien $f(x), g(x), \dots \in \mathfrak{P}_m$ und $f(\bar{x}), g(\bar{x})$ die entsprechenden Klassen aus \mathfrak{R} ; $\{\bar{x}_i\}$ bzw. $\{\alpha_i\} = P$ (mit $\alpha_i \in K$) bedeute „den allgemeinen“ bzw. einen festen speziellen Punkt P von U . Der zu P gehörige Stellenring \mathfrak{o} mit dem maximalen Primideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{o} \cdot (\bar{x}_1 - \alpha_1, \dots, \bar{x}_m - \alpha_m)$ besteht aus allen Quotienten $f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})^{-1}$ mit $g(\alpha) \neq 0$. — Eine rationale Abbildung $\Phi_{m,n}$ von U wird definiert durch eine Zuordnung $\{\bar{x}_i\} \rightarrow \{\bar{x}'_k\}$, wobei $k = 1, \dots, n$ und $\bar{x}'_k = f_k(\bar{x}) \cdot f_0(\bar{x})^{-1}$ mit $f(\bar{x}) \neq 0$. Mit U', \dots werde das Bild von U, \dots hinsichtlich $\Phi_{m,n}$ bezeichnet. Ist $f_0(\bar{\alpha}) \neq 0$, so hat P ein eindeutig bestimmtes Bild P' . Für den zugehörigen Stellenring \mathfrak{o}' und sein maximales Primideal \mathfrak{m}' gilt $\mathfrak{o}' \subseteq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{o}'$. Unter der (in Wirklichkeit nur bei einem Teil der Überlegungen unbedingt nötigen) Annahme, daß P auf U , P' auf U' einfach ist, formuliert nun Verf. die für die gesamte Arbeit fundamentale Definition: Die Abbildung $\Phi_{m,n}$ heißt in P biregulär, wenn $\mathfrak{m} = \mathfrak{o} \cdot \mathfrak{m}'$, d. h. $\mathfrak{m} = \mathfrak{o} \cdot (\bar{x}_1 - \alpha_1, \dots, \bar{x}_m - \alpha_m) = (\bar{x}'_1 - \alpha'_1, \dots, \bar{x}'_n - \alpha'_n)$. Es ist wichtig, daß mit Hilfe einer Basis des Primideals \mathfrak{p} und der Polynomquotienten $f_k(x) \cdot f_0(x)^{-1}$ die Biregularität von $\Phi_{m,n}$ in P leicht durch den Rang einer gewissen Matrix über dem Quotientenkörper von \mathfrak{P}_m für $x_i = \alpha_i$ charakterisiert werden kann. Eine erste Anwendung des Biregularitätsbegriffs führt zu dem bemerkenswerten Satz: Ist V eine P enthaltende, irreduzible Untermannigfaltigkeit von U und hat P' in V nur das eine Urbild P , so ist die durch $\Phi_{m,n}$ induzierte Abbildung von V auf V' birational. — Das Hauptergebnis der Arbeit aber ist das folgende Theorem, das in den Rahmen der von A. Weil in seiner Grundlegung der algebraischen Geometrie entwickelten Vielfachheitstheorie gehört: Es seien V und W Untermannigfaltigkeiten von U , T sei eine P enthaltende, irreduzible Komponente des Schnittes $V \cap W$, und zwar sei T

eigentlich, d. h. $\dim V + \dim W - \dim U = \dim T$. Ist nun $\Phi_{m,n}$ in T biregulär und hat P' sowohl auf V als auch auf W nur ein Urbild, so ist T' eine eigentliche Komponente von $V' \cap W'$ und es gilt im Sinne von Weil für die relativen Schnittvielfachheiten von V, W in T bzw. V', W' in T' die Gleichung $i(V \cdot W, T; U) = i(V' \cdot W', T'; U')$ (lokale Invarianz der Schnittvielfachheit bei biregulären Abbildungen). — Eine wichtige Anwendungsmöglichkeit zeigt der Satz: Die Bedingungen für die Anwendbarkeit des Haupttheorems sind bei d -dimensionalem u für $n = d$ sicher erfüllt, wenn $\Phi_{m,d}$ durch eine „nicht spezielle“ lineare Abbildung des m -dimensionalen affinen Einbettungsraumes von U auf einen d -dimensionalen affinen Raum induziert wird. (Der Begriff „nicht speziell“ wird im Anhang genau präzisiert, wo es sich im wesentlichen um den Nachweis handelt, daß P wirklich einziges Urbild von P' .)

W. Krull.

Northcott, D. G.: A note on the genus formula for plane curves. J. London math. Soc. 30, 376—382 (1955).

Die Ergebnisse, die Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 67, 268, im folgenden mit „N.“ zitiert) für beliebige, insbesondere geometrische Stellenringe gewann, wendet er in der vorliegenden Note auf ebene algebraische Kurven über einem beliebigen unendlichen Grundkörper an. Sei C die gegebene irreduzible Kurve vom Grade n , P ein Kurvenpunkt mit dem zugehörigen geometrischen Stellenring Q_P ; $e(Q)$, $B(Q)$ sollen dieselbe Bedeutung haben wie in N. Dann wird, wie aus den Sätzen von N. sofort zu sehen, $\Delta(Q_P) = \sum_{Q \in B(Q_P)} e(Q) (e(Q) - 1)$ für jeden regulären Kurvenpunkt gleich 0, für jeden singulären Kurvenpunkt eine positive ganze Zahl und man erhält auf Grund von N. für das Geschlecht p von C die Formel:

$$(1) \quad p = \frac{1}{2} (n - 1) (n - 2) - \frac{1}{2} \sum \Delta(Q_P).$$

Der Beweis für (1) läuft im wesentlichen parallel dem klassischen Beweis der Geschlechtsformel in der üblichen Form, bei der die „Vielfachheiten eines Punktes und seiner unendlich benachbarten Punkte“ auftreten, die durch Singularitätenauflösung mit Hilfe von quadratischen Transformationen bestimmt werden. Denn die in dem Transformations- und Invarianzsatz von N. auftretenden Transformationen $u_i \rightarrow u_i v^{-1}$ (vgl. oben) entsprechen im Kurvenfall genau den üblichen quadratischen Transformationen. Die moderne algebraisch abgeleitete Formel hat aber den Vorzug, daß sie von vornherein ein invariantes Resultat liefert, während im klassischen Fall die Hauptschwierigkeit darin besteht, zu zeigen, daß das gewonnene Ergebnis nicht von der Wahl der zur Singularitätenauflösung benutzten Transformationen abhängt.

W. Krull.

Igusa, Jun-ichi: On some problems in abstract algebraic geometry. Proc. nat. Acad. Sci. USA 41, 964—967 (1955).

L'A., nell'ambito della geometria algebrica astratta, si è rivolto al problema di trovare una dimostrazione puramente algebrica della completezza della serie caratteristica di un sistema algebrico completo di curve sopra una superficie algebrica. In questo lavoro egli fa vedere come non esista una tale dimostrazione che sia indipendente dal dominio universale rispetto al quale si definisce la superficie: la completezza in questione infatti, ben nota nel caso classico del corpo complesso, cade in difetto nel caso di caratteristica $p \neq 0$. Ciò si dimostra attraverso opportuni esempi di superficie non singolari (prima nel caso di caratteristica $p = 2$, e poi nel caso $p > 2$) aventi gli invarianti $g = 1$, $h^{1,0} = h^{0,1} = 2$, ove g è la dimensione della varietà di Picard della superficie, $h^{1,0}$ è il numero delle forme differenziali lineari di prima specie linearmente indipendenti sulla superficie, $h^{0,1}$ è il massimo della deficienza caratteristica, cioè la deficienza della serie caratteristica del sistema lineare ottenuto per sezione con le ipersuperficie di ordine abbastanza elevato. Gli esempi addotti mostrano pure che non è sempre $g = h^{1,0}$. Resta così avvalorata la precedente di-

mostrazione data dall'Autore (cfr. la recensione seguente) della disuguaglianza $g \leq h^{1,0}$, la quale dunque non può essere sostituita in generale da una uguaglianza.

M. Rosati.

Igusa, Jun-ichi: A fundamental inequality in the theory of Picard varieties. Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 317—320 (1955).

Nell'ambito della geometria algebrica astratta si definiscono due tipi di „irregolarità“ per una varietà algebrica V . Una è la dimensione q della varietà di Picard relativa a V , l'altra è la dimensione $h^{1,0}$ dello spazio delle forme differenziali lineari di prima specie su V (nel caso classico queste due irregolarità sono le dimensioni delle due varietà di Picard costruite a partire da V al modo di Castelnuovo e al modo di Severi ordinatamente). L'A. si occupa della relazione tra q e $h^{1,0}$ dimostrando la disuguaglianza $q \leq h^{1,0}$. Questa disuguaglianza acquista un significato più preciso dopo che l'A. ha dimostrato (in una successiva nota, cfr. la recensione precedente) che essa non può sempre sostituirsi con una uguaglianza, come invece avviene nel caso classico.

M. Rosati.

Benedicty, Mario: Una nuova forma normale per le matrici quasi abeliane. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **18**, 602—608 (1955).

Es handelt sich um eine Arbeit über die Theorie der quasi-Abelschen Funktionen nach Severi (vgl. dies. Zbl. **41**, 482); genauer über die Klassifizierung der quasi-Abelschen Matrizen ω gegenüber der Äquivalenzrelation $\omega' = \alpha \omega A$ (α komplexe nicht ausgeartete Matrix, A ganze unimodulare Matrix), aus der das wichtigste Problem der sog. „teoria aritmetica delle funzioni quasi abeliane“ besteht (vgl. F. Conforto, dies. Zbl. **41**, 367). Der Verf. führt eine neue Normalform einer quasi-Abelschen Matrix ein, die sog. χ -Normalform ($MN\chi$), die sich von der Severischen Normalform (MNS) unterscheidet (die beiden sind aber einander äquivalent), und untersucht weiter die Relationen unter den Elementen einer $MN\chi$ sowie die wichtigsten Eigenschaften einer $MN\chi$, auch bezüglich des vom Verf. schon definierten „gruppo unimodulare ristretto“ (vgl. M. Benedicty, dies. Zbl. **64**, 404). Sind die ganzen Charaktere einer Matrix ω festgehalten, so bilden die $MN\chi$ einen „Bereich“ eines geeigneten Raumes, dessen Dimension in Abhängigkeit von den obigen Charakteren ausgerechnet wird. Daraus werden einige Sätze über die MNS auf die $MN\chi$ übertragen. Endlich betont Verf. die Analogie zwischen seinen Resultaten und einigen der Theorie der Abelschen Funktionen und der Abelschen Modulfunktionen, und formuliert einige Probleme, die einer noch nicht entwickelten „Theorie der quasi-Abelschen Modulfunktionen“ angehören.

M. Rosati.

Cantoni, Lionello: Nuovi tipi di trasformazioni birazionali nella teoria delle varietà abeliane reali. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat. III. Ser. **9**, 207—233 (1955).

S. Cherubino (vgl. dies. Zbl. **6**, 26 und 128; **7**, 77 u. a.) hat die „pseudo-ordinären“ birationalen Transformationen in sich einer quasi-reellen Abelschen oder besser Picardschen Mannigfaltigkeit V_p eingeführt und studiert. Das wird hier verallgemeinert, indem Verf. zunächst die quasi-imaginären Transformationen (q. i. T.) einer V_p vom reellen Typus definiert. Ω sei eine zur V_p gehörige Riemannsche Matrix, welche die Symmetrie $\bar{\Omega} = \Omega \tilde{S}$ und die Hurwitzsche Relation $i \varrho \Omega = \Omega \tilde{T}$ (ϱ reell, S und T ganzzahlig und unimodular) zulasse. Dieser letzteren, d. h. der Matrix T entspricht bekanntlich eine Schar birationaler Transformationen der V_p in sich, das sind die q. i. T.; das Produkt zweier q. i. T. ergibt wieder eine quasi-reelle Transformation im Sinne Cherubinos. Man findet leicht $\bar{\Omega} = -\Omega \tilde{T}^{-1} \tilde{S} \tilde{T}$, d. h. die Riemannsche Homographie T transformiert die Symmetrie S in ihre entgegengesetzte $-\tilde{S}$. Bedeutet $\tilde{M} = (\tilde{m} | \tilde{n})$ eine zur Symmetrie S gehörige „minimale charakteristische“ Matrix (d. h. $\Omega \tilde{m}$ erzeugt alle reellen, $\Omega \tilde{n}$ alle rein imaginären Perioden, $|\tilde{M}| = \pm 1$), $\tilde{M}_1 = (\tilde{n} | \tilde{m})$, (das Studium der Arbeit wäre erleichtert,

wenn Verf. diese Erklärungen selbst gäbe und nicht deren Erschließung aus dem nachfolgenden Entwicklungen dem Leser überließe), so nennt Verf. T semi-ordinär (s. o.), wenn $MT = \pm M_1$; daraus folgt, daß s. o. T. nur bei geradem p existieren können. Aber auch dann bedingt ihre Existenz eine sehr starke Spezialisierung der V_p , weshalb Verf. noch den allgemeineren Begriff bildet: T heißt semi-pseudo-ordinär (s. p. o.), wenn $MT \equiv \pm M_1 \pmod{2}$ gilt. Diese Definitionen hängen nicht nur von der Riemannschen Matrix Ω , sondern auch von der Symmetrie S bzw. von M ab. Im zweiten Teil der Arbeit untersucht Verf. den hyperelliptischen Fall $\Omega = (B, i T)$, $B = \text{Diag } (1, 1/n)$, $T = (\tau_{ik})$, $i, k = 1, 2$, τ_{ik} reell, und sondert diejenigen Fälle aus, in denen s. p. o. T. existieren.

W. Gröbner.

Denniston, R. H. F.: On the topology of the joined point-pairs of an algebraic variety. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 38, 213—223 (1955).

Es sei V eine algebraische Mannigfaltigkeit in einem projektiven Raum. Mit $V * V$ bezeichnet Verf. die Mannigfaltigkeit, deren Elemente die geordneten Punktpaare von V sind und die damit inzidente Gerade. Indem V gewisse Bedingungen auferlegt werden, läßt sich zeigen, daß $V * V$ ein Faserbündel ist, und dieses Ergebnis ermöglicht die Bestimmung der Homologiegruppen der Mannigfaltigkeit $V * V$.

J. C. H. Gerretsen.

Galafassi, Vittorio Emanuele: La parte reale delle rigate astratte reali. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 9, 283—304 (1955).

Dans un travail antérieur (ce Zbl. 47, 147) l'A. a donné des exemples de surfaces algébriques réglées abstraites (birationnellement équivalentes à des surfaces réglées) réelles ayant un nombre arbitraire de nappes. Ici il précise ce résultat en prouvant que, dans toute classe complexe de ces surfaces contenant des surfaces réelles avec des génératrices réelles, il existe des classes réelles ayant un nombre donné arbitraire de nappes.

G. Ancochea.

Spampinato, Nicolò: Rappresentazione in S_5 del piano complesso completo e relativo gruppo di trasformazioni birazionali. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. 22 (94), 249—261 (1955).

Une transformation birationnelle $x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$ étant donnée ($i = 1, 2, 3$), l'A. étudie dans S_5 la correspondance obtenue en partant des équations précédentes et de $y'_i = y_1 \partial f_i / \partial x_1 + y_2 \partial f_i / \partial x_2 + y_3 \partial f_i / \partial x_3$.

L. Godeaux.

Spampinato, Nicolò: La varietà dell' S_{11} determinata da una superficie algebrica dell' S_3 complesso. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. 6, Nr. 3, 9—16 (1955).

L'A. considère dans un S_{11} trois espaces S_3, S'_3, S''_3 indépendants. Une surface F étant donnée dans ces espaces par la même équation, un point P de la surface dans S_3 est associé aux plans tangents aux surfaces de S'_3, S''_3 aux points homologues de P . Ce point et ces deux plans déterminent un espace S_6 dont l'A. étudie le lieu.

L. Godeaux.

Spampinato, Nicolò: Sull'invarianza birazionale dell'intersezione di una falda bidimensionale con una superficie. Ricerche Mat. 4, 126—149 (1955).

L'A. calcule la multiplicité d'intersection d'une nappe particulière de l'espace à trois dimensions complexe et d'une surface à l'origine de la nappe, que cette origine soit un point ou une courbe. Il vérifie l'invariance des résultats pour des transformations birationnelles.

L. Godeaux.

Spampinato, Nicolò: Curve e superficie osculatrici principali, a contatto tri-punto o quadripunto, ad una falda S_3 con l'origine in un punto o in una curva. Giorn. Mat. Battaglini 83 (V. Ser. 3), 157—187 (1955).

Etant donnée une nappe de surface dans l'espace à 3 dimensions, l'A. considère les tangentes, les coniques et les cubiques osculatrices à cette nappe en son origine. Il rencontre ainsi une surface de Steiner osculatrice à la nappe et des systèmes de quadriques.

L. Godeaux.

Spampinato, Nicolò: Involuppo e congruenza della tangenti ai rami di una falda bidimensionale piana o tridimensionale dell' S_3 . Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. 22 (94), 62—66 (1955).

L'A. considère une branche de courbe plane, les coordonnées étant des développements d'une suite de polynômes entiers, rationnels et homogènes en λ, μ , dont les puissances m_0, m_1, \dots vont en croissant. La courbe (A) est obtenue en supprimant tous les termes des développements sauf ceux de degré m_0 ; la courbe (B) en supprimant tous les termes sauf ceux de degré m_1 . L'A. considère le lieu de la droite AB . Extension aux nappes de surfaces de S_3 .
L. Godeaux.

Spampinato, Nicolò: Le falde tridimensionali dell' S_5 determinate dai rami lineari e superlineari di una curva algebrica completa. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. 22 (94), 202—220 (1955).

On prend dans S_5 deux plans S', S'' ne se rencontrant pas, projectifs à un plan S . A un élément de contact (P, p) de S , on fait correspondre dans S_5 le plan déterminé par le point P' homologue de P dans S' et la droite p' homologue de p dans S'' . Aux éléments de contact appartenant à une courbe d'ordre n et de classe m correspond une variété V_{3n+m} . L'A. étudie des nappes de cette variété qui correspondent aux branches de la courbe.
L. Godeaux.

Spampinato, Nicolò: Rappresentazione in S_5 di un fascio di curve e della serie lineare secata su una curva complessa prolungata sul campo biduale. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. 6, Nr. 2, 10—19 (1955).

Les plans qui correspondent aux éléments de contact d'un plan S dans S_5 (voir le rapport précédent) engendrent une variété V_4 . L'A. étudie ce qui correspond dans cette représentation aux séries découpées sur une courbe par les courbes d'un faisceau.
L. Godeaux.

Spampinato, Nicolò: Rappresentazioni complesse di superficie biduali prolungamento di superficie complesse. Ricerche Mat. 4, 30—47 (1955).

A une surface $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ de S_3 , l'A. associe dans S_7 la variété V_5 représentée par l'équation précédente et par $y_1 \partial f / \partial x_1 + \dots + y_4 \partial f / \partial x_4 = 0$. Il considère ensuite la variété V_6 lieu des V_5 associées aux surfaces d'un faisceau. Par ce procédé, il étudie les faisceaux de courbes tracées sur une surface algébrique. Il considère également la représentation des transformations birationnelles de S_3 .
L. Godeaux.

Fadini, Angelo: Le superficie iperellittiche dell' S_3 triduale e la loro rappresentazione complessa. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. 22 (94), 154—160 (1955).

En remplaçant les coordonnées projectives complexes par des nombres à trois unités, l'A. déduit d'une surface hyperelliptique ordinaire une variété à 8 dimensions dans un S_{11} . Certaines équations manquent dans le mémoire.
L. Godeaux.

Spampinato, Nicolò: Sulle falde di Halphen. Ricerche Mat. 4, 191—206 (1955).

L'A. étudie les nappes de surfaces appelées par Halphen „cycle de nappes“ [Ann. Mat., II. Ser. 9, 68—105 (1878)] en utilisant une représentation au moyen d'une algèbre d'éléments à trois unités dont il donne la table de multiplication.
L. Godeaux.

Spampinato, Nicolò: Sulle condizioni di razionalità per una superficie tripotenenziale. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. 22 (94), 75—83 (1955).

L'A. part d'une surface rationnelle de S_3 donnée par sa représentation paramétrique et remplace les coordonnées et les paramètres par des nombres à trois unités dont il donne la table de multiplication. Il étudie les variétés ainsi obtenues au point de vue rationalité.
L. Godeaux.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Kaul, R. N.: Formulae corresponding to Frenet's formulae. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 41, 1292—1304 (1955).

Bezeichne V_n eine Hyperfläche im Riemannschen V_{n+1} , N den Normaleneinheitsvektor, $\delta/\delta S$ die raumkovariante Richtungsableitung längs einer Flächenkurve. Man erhält damit die Formeln $\delta N/\delta S = k_1 T_1$, $\delta T_r/\delta S = k_{r+1} T_{r+1} - k_r T_{r-1}$ ($k_0 = k_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} 0$), wobei die T_k orthogonale Tangentialeinheitsvektoren sind. Es folgen einfache Bemerkungen rein formalen Charakters über die Bedeutung der Konstanz verschiedener Krümmungsgrößen k_r . Ferner wird gezeigt: Aus je zwei der folgenden drei Eigenschaften einer Flächenkurve C folgt jeweils die dritte: $k_1 = 0$ für die berührende Geodätische; die geodätische Krümmung von C ist 0; die Komponente von $\delta N/\delta S$ in Richtung der Kurventangente verschwindet. Es folgen Verallgemeinerungen des Satzes von Joachimsthal und verwandter Ergebnisse der elementaren Flächentheorie. *D. Laugwitz.*

Prvanovitch, Mileva: A field of vectors along a curve of sub-space of a Riemannian space. Srpska Akad. Nauka, Zbornik Radova 43, mat. Inst. 4, 135—143, engl. Zusammenfassg. 143 (1955) [Serbokroatisch].

In einem Riemannschen Raum V_n mit allgemeinen Koordinaten x^i ($i = 1, 2, \dots, n$) hat K. Yano (dies. Zbl. 24, 81, 184; 25, 85) längs der Kurve $x^i = x^i(s)$ einen Vektor $v^i = \delta^3 x^i / \delta s^3 + g_{jk} (\delta^2 x^j / \delta s^2) (\delta^2 x^k / \delta s^2) (\delta x^i / \delta s)$ eingeführt, welcher längs eines geodätischen Kreises in V_n verschwindet [$\delta/\delta s$ bezeichnet die absolute Ableitung längs der Kurve $x^i(s)$]. Nun betrachtet der Verf. den Raum V_n als Unterraum eines Riemannschen Raumes V_m mit allgemeinen Koordinaten y^x ($x = 1, 2, \dots, m$), leitet die Beziehung zwischen dem Vektor v^i und dem entsprechenden Vektor μ^x des umhüllenden Raumes V_m ab und untersucht diese Beziehung. *T. P. Angelitch.*

Saban, Giacomo: Sul teorema dei quattro vertici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 19, 251—258 (1955).

A theorem by B. Segre (this Zbl. 15, 368) states that a skew oval in three space without multiple points, met by a straight line in at most 2 and by a plane in at most 4 points, with continuously varying osculating plane, has four stationary osculating planes. The demonstration of this theorem required some topology. The present paper shows that it is possible, by means of elementary differential geometry, to prove the related theorem that a spherical oval (a closed spherical curve not intersected by its maximal tangent circles) has a stationary osculating plane at least at four points. It is also shown that a closed skew curve of which the binormal indicatrix is a spherical oval has at least 4 helicoidal points (points for which the ratio of curvature to torsion is stationary). Added is a mechanical interpretation of these results. *D. J. Struik.*

Vranceanu, G.: Sur la factorisation de la sphère S_{2p+1} par de grands cercles. Comun. Acad. Republ. popul. Romîne 5, 1425—1428, russ. u. franz. Zusammenfassg. 1427, 1427—1428 (1955) [Rumänisch].

By means of explicit computation, a decomposition space of S_{2p+1} is defined, the elements of the decomposition being great circles. The decomposition space V_{2p} is a simply connected symmetric Riemann manifold, of positive curvature $1/R^2$, where R is the radius of S_{2p+1} , and has a group of motions depending on $2p + p^2$ parameters. *T. Ganea.*

Hua, Loo-Keng: On the estimation of the unitary curvature of the space of several complex variables. Sci. Sinica 4, 1—26 (1955).

Gekürzte Übersetzung der in diesem Zbl. 58, 157 besprochenen Arbeit des Verf.

Dalla Volta, V.: Varietà totalmente geodetiche nello spazio delle matrici simmetriche. Rend. Mat. e Appl. 13, 294—334 (1955).

Im Raum von Siegel-Hua hat Verf. zahlreiche Resultate der Differentialgeometrie aufgefunden (dies. Zbl. 58, 158); später hat er einige Resultate über die totalgeodätische Mannigfaltigkeit in demselben Raum in einem Vortrag (dies. Zbl. 66, 161) mit demselben Titel wie die vorliegende Arbeit angegeben. Diese liefert nun die Beweise der Resultate des Vortrags. Im ersten Teil wird der Satz bewiesen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich für eine Richtung der Invarianten λ_j eine totalgeodätische charakteristische Fläche konstruieren läßt, ist, daß $\lambda_j = 0$ für $1 \leq j \leq q$, $\lambda_j = 1/\sqrt{p-q}$ für $q < j \leq p$, wobei q irgendeine positive ganze Zahl zwischen 0 und $p-1$, beide Grenzen einschließend. Die Fläche hat negative konstante Krümmung $-1/(p-q)$. Es ergeben sich p Familien von totalgeodätischen charakteristischen Flächen; zwei Flächen derselben Familie werden immer mittels der Gruppe G aufeinander transformiert, aber je zwei Flächen der verschiedenen Familien nicht. Dann stellt Verf. die Beweise der weitreichenden und ins einzelne gehenden Ergebnisse über die totalgeodätischen charakteristischen Flächen (oder Mannigfaltigkeiten) von besonderen Dimensionen zusammen. Im zweiten Teil wird die euklidische totalgeodätische Mannigfaltigkeit betrachtet und auf die Verallgemeinerungen eingegangen.

A. Kawaguchi.

Kuiper, Nicolaas H.: On C^1 -isometric imbeddings. I, II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 545—556, 683—689 (1955).

Die Arbeit beschäftigt sich mit dem Zusammenhang, der zwischen einer C^k -Einbettung eines Riemannschen Raumes V_n in einen euklidischen Raum E_N und einer C^k -isometrischen Einbettung desselben Raumes existiert. Es handelt sich um die Weiterführung der Ergebnisse von J. Nash in dieser Richtung (dies. Zbl. 58, 377), besonders um die Entscheidung einer in der zitierten Arbeit gestellten Frage, ob für $k=1$ und $N=n+1$ der entsprechende Satz richtig ist. Der Hauptsatz des ersten Teiles der Arbeit lautet: Wenn ein kompakter Riemannscher Raum V_n eine C^1 -Einbettung in einen euklidischen Raum E_N besitzt, wo $N \geq n+1$ ist, so besitzt er eine C^1 -isometrische Einbettung in E_N . Die Beweismethode ist im wesentlichen ähnlich der Methode von Nash und beruht auf der Konstruktion einer unendlichen Folge von C^∞ -Einbettungen, welche der gesuchten C^1 -isometrischen Einbettung zustreben. Die Betrachtungen des Verf. benötigen jedoch mehr Geschicklichkeit als diejenigen von Nash. Im zweiten Teile der Arbeit betrachtet der Verf. die Einbettungen einer nicht (notwendig) kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit V_n in einen euklidischen E_N . Hier werden einige neue Begriffe eingeführt, und zwar der einer verkürzbaren Einbettung [J. Nash hat früher den Begriff einer kurzen Einbettung (short imbedding) eingeführt] und eines Grenzpunktes der Einbettung. Ein Punkt $u \in E_N$ heißt ein Grenzpunkt der Einbettung f , wenn $f(x_i) \rightarrow u$, während die Folge x_i in V_n divergent ist. Die Menge von Grenzpunkten der Einbettung f soll mit $U(f)$ bezeichnet werden. Eine Einbettung f , für welche $f(V_n) \cap U(f) = \emptyset$ ist, sei kurz mit V -Einbettung bezeichnet. Nachdem ein kurzer Beweis eines Hilfssatzes von Nash gegeben worden ist, beweist Verf. den Hauptsatz des zweiten Teiles, der lautet, daß, wenn ein V_n von der Klasse C^∞ eine $C^\infty V$ -Einbettung in einen E_N zuläßt, er auch eine kurze $C^\infty V$ -Einbettung in einen E_{N+1} besitzt. Der nächste Satz besagt, daß, wenn ein offener V_n von der Klasse C^∞ eine kurze $C^\infty V$ -Einbettung in einen E_N zuläßt, er auch eine C^1 -isometrische V -Einbettung in E_N besitzt. Am Ende werden zwei Schlußfolgerungen gezogen, von denen die zweite die Einbettung des hyperbolischen Raumes in einen euklidischen betrifft. Ein n -dimensionaler hyperbolischer Raum H_n besitzt immer eine C^1 -isometrische V -Einbettung in einen E_{n+1} (nach Hilbert ist es unmöglich, die hyperbolische Ebene H_2 in einen euklidischen E_3 C^1 -isometrisch einzubetten).

St. Golab.

Ishihara, Shigeru: Homogeneous Riemannian spaces of four dimensions. J. math. Soc. Japan 7, 345—370 (1955).

K. Yano hat eine Reihe wichtiger Sätze über Bewegungsgruppen in Riemannschen Räumen bewiesen (vgl. dies. Zbl. 51, 393), bei denen allerdings die 4-dimensionalen Räume meistens ausgeschlossen sind. Verf. bestimmt nun mittels der Cartanschen Methode die topologische Struktur der 4-dimensionalen homogenen Riemann-Räume, also jener, die eine transitive Bewegungsgruppe gestatten. Hierzu werden zunächst alle 8 Typen von Untergruppen der eigentlichen orthogonalen

Gruppe $R(4)$ hergeleitet (§ 1) und die allgemeinen Cartanschen Methoden zur Bestimmung homogener Riemann-Räume skizziert (§ 2). Der § 3 enthält mit der erwähnten Klassifikation das Hauptergebnis: Ein einfach-zusammenhängender 4-dimensionaler homogener Riemann-Raum ist homöomorph zu einer der folgenden sechs Mannigfaltigkeiten $E^4, S^4, P(C, 2), S^2 \times S^2, E^1 \times S^3, E^2 \times S^2$, wobei $E^n, S^n, P(C, n)$ jeweils den n -dimensionalen euklidischen, sphärischen und komplexen projektiven Raum bedeuten. Im § 4 werden jene Fälle untersucht, die in den zitierten Sätzen von K. Yano ausgeschlossen sind. Ferner gibt Verf. eine vollständige Klassifizierung der 4-dimensionalen homogenen Riemann-Räume mit kompakter Fundamentalgruppe (§ 5). Diese liefert schließlich auch die Struktur der 2-dimensionalen homogenen Kähler-Räume mit kompakter Fundamentalgruppe (§ 6). — Vgl. auch nachstehendes Referat.

W. Barthel.

Obata, Morio: On n -dimensional homogeneous spaces of Lie groups of dimension greater than $\frac{1}{2}n(n-1)$. J. math. Soc. Japan 7, 371—388 (1955).

Im Anschluß an K. Yano (vgl. dies. Zbl. 51, 393) bestimmt Verf. die Lie-Gruppen von höherer Dimension als $\frac{1}{2}n(n-1)$, welche als Bewegungsgruppen n -dimensionaler Riemann-Räume auftreten können, und untersucht die differentialgeometrische und topologische Struktur dieser Räume. Bezeichnet man mit C_+^n, C_-^n, C_0^n jeweils einen n -dimensionalen Riemann-Raum, der positive bzw. negative konstante Krümmung besitzt bzw. lokal eben ist, und mit E^n, S^n einen n -dimensionalen euklidischen bzw. sphärischen Raum, so lassen sich die Hauptergebnisse folgendermaßen formulieren: Es sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe der Dimension r und H eine kompakte Untergruppe der Dimension $r-n$. (A) Für $r \geq \frac{1}{2}n(n+1)$ ($n \geq 2$) ist dann der homogene Raum G/H einer der folgenden Räume: C_+^n homöomorph S^n (wenn er einfach zusammenhängend ist), C_-^n homöomorph E^n , C_0^n homöomorph E^n . (B) für $\frac{1}{2}n(n+1) > r > \frac{1}{2}n(n-1)$ ($n \geq 3, n \neq 4$) muß $r = \frac{1}{2}n(n-1) + 1$ sein, und der homogene Raum G/H hat dann eine der folgenden Strukturen: $C_0^1 \times C_+^{n-1}$ homöomorph $E^1 \times S^{n-1}$ (wenn er einfach zusammenhängend ist), $C_0^1 \times C_-^{n-1}$ homöomorph E^n oder $S^1 \times E^{n-1}$, C_0^n homöomorph E^n oder $S^1 \times E^{n-1}$, C_-^n homöomorph E^n . — Von den bei K. Yano ausgeschlossenen Fällen $n=4$ und $n=8$ ist jetzt letzterer mit erfaßt, während der erste von Ishihara behandelt wurde (vgl. vorstehendes Referat).

W. Barthel.

Ishihara, Shigeru: Groups of isometries of pseudo-Hermitian spaces. II. Proc. Japan Acad. 31, 418—420 (1955).

Diskussion einiger im ersten Teil dieser Arbeit (vgl. dies. Zbl. 58, 159) unberücksichtigt gelassener Ausnahmefälle.

W. Barthel.

Schouten, J. A. and K. Yano: On pseudo-Kählerian spaces admitting a continuous group of motions. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 565—570 (1955).

A motion on an almost complex space is an automorphism, if it leaves invariant the bivector defining the structure. Given in a pseudo-Kähler space a vectorfield u_i and a motion $v^x dt$, it is proved that for pseudo-analytic u_i the field $\mathcal{L}_r u$ is pseudo-analytic, if and only if the motion is an automorphism. If the dimension of the space is $2n$, n odd, and the space is irreducible, then every infinitesimal motion is an automorphism. This strengthens a result of Liehnérowicz (this Zbl. 56, 412).

H. Guggenheimer.

Schouten, J. A. and K. Yano: On the geometrical meaning of the vanishing of the Nijenhuis tensor in an X_{2n} with an almost complex structure. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 133—138 (1955).

A geometric interpretation is given for the integrability condition of an almost complex structure.

H. Guggenheimer.

Schouten, J. A. and K. Yano: On invariant subspaces in the almost complex X_{2n} . Nederl. Akad. Wet., Ser. A 58, 261—269 (1955).

Based on the paper reviewed above, the authors consider the following problem: In an almost complex X_{2n} , the complex structure in the tangent space may be represented by the choice of tangent E_2 's, each giving one complex vector. In any point, there exist n such independent E_2 's. Now suppose that there exists in every point an invariant E_{2m} built from the E_2 's. An X_{2m} in X_{2n} is called invariant if its tangent E_{2m} in every point is invariant under the complex structure. It is shown: such an invariant X_{2m} has all the properties of pseudo (almost Hermitian) Kählerian structure belonging to X_{2n} , as the case may be. Moreover it is minimal in an almost Kählerian space (symplectic) space.

H. Guggenheimer.

Kuiper, Nicolaas H. and Kentaro Yano: On geometric objects and Lie groups of transformations. Nederl. Akad. Wet., Ser. A 58, 411—420 (1955).

Zunächst wird der von Haantjes und Laman eingeführte Begriff eines Faserbündels von geometrischen Objekten neu formuliert und zwar mit Hilfe der Ehresmannschen Projektionen. Die Gruppe G des Bündels ist hier die Liesche Gruppe der analytischen Transformationen eines analytischen Raumes. Nicht jedes Faserbündel stellt ein Bündel von geometrischen Objekten dar. Das Problem der Charakterisierung der Objektbündel zwischen den Faserbündeln steht noch offen. Im § 2 betrachten die Verf. die Prolongationen (prolongement im Sinne von Ehresmann) der Transformationen im Basisraum X auf das Faserbündel B und beweisen die Eindeutigkeit einer solchen Prolongation. Im § 3 wird der Hauptsatz formuliert über die Objektbündel B mit Basisraum H , wo H der Gruppenraum der Lieschen Transformationen ist. Als Anwendung dieses Hauptsatzes werden die Folgerungen abgeleitet über die linksinvarianten Felder von geometrischen Objekten einer n -dimensionalen Lieschen Gruppe. Der nächste § befaßt sich mit der transitiven Gruppe der Transformationen der Klasse C^∞ und führt zu einem Satz, welcher in vier Fällen (eines Riemannschen Raumes, eines affin zusammenhängenden Raumes, eines Kählerschen Raumes und eines Raumes mit einer fast komplexen Struktur) eine Abschätzung $N \leq N^0$ für die Dimension N der Strukturgruppe angibt. Im Falle $N = N^0$ sind die vier erwähnten Räume von bestimmter Art. Im letzten § ist der Begriff des Lieschen Differentials und der Lieschen Ableitung eines Feldes von Objektbündeln in bezug auf die gegebene Liesche Gruppe formuliert. Die Liesche Ableitung eines Objektfeldes ist wiederum ein Objektfeld. Der Hauptsatz dieses § behauptet, daß ein C^r -Objektfeld ($r \geq 1$) bei den Prolongationen einer Lieschen Gruppe H von Transformationen dann und nur dann invariant ist, wenn sein Liesches Differential in bezug auf H identisch verschwindet. S. Golab.

Cossu, Aldo: Sulle connessioni tensoriali integrabili. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 19, 258—264 (1955).

On sait qu'étant donné un système de n vecteurs contrevariants (covariants) indépendants, ils déterminent un système de n congruences indépendantes et on peut définir un parallélisme absolu, ou bien une connexion affine intégrable, en considérant deux vecteurs dans des points $P(x^i)$ et $Q(x^i + dx^i)$ comme parallèles s'ils ont les mêmes composantes par rapport au système de congruences dans P et Q . L'A. montre que cette propriété peut s'étendre à une connexion tensorielle au sens de Bompiani. Pour cela on considère n^2 champs de tenseurs doublement contrevariants $X_{\alpha\beta}^{ik}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$) à déterminant $|X_{\alpha\beta}^{ik}|$ différent de zéro et l'on définit les n^2 champs covariants $X_{ik}^{\alpha\beta}$ par les formules

$$X_{\alpha\beta}^{ik} X_{hl}^{\alpha\beta} = \delta_h^i \delta_l^k, \quad X_{\alpha\beta}^{ik} X_{ik}^{\rho\sigma} = \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma$$

où δ est le delta de Kronecker. Cela fait, on dit que $\xi^{\alpha\beta} = \xi^{ik} X_{ik}^{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur ξ^{ik} par rapport au système de n^2 tenseurs $X_{\alpha\beta}^{ik}$ et si les $\xi^{\alpha\beta}$ sont des constantes, le tenseur ξ^{ik} se transporte par parallélisme par rapport à la connexion

tensorielle intégrable défini par les formules

$$L_{rst}^{ik} = (\partial X_{rs}^{\alpha\beta} / \partial x^t) X_{\alpha\beta}^{ik} = -(\partial X_{\alpha\beta}^{ik} / \partial x^t) X_{rs}^{\alpha\beta}.$$

On considère le cas où les champs de tenseurs sont donnés par le produit de deux systèmes de n vecteurs contrevariants $X_{\alpha\beta}^{ik} = \xi_{\alpha}^i \eta_{\beta}^k$. On considère enfin certaines propriétés du tenseur de courbure d'une connexion tensorielle non intégrable.

G. Vranceanu.

Pisareva, N. M.: Über das gebrochen-quadratische Integral der geodätischen Linien eines Raumes von affinem Zusammenhang. Mat. Sbornik, n. Ser. **36** (78), 169—200 (1955) [Russisch].

The first part of the paper refers to the two dimensional spaces of affine connection. Here the basic ideas and facts of the theory of the nets of the non metric spaces of affine connection are fundamentally taken advantage of. That theory was systematically worked out by A. P. Norden. The first chapter contains the proofs of a number of theorems explaining the connection of the fractional quadratic integral of geodesics with the geodesic and special nets of a given space. The second chapter deals chiefly with the search for spaces of affine connection of which the geodesics permit the first fractional quadratic integral. At the same time is proved a generalization of the well known Darboux theorem on the geodesic correspondence of surfaces. In the conclusive part of the chapter are given some particular cases of affine connection spaces allowing the fractional quadratic integral of geodesics. The second part of the paper deals with multidimensional spaces of affine connection. Making use of the notion of the geodesic field of cones the author extends the results obtained for the fractional quadratic integral of geodesics in two dimensional spaces over multidimensional spaces.

W. Wrona.

Yano, Kentaro: On three remarkable affine connexions in almost Hermitian spaces. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **58**, 24—32 (1955).

An almost hermitian structure is given by a tensor field F_i^h , $F_j^h F_i^j = -\delta_i^h$, and an invariant metric: $F_i^l F_l^k g_{ik} = g_{ih}$. A connexion intrinsically connected with this structure should satisfy $\nabla_j g_{ih} = \nabla_j F_{ih} = 0$. Connecting this with the Christoffel symbols of g_{ik} by $\Gamma_{ji}^h = \{\overset{h}{ji}\} + T_{ji}^{\cdot h}$, the author shows that the above conditions do not wholly determine T , but that one additional linear condition may be imposed. N_{hij} , being the Nijenhuis tensor (A. Nijenhuis, this Zbl. **42**, 160; Eckmann-Frölicher, this Zbl. **42**, 405), one gets e. g. from $'T_{j(ih)} = 0$: $T_{jih} = \frac{1}{4} N_{hij} - \frac{1}{2} F_{ih}^l F_{jl}^l$, where $F_{ijh} = 3 \partial_{[j} F_{i]h}$, $'T_{ijh} = T_{ijl} F_h^l$. Two other similar conditions are worked out, with characterizations of pseudo-hermitian and pseudo-kählerian structures in terms of the new tensors.

H. Guggenheimer.

Schouten, J. A. and K. Yano: On an intrinsic connexion in an X_{2n} with an almost hermitian structure. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **58**, 1—9 (1955).

It is shown that in an almost Hermitian structure there exists always one and only one metric connexion with $\nabla_i F_{jk} = 0$ (see the paper by the second author reviewed above), and admitting infinitesimal parallelograms in the real invariant two-directions. This is a new condition admissible according to the paper by Yano, that leads to a rather complicated tensor T_{ijk} . For the pseudo-Kähler case, results of Eckmann (this Zbl. **53**, 119) are reobtained. Geometric interpretations are given for the connexions introduced by Yano, e. g. the third one is such that the auto-parallel of the connexion are the geodesics of the Hermitian metric. (For the special case of complex analytic structure, such characterizations appear in Martinelli, see this Zbl. **53**, 297).

H. Guggenheimer.

Kobayashi, Shōshichi: Espaces à connexions affines et riemanniennes symétriques. Nagoya math. J. **9**, 25—37 (1955).

Le but de l'article est de préciser certains résultats de la théorie des variétés à connexion affine localement réductive ou localement symétrique. L'A. rappelle d'abord la notion d'espace fibré soudé à une variété V et la notion d'espace à connexion de Cartan. Ainsi une connexion affine est une connexion de Cartan dans l'espace fibré $T(V)$ des vecteurs tangents à V , qui est soudé à V . Il définit ensuite les variétés à connexion affine localement réductive et localement symétrique et donne deux caractérisations des premières. H' étant l'espace fibré principal des repères affines, H^0 le sous-espace formé des points de H' qui peuvent être joints à un point fixe de H' par un chemin horizontal, la connexion peut être réduite à une connexion dans H^0 . L'ensemble $A(H^0)$ des transformations laissant invariante la connexion dans H^0 est un groupe de Lie qui s'identifie à une sous-variété fermée régulière de H^0 . L'A. démontre alors que si la connexion est localement réductive complète et si V est simplement connexe, $A(H^0)$ s'identifie à H^0 . En particulier un espace de Riemann localement symétrique complet et simplement connexe est globalement symétrique. L'article se termine par quelques exemples et une bibliographie sommaire.

Bénabou.

Sen, R. N.: On pairs of teleparallelisms. II. J. Indian math. Soc., n. Ser. 19, 61—71 (1955).

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 51, 133) hatte Verf. neben den 3-dimensionalen Riemann-Räumen konstanter positiver Krümmung mit dem Cliffordschen Rechts- und Linksparellismus einen weiteren Typ 3-dimensionaler Riemann-Räume angegeben, die ein Paar von Fernparallelismen besitzen. Verf. untersucht jetzt diese beiden Raumtypen vom Standpunkt der infinitesimalen Transformationen.

W. Barthel.

Šapiro, Ja. L.: Geodätische Richtungsfelder und projektive Systeme von Wegen. Mat. Sbornik, n. Ser. 36 (78), 125—148 (1955) [Russisch].

In the first part of the paper is given a definition of the geodesic field of directions and some conditions are derived, which satisfy the vector fields defining it. In the second part the notion of the included (projective) system of paths is being introduced and its connection with the geodesic field of directions established. At the same time the sufficiency of the formerly obtained necessary conditions for the field defining vectors is being proved. The third part is devoted to the investigation of Riemannian spaces containing geodesic fields of directions. Some applications are given in the fourth part. The results obtained in the third part, as is shown in the paragraphs 1 and 2, allow to get immediately the metric of the subprojective and general subprojective spaces. Next is being established the connection with the generalized projective geometry of H. Weyl. Finally the above method is being applied to the foundations of the relativistic theory of the centrally-symmetric gravitation field.

W. Wrona.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Haantjes, J. and R. Nottrot: Distance geometry. Directions in metric spaces. Torsion. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 405—410 (1955).

Contributing to the development of metric differential geometry the authors introduce the notions of direction and torsion in a complete locally convex metric space M which satisfies the following property: for each $p_0 \in M$ and $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that $p_i p_j < \delta$, ($i = 1, 2, 3$), implies

$$D(p_0, p_1, p_2, p_3) \prod_{i=1}^3 D(p_0, p_i) > -\varepsilon,$$

D denoting the Cayley-Menger determinant. A T -set at p_0 is a subset C of M with p_0 as accumulation point such that for $p_i, p_j \in C$ and $p_i, p_j \rightarrow p_0$ we have

$$\lim [(p_0 p_i)^2 + (p_0 p_j)^2 - (p_i p_j)^2] / 2 (p_0 p_i) (p_0 p_j) = 1.$$

Introduction of the notion of angle between T -sets leads to the definition of „directions“ at p_0 , viz. classes of T -sets with zero angle. If angles are considered as distances the set of all directions at p_0 constitutes a metric space N_1 . Identification of opposite directions, which is justified by the theorem that a direction at p_0 of an arc C is the limit of the directions of segments $S(p_0, p(t))$, $p(t) \in C$, yields another metric space N_2 of the tangents at p_0 . The tangents of the segments $S(p_0, p(t))$ constitute an arc C' in N_2 for which the tangent of C at p_0 is an accumulation point. Now torsion of C at p_0 is defined to be $\frac{3}{4} \kappa \varrho$ where κ and ϱ are the metric curvatures of C and C' resp. This definition is shown to be in accordance with the classical one in Riemannian space. This is the last paper of the first author, J. Haantjes, who died February 8, 1956.

J. J. Seidel.

Skornjakov, L. A.: Die Metrisation der projektiven Ebene in Zusammenhang mit einem gegebenen Kurvensystem. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **19**, Nr. 6, 471—482 (1955) [Russisch].

Die vorliegende Arbeit schließt sich eng an das in Deutschland vermutlich schwer zugängliche Buch von Busemann „Metric methods in Finsler spaces and the foundations of geometry“ (London 1942) an. In diesem Werke war gezeigt worden: Ein zweidimensionaler metrischer Raum R mit kompaktem Abschluß jeder beschränkten Menge, wobei zwei Punkte durch nicht mehr als eine geodätische Linie (d. h. lokal kürzeste) verbindbar sind, ist entweder homöomorph zu einer euklidischen Ebene oder zu einer reellen projektiven Ebene, je nachdem ob die geodätischen Linien zu offenen Intervallen oder zu Kreisen homöomorph sind. Für den ersten Fall war in Busemanns Buch auch eine Umkehrung dieses Satzes bewiesen worden. Das gleiche wird in der vorliegenden Arbeit für den zweiten Fall geleistet. Genauer gesagt wird darin folgender Satz gezeigt: Wird in der reellen projektiven Ebene Π ein System Σ geschlossener Kurven vorgegeben, das zusammen mit den Punkten von Π eine sogenannte abstrakte projektive Ebene bildet, so kann man in Π eine Metrik $d(A, B)$ mit folgenden Eigenschaften einführen: 1. Es gilt stets $d(A, B) \leq 1$; 2. Bei $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ gehören A, B, C einer Kurve des Systems Σ an. 3. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein δ mit $0 < \delta < \varepsilon$ derart, daß für die Punkte A, B mit $d(A, B) < 1$ ein wohlbestimmter Punkt B_δ existiert, der $d(A, B) + d(B, B_\delta) = d(A, B_\delta)$ und $d(B, B_\delta) = \delta$ erfüllt. Dieser Satz verlangt zu seinem Beweis den eines anderen, der folgendermaßen lautet: In einer offenen Kreisscheibe S vom Radius R sei ein System von Kurvenbögen vorgegeben, deren Endpunkte auf dem Rande von S liegen, derart daß diese Bögen zusammen mit den Punkten von S eine abstrakte Euklidische Ebene im Sinne von Busemann (s. das oben erwähnte Buch p. 117) bilden, wobei Parallelität der Bögen ihr Schneiden auf dem Rande von S bedeutet. Dann läßt sich S so metrisieren, daß stets gilt: 1. $\delta(A, B) < 2R$, 2. für 3 Punkte A, B, C auf einem Bogen der Schar und nur dann gilt: $\delta(A, B) + \delta(B, C) = \delta(A, C)$, 3. Sind A_n^1 und A_n^2 zwei gegen den Rand von S konvergierende Punktfolgen, so gilt $\lim \delta(A_n^1, A_n^2) = 0$ oder $= 2R$, je nachdem ob sie gegen den gleichen oder gegen verschiedene Punkte konvergieren, 4. $\lim \delta(B, A_n) < 2R$, wenn B fest ist und A_n gegen den Rand konvergiert. — Der Beweis der genannten beiden Hauptsätze ist nicht ganz einfach und stützt sich auf insgesamt 12 Hilfssätze, die hier aber nicht wiedergegeben werden können.

W. Burau.

Petty, C. M.: On the geometry of the Minkowski plane. *Rivista Mat. Univ. Parma* **6**, 269—292 (1955).

Im Anschluß an die grundlegenden Arbeiten von H. Busemann über n -dimensionale Minkowski-Geometrie löst Verf. für die Minkowski-Ebene eine Reihe von Problemen, deren Behandlung in höheren Dimensionen teilweise auf große Schwierigkeiten stößt. — Die Indikatrix U der Minkowski-Ebene sei eine geschlossene konvexe Kurve mit Mittelpunkt. In dieser Ebene kann nach Busemann ein Minkowskischer Flächeninhalt definiert werden (vgl. dies. Zbl. **40**, 375—378). Die von Busemann

eingeführte Isoperimetrix T , d. h. jene Lösungskurve des isoperimetrischen Problems, deren doppelter Flächeninhalt gleich ihrem Umfang ist, stellt wieder eine konvexe Mittelpunktskurve dar (vgl. dies. Zbl. 34, 252). Zunächst wird der Minkowskische Flächeninhalt der Isoperimetrix abgeschätzt; $8/\pi \leq |T| \leq \pi$. Dabei gilt das erste Gleichheitszeichen nur, wenn U ein Parallelogramm ist, und das zweite nur in der euklidischen Geometrie. Weiter spielt in der Minkowski-Ebene die Funktion $\alpha(\omega)$ eine wichtige Rolle, die den maximalen Flächeninhalt jener Parallelogramme mit Minkowskischer Seitenlänge 1 angibt, deren eine Seite die Richtung ω hat. Nach Busemann ist $\frac{1}{4}\pi \leq \alpha(\omega) \leq \frac{1}{2}\pi$, wobei die Gleichheitszeichen nur gelten, wenn U ein Parallelogramm ist (vgl. dies. Zbl. 40, 241). Verf. beweist nun $\max \alpha(\omega) \geq 1$, wo das Gleichheitszeichen nur in der euklidischen Geometrie steht, und $\min \alpha(\omega) \leq \frac{1}{3}\pi$, wobei Gleichheit nur gilt, wenn U ein regulär affines Sechseck ist. Im letzten Fall ist $\alpha(\omega) = \text{const}$, eine Bedingung, die für Radon-Kurven als Indikatrix U kennzeichnend ist. Beim Beweis der letzten Ungleichung wird zum Teil der Satz von St. Gołab über die Länge der Indikatrix, $6 \leq L(U) \leq 8$, benutzt, der bereits mehrfach ohne Kenntnis der früheren Arbeiten bewiesen wurde (vgl. St. Gołab, dies. Zbl. 6, 320; Ju. G. Rešetnjak, dies. Zbl. 52, 183 und D. Laugwitz, dies. Zbl. 57, 144). Schließlich wird noch eine Interpretation von $\min \alpha$ ($\max \alpha$) in Termen eines U umschriebenen (eingeschriebenen) Viereckes von minimalem (maximalem) Flächeninhalt gegeben. — Mit differentialgeometrischen Methoden leitet Verf. eine geometrische Konstruktion der Kurve V mit konstanter Minkowski-Krümmung $\kappa = 1$ her. V ist notwendig eine konvexe Mittelpunktskurve und für ihre Länge und ihren Flächeninhalt gilt $L(V) = 2\pi$ bzw. $|V| \geq \pi$, wo Gleichheit nur in der euklidischen Geometrie besteht. Weder Indikatrix noch Isoperimetrix haben konstante Minkowski-Krümmung. — Für eine Differentialgeometrie der ebenen Kurven führt Verf. drei Krümmungen κ_i ein, indem er jeweils V , T oder U als sphärisches Bild benutzt. Sodann werden die Frenetschen Formeln hergeleitet und die Charakterisierungen der Kurven durch ihre Krümmungen ausführlich untersucht. Für die Minkowski-Krümmung $\kappa = |\kappa_1|$ wird der Vierscheitelsatz bewiesen. W. Barthel.

Borisov, Ju. F.: Die Geometrie der Halbumgebung einer Kurve in einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit von beschränkter Krümmung. Doklady Akad. Nauk SSSR 103, 537—539 (1955).

Die vorliegende Note benutzt die von A. D. Aleksandrov eingeführten Begriffsbildungen (dies. Zbl. 38, 351; 41, 508). Es werden Kurvenstücke L auf der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit F beschränkter Krümmung betrachtet, die beschränkte geodätische Abweichung haben, sich aber nach ihren beiden Seiten ganz verschieden verhalten können. Eine Halbumgebung $U_L(\varepsilon)$ von L wird dann als ein Flächenstück definiert, das durch L und geodätische Bögen begrenzt wird, von denen nur 2 ihre Endpunkte A , B mit L gemein haben und die im übrigen von L nicht größeren Abstand als ε haben. $U_L(\varepsilon)$ wird topologisch auf eine lokaleuklidische Fläche F' abgebildet, auf der die Bildkurve L' von L gleiche Länge wie L besitzt. Mit Hilfe von F' gelingt es dann, Ausdrücke für die Variation der Bogenlänge von L anzugeben und auch das isoperimetrische Problem für geschlossene Kurven zu lösen, die sich stückweise aus derartigen Bögen L zusammensetzen. Die Bedingung für die Lösung ist die, daß die geodätischen Abweichungen φ_G und $\varphi_{\bar{G}}$ gleichlanger Bögen $\widehat{A_1 A_2}$ und $\widehat{B_1 B_2}$ von L nach den verschiedenen Halbumgebungen G und \bar{G} die Bedingung $\varphi_G(\widehat{A_1 A_2}) \leq -\varphi_G(\widehat{B_1 B_2})$ erfüllen. Hierzu kommt noch eine weitere Bedingung für die Eckpunkte. Bei Kurven hinreichend kleiner Länge ohne Ecken bedeutet das die übliche Konstanz der geodätischen Krümmung.

W. Burau.

Debrunner, Hans: Zu einem maßgeometrischen Satz über Körper konstanter Breite. Math. Nachr. 13, 165—167 (1955).

Von A. Dinghas stammen für die Quermaßintegrale W_ν eines Eikörpers K fester Breite b die Relationen $2W_{n-k} = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{k}{r} b^{k-r} W_{n-r}$, wobei $0 \leq k \leq n$, k ungerade ist. Hierfür wird ein einfacher Beweis angegeben, der hauptsächlich die Steiner-Minkowskische Darstellung des Volumens eines Parallelkörpers bzw. einer Linearkombination benutzt.

W. Süss.

Huber, Alfred: An isoperimetric inequality on surfaces of variable Gaussian curvature. Conference on partial differential equations, Univ. Kansas, Summer 1954, 107—110 (1955).

Voranzeige. Vergleiche die Besprechung der ausführlichen Fassung, dies. Zbl. 56, 158.

Szekeres, G.: A note on the volume of the unitary symmetrical space. J. Indian math. Soc., n. Ser. 19, 127—132 (1955).

Let V_n be the space of $n \times n$ complex unitary symmetrical matrices (i. e. the set of all matrices of the form e^{iS} , where S is real symmetrical). V_n is a $\frac{1}{2}n(n+1)$ -dimensional subspace in the space of all complex $n \times n$ matrices. The ordinary metric of the full matrix space induces a metric in V_n , and that metric defines the volume $\text{vol}(V_n)$ of V_n . The author obtains that $\text{vol}(V_n) = J_n \cdot \text{vol}(O_n)$, where $J_n = \int \cdots \int_{\mu < \nu} 2 \sin(\psi_\mu - \psi_\nu) d\psi_1 \cdots d\psi_n$, integration being taken over the simplex $0 \leq \psi_n \leq \cdots \leq \psi_1 \leq \pi$, and O_n is the space of all real orthogonal $n \times n$ matrices. Its volume has been determined by Hurwitz (cf. Ponting and Potter, this Zbl. 34, 296). The value of J_n was determined by the reviewer [J. Indian math. Soc., n. Ser. 19, 133—151 (1956)], by non-geometrical methods. The result is that J_n equals twice the volume of the unit n -sphere. A consequence is that $\text{vol}(V_n) = 2^{1-1/2n} \text{vol}(O_{n+1})$. It would be desirable to have a direct geometrical proof for these relations, especially since V_n and O_{n+1} have the same dimension.

N. G. de Bruijn (Math. Rev. 18, 121).

Lumer, Gunter: Punktmengen mit zusammenhängenden sphärischen Schnitten. Soc. Paranaense Mat., Anuário 2, 12—17 (1955) [Spanisch].

Let S be a closed surface in 3-dimensional euclidean space. If the intersection of S with any spherical surface is always connected, then S itself is a spherical surface.

L. A. Santaló.

Topologie:

● **Centro Internazionale Matematico Estivo (C. I. M. E.): Topologia.** (3° Ciclo-Varenna, Villa Monastero 26 agosto—3 settembre 1955.) Roma: Istituto Matematico dell'Università 1955. 6 nr.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

● **Springer, George:** Einführung in die Topologie. Ausgearb. v. G. Scheja, A. Oberschelp und H. R. Whiele. (Ausarbeitungen math. u. phys. Vorlesungen, Bd. 16.) Münster, Westf.: Aschendorffsche Verlagsbuchhandlung 1955. 192 S. kt. DM 15,—.

Kapitelübersicht: I. Über topologische Räume. II. Aus der Theorie der Komplexe. III. Homologiegruppen. IV. Invarianz von Homologie- und Cohomologiegruppen. V. Mannigfaltigkeiten. VI. Topologie der kompakten Flächen. VII. Die Fundamentalgruppe. VIII. Überlagerungsmannigfaltigkeiten. — Kap. I führt bis zum Metrisationssatz und Einbettungssatz von Urysohn. Die Homologiegruppen werden zunächst für simpliziale Komplexe definiert, und es wird die topologische Invarianz nach Eilenberg mit Hilfe der singulären Homologiegruppen bewiesen. Kap. VIII behandelt den Zusammenhang zwischen Überlagerung und Fundamentalgruppe und die Existenz der universellen Überlagerungsmannigfaltigkeit. Die Darstellung ist gut lesbar und als erste Einführung in die Topologie geeignet.

H. Seifert.

● Hall, Dick Wick and Guilford L. Spencer II: *Elementary Topology*. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1955. XII, 303 p. 26 Fig. \$ 7,00.

Das Buch bietet eine Einführung in die mengentheoretische Topologie. Nachdem im 1. Kapitel die Elemente der Mengenlehre eingeführt worden sind, werden an Hand der reellen Zahlen die topologischen Grundbegriffe wie offene Mengen, zusammenhängende Mengen, stetige Abbildungen, usw. auseinandergesetzt, die als Grundlage zu allen nachfolgenden Kapiteln dienen. Von der Topologie der reellen Zahlen (Kap. 2) wird im nächsten, 3. Kapitel naturgemäß zu den topologischen Räumen übergegangen. Diesen einführenden Kapiteln folgt das 4. Kapitel, das dem Studium der metrischen Räume gewidmet wird. Neben dem klassischen Urysohn'schen Metrisationssatz findet man dort eine Charakterisierung der metrischen Räume nach dem Muster von A. Weil. Das Hauptgewicht wird jedoch auf das ein Drittel des ganzen Buches umfassende 5. Kapitel mit dem Titel „Arcs and Curves“ gelegt, wo u. a. der Jordansche Kurvensatz in voller Ausführlichkeit sowohl im Falle der Polygone, als auch im Falle der Kurven bewiesen wird. Betont wird besonders die pädagogische Nützlichkeit des Peanoschen Raumes in dem Sinne, daß dieser das reichste Material zur Illustration verschiedener mathematischer Kunstgriffe beim Studium der Topologie liefert; das Kapitel schließt mit dem Beweise der Zippinschen Charakterisierung der 2-Sphäre ab. Von den beiden letzten kürzeren Kapiteln bringt das 6. die erste Darstellung der Bingschen partitionablen Räume in Buchform und das 7. enthält eine Auseinandersetzung des Auswahlaxioms in Zusammenhang mit dem Zornschen Lemma. Zahlreiche Übungsaufgaben, meistens in Gruppen zusammengefaßt, erfüllen den Zweck, den Leser zum vollständigen Verständnis des Textes zu führen; nur selten steht ein Problem vereinzelt. Interessant ist, daß einige Aufgaben von der Art sind, daß verlangt wird, über den angegebenen Stoff kleine Abhandlungen zu schreiben. Das Buch ist durch eine klare Darstellung und durch eine wohlgedachte Schreibweise als Lehrbuch ausgezeichnet. *H. Terasaka.*

Pursell, Lyle E.: *An algebraic characterization of fixed ideals in certain function rings*. Pacific J. Math. 5, Suppl. II, 963—969 (1955).

Verf. untersucht eine ausgezeichnete Klasse von Funktionenringen \mathcal{Q} , deren Elemente (nicht notwendig stetige) Abbildungen eines regulären (separierten) Raumes X in einen nicht notwendig kommutativen Körper D sind. Es gelingt ihm, die an Punkte $x \in X$ gebundenen Ideale als gewisse maximale Ideale in \mathcal{Q} zu charakterisieren. Die Menge X^* dieser speziellen maximalen Ideale, versehen mit der wie üblich definierten (Stoneschen) Hüllen-Kern-Topologie, erweist sich als zu X homöomorph. Aus einer Reihe von Anwendungen dieses Resultates seien hier zwei hervorgehoben: Die Annahmen über \mathcal{Q} sind insbesondere für den Ring $C(X, D)$ aller stetigen Abbildungen von X in D erfüllt, wenn D der Körper der reellen oder komplexen Zahlen oder der Quaternionen und wenn der Raum X normal sowie jede seiner einpunktigen Teilmengen eine G_δ -Menge ist. Für einen solchen Raum X und einen solchen Körper D ist dann X durch $C(X, D)$ bis auf Homöomorphismen eindeutig bestimmt. Dieser Beitrag zur Beantwortung der bislang wohl noch offenen Frage, ob ein vollständig regulärer Raum durch den Ring seiner stetigen reellen Funktionen eindeutig bestimmt ist, überschneidet sich mit einer anderen Teilantwort auf diese Frage, die von L. Gillman, M. Henriksen und M. Jerison (dies. Zbl. 56, 108) gegeben wurde. Dort wird von X die Regularität und die Gültigkeit des ersten Abzählbarkeitsaxioms gefordert. Schließlich ergibt sich noch: Eine r -fach differenzierbare Mannigfaltigkeit M ist durch den Ring $C^r(M)$ aller r -fach stetig differenzierbaren Funktionen bis auf eine (differenzierbare) Homöomorphie eindeutig bestimmt ($r = 1, 2, \dots, \infty$), sofern M eine lokal endliche Überdeckung durch Koordinaten-Umgebungen besitzt. (Anm. d. Ref.: Der undefinierte Begriff „neighbourhood-finite covering“ wird wohl im Sinne von „lokal endliche Überdeckung“ zu verstehen sein.) Zusatz bei der Korrektur: Die im Refe-

rat als offen bezeichnete Frage ist zu verneinen. Es sei nämlich X ein vollständig regulärer Raum, der kein Q -Raum im Sinne von F. Hewitt ist (dies. Zbl. 32, 286), und $Y = vX$ die Q -Erweiterung von X . Dann sind die Ringe $C(X, \mathbf{R})$ und $C(Y, \mathbf{R})$ isomorph, aber X und Y nicht homöomorph.
H. Bauer.

Iséki, Kiyoshi: On the property of Lebesgue in uniform spaces. IV. Proc. Japan Acad. 31, 524—525 (1955).

The following improvement of a previous result [this Zbl. 65, 380] is given: if any binary covering of a uniform space E has the Lebesgue property then E is normal.

M. M. Peixoto.

Groot, J. de: On a compactness criterion of Freudenthal. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 130—131 (1955).

Another proof of Freudenthal's criterion for compactness (this Zbl. 43, 381; see also Zbl. 53, 124).

S. R. Fary.

Groot, J. de and H. de Vries: A note on non-archimedean metrizations. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 222—224 (1955).

A topological space is called non-Archimedeanly metrizable if one can assign a metric ϱ satisfying the stronger axiom: $\varrho(x, z) \leq \max [\varrho(x, y), \varrho(y, z)]$. J. de Groot proved that a topological space is non-Archimedeanly metrizable if and only if it is metrizable and zero-dimensional in the sense of covering dimension (this Zbl. 72, 402). In this note it is proved that a locally non-Archimedeanly metrizable Hausdorff space is non-Archimedeanly metrizable if and only if it is paracompact and that any metric space in which any point has a neighborhood of potency less than \aleph is non-Archimedeanly metrizable.

K. Morita.

Groot, J. de: On Cohen's topological characterization of sets of real numbers. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 33—35 (1955).

A topological space M is homeomorphic with a set of real numbers if and only if the following conditions are satisfied: M is regular with a countable base (separable metrizable); M is of order < 2 ; M is locally-connected in any point of order 2; any point of order 2 is a cut-point.

G. Scorza Dragoni.

Scorza Dragoni, Giuseppe: Sulla teoria della dimensione. Matematiche 10, 104—120 (1955).

Verf. skizziert einen Abriß der Dimensionstheorie, der sich leicht zu einer Monographie über die genannte Theorie erweitern läßt. Man vergleiche auch: J. H. C. Whitehead, dies. Zbl. 39, 187.

J. Weier.

Jones, F. Burton: On a certain type of homogeneous plane continuum. Proc. Amer. math. Soc. 6, 735—740 (1955).

We only consider connected, compact subspaces of the plane called (plane) continua. By known results, the class of homogeneous continua may be typed as follows: 1. Those which do not separate the plane; 2. Decomposable continua; 3. Those which separate the plane but are indecomposable. (Class 3. may be empty; 1. and 2. are known to contain non trivial elements.) The author shows in this paper that every continuum of Type 2 is either a simple closed curve or becomes one under a natural aposyndetic decomposition, the elements of the decomposition being mutually homeomorphic continua of Type 1. This result is in fact a special case of a more technical theorem proved in the paper.

S. R. Fary.

Sperner, E.: Generalizzazioni del teorema di Brouwer sul punto unito. C. I. M. E., Topologia 34 p. (1955).

Die Arbeit stellt eine Ausarbeitung von Vorträgen dar, die Verf. im September 1955 in Varenna gehalten hat. Sie führen in einen allgemeinen mathematischen Problemkreis ein, dessen Mittelpunkt das klassische Brouwersche Theorem über die Existenz von Nullstellen bei der Transformation des abgeschlossenen n -dimensionalen Euklidischen Einheitselementes in sich bildet. Typisch für Verallgemeinerungen

und Abwandlungen des Brouwerschen Satzes, die von kombinatorischer Topologie (Lefschetz, Sperner u. a.) über reelle Funktionentheorie (Aumann, Schauder u. a.) zur Theorie partieller Differentialgleichungen (Leray u. a.) reichen, ist folgender Satz: Seien A eine konvexe kompakte Teilmenge eines Euklidischen Raumes und V eine Vorschrift, die jedem Punkte p aus A eine abgeschlossene konvexe Teilmenge $V(p)$ von A zuordnet. Dann existiert wenigstens ein Punkt q mit $q \in V(q)$, falls V folgende Eigenschaft besitzt: wenn $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ konvergente Punktfolgen aus A und $b_i \in V(a_i)$ für alle i , so ist $\lim b_i \in V(\lim a_i)$. — Im übrigen weist sich der Komplex mathematischer Gedanken, die an den Brouwerschen Satz anknüpfen und vom Verf. übersichtlich geordnet und ergänzt sind, als eine geschlossene Lösungstheorie aus.

J. Weier.

Darbo, Gabriele: Grado topologico e punti uniti in trasformazioni plurivalenti. C. I. M. E., Topologia 3 p. (1955).

Seien E die Ebene, q der Nullpunkt von E , U eine Teilmenge von E , weiter $\sum a_i x_i$ ein in U gelegener singulärer 1-Zyklus und F eine „nach oben halbstetige“ (upper semi-continuous) mehrdeutige Abbildung von U in $E - q$. Für jeden Punkt p aus U sei überdies $F(p)$ kompakt und $E - F(p)$ zusammenhängend. Wenn F eindeutig und stetig ist, so besitzt offenbar $\sum a_i f(x_i)$ bezüglich q einen Grad. Wie läßt sich im allgemeinen Falle ein „Grad“ von $\sum a_i f(x_i)$ definieren? Dieses Problem kann man so lösen, daß man zunächst für endlichfach mehrdeutige Funktionen einen Grad definiert und hierauf die Komponenten von $F(p)$ in die Position der Bildpunkte solcher endlichfach mehrdeutigen Funktionen eintreten läßt. Verf. führt diesen Gedanken näher aus.

J. Weier.

Scorza Dragoni, G.: Traslazioni piane generalizzate. Lezioni raccolte da R. Conti. C. I. M. E., Topologia 19 p. (1955).

This expository paper deals with the theory of generalized plane transformations t , i. e., homeomorphisms of E_2 into E_2 which possess no fixed points and which preserve the sense of rotation. A discussion of the main theorems of Brouwer's paper [Math. Ann. 72, 37—54 (1912)], with subsequent improvements by the author and other mathematicians constitutes the main part of the paper. The paper begins with Brouwer's fixed point theorem (in E_2), and a later extension of it by the author is used to show that trajectories of t (Bahnkurven) are open simple arcs. A proof of Brouwer's „Translationssatz“ and an application to Poincaré's „last geometric“ theorem concludes the paper.

C. J. Neugebauer.

Eggleston, H. G.: A property of plane homeomorphisms. Fundamenta Math. 42, 61—74 (1955).

Let Γ be the group of all homeomorphisms $E \rightarrow E$ of the Euclidean plane E onto itself. The distance function $d(T_1, T_2) = \sup \{d(T_1(p), T_2(p)) : p \in E\}$ defines a uniform topology in Γ , and we also consider the topology of the pointwise convergence. A homeomorphism $T \in \Gamma$ will be called „special“, if it keeps either all the lines $x = \text{const.}$ or all the lines $y = \text{const.}$ invariant. The special homeomorphisms generate a subgroup \mathcal{E} of Γ . Ulam raised the question [Fundamenta math. 24, 324 (1935)] whether or not all homeomorphisms can be „approximated“ by finite superpositions of special homeomorphisms. The author shows here that the answer depends on the interpretation of the term „approximation“. His result is: \mathcal{E} is nowhere dense in the above introduced uniform topology of Γ , and it is everywhere dense in the topology of the pointwise convergence. In order to prove the first part of this very interesting theorem, the author shows that, if the arcus variation $\beta(A)$ of a Jordan arc A is conveniently defined, then $\beta(\xi A) \leq c(\xi) + \beta(A)$ for every Jordan arc A in the plane, where $c(\xi)$ is defined for every $\xi \in \mathcal{E}$. Uniform approximation would imply analogous inequality for the limit, and it is easy to construct homeomorphism and Jordan arc not satisfying this inequality. To prove the second part of the theorem the author first considers homeomorphisms which

are the identity outside a given square. These are uniform limits of elements of \mathcal{E} . From this result he is then able to deduce the second part of his theorem.

S. R. Fary.

Borel, Armand: Nouvelle démonstration d'un théorème de P. A. Smith. Commentarii math. Helvet. 29, 27—39 (1955).

Utilisant l'algèbre spectrale des revêtements réguliers finis, mais sans faire intervenir les groupes de cohomologie spéciale de P. A. Smith, l'A. donne une nouvelle démonstration du théorème classique de P. A. Smith et établit un résultat de Floyd. (Si la période p de l'homéomorphisme φ est impaire, $n - k$ est pair; n = dimension de la sphère d'homologie sur laquelle opère φ et k = dimension de la sphère d'homologie des points fixes de φ).

G. Reeb.

Floyd, E. E.: Real-valued mappings of spheres. Proc. Amer. math. Soc. 6, 957—959 (1955).

Es wird gezeigt: Ist $f(x)$ eine auf der zweidimensionalen Sphäre S definierte reellwertige und stetige Funktion und sind $x_i \in S$ ($i = 0, 1, 2$) drei Punkte, so gibt es eine Drehung r auf S derart, daß $f(y_0) = f(y_1) = f(y_2)$ ausfällt, wo $y_i = r(x_i)$ ist. Vorbereitend beweist Verf. das folgende allgemeine Lemma: Es sei X ein unikohärentes lokal-zusammenhängendes Kontinuum und T eine involutorische fixpunktfreie Abbildung von X auf sich, $T^2 = 1$. Hat $A \subset X$ die Eigenschaften: (a) A ist abgeschlossen, (b) A ist invariant bezüglich T , (c) A separiert x von $T(x)$ für jedes $x \in X - A$, so existiert eine zusammenhängende Teilmenge $B \subset A$ mit den nämlichen drei Eigenschaften. — Bei der Anwendung des Lemmas auf den kurzen Hauptbeweis wird X mit der Drehgruppe von S in sich identifiziert. — Das Ergebnis des Verf. umschließt als Sonderfall das Theorem von A. de Mira Fernandes (dies. Zbl. 28, 319), in welchem die x_i ein gleichseitiges Dreieck bilden. *H. Hadwiger.*

Haman, K. et K. Kuratowski: Sur quelques propriétés des fonctions définies sur des continus unikohérents. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 243—246 (1955).

Verff. beweisen: Es sei C ein unikohärentes lokal-zusammenhängendes Kontinuum und $p \leftrightarrow p^*$ ($p, p^* \in C$) eine involutorische stetige Abbildung von C auf sich, so daß also $p^{**} = p$ ist. Wenn $f(p)$ eine auf C definierte, reellwertige stetige Funktion und F die Teilmenge von C mit $f(p) = f(p^*)$ ($p, p^* \in F$) ist, so enthält F ein antipodisches Kontinuum K , für welches also $K^* = K$ ausfällt. Im Sonderfall, daß C die zweidimensionale Sphäre S_2 ist und $p^* = -p$ festgesetzt wird, gilt eine Umkehrung, wonach sich zu einer abgeschlossenen antipodischen Punktmenge $F \subset S_2$ mit einem antipodischen Teilkontinuum $K \subset F$ eine stetige Funktion $f(p)$ so auf S_2 definieren läßt, daß F mit der Menge $f(p) = f(p^*)$ identisch ist. [Ref.: Die schwächere Aussage, wonach F nichtleer ist, folgt auch aus einem Resultat von H. Hopf (Fundamenta Math. 28, 33—57 (dies. Zbl. 15, 276); Satz A'_2); die volle Aussage im Sonderfall $C = S_2$, $p^* = -p$, wurde bereits von W. Süss gemacht (Aufgabe 230 des J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein 46 (1936); Lösungen von H. Schwarz und H. Hopf).] Der Satz der Verff. läßt sich auch aus dem im vorstehenden Referat erwähnten Lemma gewinnen. *H. Hadwiger.*

Jaworowski, J. W.: A theorem on antipodal sets on the n -sphere. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 247—250 (1955).

Beweisskizze für ein sich auf Begriffe der Verschlingungstheorie beziehendes Kriterium dafür, daß zwei abgeschlossene antipodische Teilmengen A und B der n -dimensionalen Sphäre S_n disjunkt sind. Korollarien: a. Ist A p -azyklisch, B $(n - p - 1)$ -azyklisch und gilt $A \cap B = \emptyset$, so sind A und B verschlungen mod 2. b. Ist A p -azyklisch, B q -azyklisch und ist $p + q > n - 1$, so gilt $A \cap B \neq \emptyset$.

H. Hadwiger.

Jaworowski, J. W.: Involutions of compact spaces and a generalization of Borsuk's theorem on antipodes. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 289—292 (1955).

Der metrische Raum M sei kompakt und n -azyklisch mod 2. Ferner bezeichne φ eine stetige involutorische Abbildung von M auf sich. Mit Verwendung eines in der vorstehend referierten Arbeit angekündigten Ergebnisses wird gezeigt, daß eine stetige Abbildung f von M in die n -dimensionale Sphäre S_n die Homologiegruppe $B^k(M)$ für $k = -1, 0, 1, \dots$ auf $B^k(S_n)$ abbildet, falls über f vorausgesetzt wird, daß für jedes $x \in M$ $f(y) \neq f(x)$ [$y = \varphi(x)$] ausfällt. — U. a. ergeben sich die Korollarien: a. Ist f eine stetige Abbildung von M in den n -dimensionalen euklidischen Raum E_n , so existiert ein $x_0 \in M$ derart, daß $f(y_0) = f(x_0)$ [$y_0 = \varphi(x_0)$] ausfällt. b) Ist M durch $n+1$ abgeschlossene Mengen M_i ($i = 0, \dots, n$) überdeckt, so enthält wenigstens eine von ihnen ein involutorisches Paar, so daß $x_0, y_0 \in M_j$ [$y_0 = \varphi(x_0)$] für ein geeignetes j gilt. — Im Sonderfall $M = S_n$ handelt es sich um bekannte Sätze, insbesondere um ein u. a. von K. Borsuk (dies. Zbl. 6, 424) bewiesenes Theorem, wenn noch spezieller $\varphi(x) = -x$ gesetzt wird. *H. Hadwiger.*

Jaworowski, J. W.: On some properties of mappings of the sphere into the euclidean space. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 583—584 (1955).

Es sei F eine abgeschlossene antipodische Teilmenge der n -dimensionalen Sphäre S_n , die eine nichtleere abgeschlossene antipodische und p -azyklische Teilmenge enthält. Verf. stellt das folgende Problem: Existiert eine stetige Abbildung f von S_n in den $(n-p)$ -dimensionalen euklidischen Raum E_{n-p} derart, daß F mit der Menge aller Punkte $x \in S_n$ identisch ist, für die $f(x) = f(x^*)$ ausfällt, wo x^* das antipodische Bild von x bezeichnet? — Die beiden Hauptergebnisse der Arbeit bejahen die gestellte Frage in den Fällen $p = n-1$ und $p = 0$; überdies kann f über F konstant gesetzt werden. Das erste Ergebnis verallgemeinert eine sich auf die gewöhnliche Sphäre ($n = 2$) beziehende Aussage von K. Haman und K. Kuratowski (vgl. das weiter oben stehende Referat). *H. Hadwiger.*

Altman, M.: A fixed point theorem for completely continuous operators in Banach spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 409—413 (1955).

Es sei E ein Banachscher Raum, S die Begrenzung einer durch $\|x\| \leq 1$ definierten Kugel in E . F bezeichne einen über S definierten vollständig stetigen Operator mit dem Bereich E , der also stetig und mit kompakter Bildmenge versehen ist, und $x \leftrightarrow x^*$ sei eine stetige, dimensionstreue, fixpunktfreie und involutorische Abbildung von S auf sich. Verf. zeigt: Wenn die Abbildung $\Phi(x) = F(x) - x$ von S in E die Bedingungen (a) $\Phi(x) \neq \Theta$ ($\Theta =$ Nullelement von E) und (b) $\inf \|\varphi(x) - \varphi(x^*)\| > 0$ [$\varphi(x) = \Phi(x)/\|\Phi(x)\|$] erfüllt, so ist der Grad von Φ im Sinne von J. Leray und J. Schauder (dies. Zbl. 7, 165) ungerade. Damit erzielt Verf. Ergebnisse für Banachsche Räume, die zu den von M. A. Krasnoselsky (dies. Zbl. 39, 337) und J. W. Jaworowski (die vorletzte referierte Note) analog sind. *H. Hadwiger.*

Weier, Josef: Über unwesentliche eindimensionale Singularitäten. Monatsh. Math. 59, 165—177 (1955).

P sei eine endliche Mannigfaltigkeit im euklidischen R^n und f^τ ($0 \leq \tau \leq 1$) eine stetige Abbildungsschar von P in sich, gedeutet als stetige Abbildung F von $P \times I$ in P , wobei I die Einheitsstrecke ist. Jede Abbildung f^τ habe nur endlich viele Fixpunkte, die entsprechenden Punkte $p \times \tau$ mit $f^\tau(p) = p$ mögen ein n -dimensionales Polyeder A von $P \times I$ bilden, wie es durch eine Arbeit des Verf. (vgl. dies. Zbl. 66, 168) nahe gelegt wird. A läßt sich in „Singularitäten“ zerlegen, die stetige Streckenbilder sind, denen je ein gewisser „Index“ zugeordnet werden kann. Es wird gezeigt: Wenn P die Dimension 2 hat, kann jede Singularität von Index 0 durch stetige ε -Deformation von F zum Verschwinden gebracht werden (Unwesentlichkeit der Singularität). Es wird behauptet, daß ein analoger Satz für höhere Dimensionen jedenfalls nicht mehr einschränkungslos gilt.

Wolfgang Franz.

Weier, Joseph: On plane vector fields. *Math. Japonicae* 3, 163—172 (1955).

Soient P un disque à m trous S_1, \dots, S_m , Q une circonférence, F et G deux classes d'applications homotopes de P dans Q . L'A. remarque d'abord qu'il existe deux applications $f' \in F$ et $g' \in G$ telles que l'ensemble A des points $p \in P$ pour lesquels $f'(p) = g'(p)$ est soit vide, soit constitué par un nombre fini de courbes simples fermées disjointes deux à deux A_1, \dots, A_n . En supposant $A \neq \emptyset$, l'A. associe à chacun des A_i un entier $\zeta(A_i)$, qu'il appelle degré de A_i par rapport à la paire (f', g') ; soit ensuite $\alpha(A_i)$ le nombre de trous S_j contenus dans la composante bornée du complémentaire de A_i dans le plan. Théorème: si $\sum \alpha(A_i) \zeta(A_i) \neq 0$, l'équation $f(p) = g(p)$ admet au moins une solution $p \in P$ quelles que soient les applications $f \in F$ et $g \in G$. T. Ganea.

Guggenheimer, Heinrich: Sulla teoria globale delle trasformazioni puntuali. *Boll. Un. mat. Ital., III. Ser.* 10, 474—477 (1955).

Soient X, Y deux variétés de même dimension; l'A. considère entre X et Y des correspondances (1-1): une application f de X sur Y , telle qu'il existe deux sous-ensembles fermés A de X , B de Y , et que f applique $X - A$ biunivoquement et bicontinuellement sur $Y - B$. Alors $X - A$ et $Y - B$ sont homéomorphes; on peut en déduire, par suites exactes, la relation $\chi(X) - \chi(A) = \chi(Y) - \chi(B)$. Si X et Y sont le même espace projectif réel, alors les homologies entières de A et B sont isomorphes. Si X et Y sont des sphères S^q , et si de plus f^{-1} est continue, alors A et B ont même type d'homotopie jusqu'en dimension $q - 2$. Il s'agit là, en fait, d'applications assez immédiates du Lemme des Cinq, et de la dualité d'Alexander-Pontrjagin. R. Thom.

Kodama, Yukihiko: On ANR for metric spaces. *Sci. Reports Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A* 5, 96—98 (1955).

Es sei X ein ANR metrischer Räume, der nicht kompakt zu sein braucht. Bewiesen wird: Es gibt eine inverse Folge $(N_i, \pi_i^{i+1}, i = 1, 2, \dots)$ simplizialer Komplexe derart, daß: $H_p(X) \approx \text{Inv Lim } H_p(N_i)$ für $p \geq 0$, $H^p(X) \approx \text{Dir Lim } H^p(N_i)$ für $p \geq 0$, $\pi_p(X) \approx \text{Inv Lim } \pi_p(N_i)$ für $p \geq 1$, und $\pi^p(X) \approx \text{Dir Lim } \pi^p(N_i)$ für $\dim X < 2p - 1$ gilt; dabei bedeuten H_p und H^p Homologie- und Cohomologiegruppen, die die Axiome 1, 2, 5 von Eilenberg und Steenrod (*Foundations of Algebraic Topology*, chap. I; dies. Zbl. 47, 414) befriedigen, π_p und π^p Homotopie- und Cohomotopiegruppen, Inv Lim und Dir Lim inverse und direkte Grenzgruppen. Daraus wird gefolgert: Zwei Homologietheorien, die alle Axiome von Eilenberg und Steenrod befriedigen, fallen auf ANR-en metrischer Räume zusammen. T. Ganea.

Postnikov, M. M.: Untersuchungen zur Homotopietheorie der stetigen Abbildungen. I: Die algebraische Theorie der Systeme. II: Das natürliche System und der Homotopietypus. *Trudy mat. Inst. Steklov.* 46, 158 S. (1955) [Russisch].

Die Arbeit ist eine ausführliche Darstellung der Theorie der sogenannten Postnikov-Komplexe und der Postnikov-Invarianten. Bekanntlich gelingt es dem Verf. mit Hilfe seiner Theorie den Homotopietyp eines Raumes zu charakterisieren. Er erhält eine Reihe von bereits bekannten Ergebnissen als Spezialfälle seiner Theorie, darunter auch solche, die zum ersten Male mit erheblichem Aufwand bewiesen wurden, wie z. B. den folgenden „Endlichkeitssatz“. Wenn in einem einfach zusammenhängenden Raum X die singulären ganzzahligen Kohomologiegruppen endlich erzeugbar sind, so gilt das gleiche auch von den Homotopiegruppen. Da die Postnikov-Invarianten Verallgemeinerungen der Eilenberg-MacLane-Invarianten und die Postnikov-Komplexe Verallgemeinerungen der Eilenberg-MacLane-Komplexe sind, erhält man ohne weiteres alle die Klassifikationssätze, die mit diesen Begriffen operieren. Der Verf. weist das u. a. explizit an den Sätzen von J. H. C. Whitehead und E. Burger nach. Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: In einer ausführlichen Einleitung wird an einige Begriffe der modernen Homotopietheorie und der alge-

braischen Topologie im allgemeinen erinnert, so daß die Arbeit auch Lesern zugänglich gemacht wird, die bisher noch nicht mit Homotopiefragen vertraut waren. Es werden hier z. B. Homologiegruppen von Gruppen, lokale Koeffizientenbereiche und Homotopiegruppen betrachtet. Außerdem wird ausführlich die Problemstellung erläutert und an dem Eilenberg-MacLaneschen Satz über die Berechnung der n -ten Kohomologiegruppe eines Raumes aus π_1 und π_2 verdeutlicht. Im ersten Teil wird rein algebraisch der Begriff des Systems eingeführt. Ihm geht voraus eine Behandlung der semisimplizialen Komplexe. Als Beispiele werden Eilenberg-MacLane-Komplexe untersucht und Gruppenkomplexe $K(G)$ definiert. — Zu einem beliebigen semisimplizialen Komplex K wird der Begriff der p -Erweiterung mit Faktor $k \in C^{p+1}(K, G)$ (G = abelsche Gruppe) definiert. Es ist dies wieder ein semisimplizialer Komplex K' . Dieser neue Komplex übernimmt einige wesentliche Eigenschaften des Komplexes K , z. B. sind sie p -isomorph (d. h. ihre p -dimensionalen Gerüste sind isomorph). Eine entsprechende Konstruktion wie für die Komplexe wird auch für die simplizialen Abbildungen angegeben (s. nachfolgendes Referat). Ist nun $\{G_i\}$ ein System von Gruppen, die für $i \neq 1$ alle abelsch sind und in dem G_1 Operatorengruppe in G_i ist, so kann man zu dem Komplex $K(G_1)$ die 2-Erweiterung mit einem beliebigen Faktor $k_1 \in C^3(G_1, G_2) = C^3(K(G_1), G_2)$ bilden. Dieses Verfahren kann man iterieren und bekommt eine Folge $K_1^2 \subset K_2^3 \subset \dots \subset K_{p+1}^{p+1} \subset \dots$ (mit dem oberen Index soll das entsprechend dimensionale Gerüst bezeichnet werden) von semisimplizialen Komplexen, deren Vereinigungsmenge der Komplex $K(\mathfrak{G})$ des Systemes $\mathfrak{G} = \{G_i, k_i\}$, der zentrale Begriff der ganzen Theorie, ist. Sei nun K ein semisimplizialer Komplex und G eine abelsche Gruppe. Es werden zwei Funktionen $d(A, B)$ und $k(S)$ axiomatisiert, von denen erstere jedem Paar von „vergleichbaren“ Simplexen (d. h. solchen, die gleichen Rand haben) und letztere jeder Sphäre in K ein Element von G zuordnet. Die Axiome entsprechen den gewöhnlichen Eigenschaften von Obstruktionskozyklus und Differenzkokette. Diese Konstruktion ermöglicht es dem Verf., zu einem gewöhnlichen semisimplizialen Komplex K ein zugeordnetes System \mathfrak{G} zu definieren. Es wird bewiesen, daß diese Zuordnung nicht von der speziellen Auswahl der Funktionen d und k abhängt, also eine Invariante des Komplexes K ist. Die Faktoren des Systems $\{G_i, k_i\}$ sind die Postnikov-Invarianten und die Gruppen die Homotopiegruppen. Hier wird jetzt schon algebraisch der berühmte Klassifikationssatz bewiesen, daß (1) das System vollständig den Typ (für einen topologischen Raum ist es dann der Homotopietyp) von K bestimmt und daß es (2) zu jedem beliebigen System einen Komplex gibt, dem er zugehört. Im zweiten Teil der Arbeit wird diese algebraische Theorie nun angewandt auf topologische Räume und deren Homotopietheorie. Es wird die singuläre Kohomologietheorie entwickelt und ein minimaler Komplex definiert, der dann gerade der dem Raum entsprechende semisimpliziale Komplex ist. — Die Beweise der topologischen Sätze sind nun einfache Übertragungen der vorangegangenen algebraischen Sätze. Um auch Aussagen für spezielle Dimensionen zu bekommen, wird ein Komplex-Begriff eingeführt, der mit dem CW-Komplex-Begriff identisch ist. Durch die Ergebnisse dieser Arbeit und des dritten Teiles des vom Verf. angekündigten Zyklus (s. nachfolgendes Referat) ist die algebraische Homotopietheorie in gewissem Sinne zu einem Abschluß gebracht worden. Alle noch offenen Fragen lassen sich als Probleme der Berechnung von Postnikov-Invarianten formulieren. Es ist sehr zu begrüßen, daß diese nicht nur bedeutende, sondern auch recht elegante Theorie durch dieses Buch einem weiten, nicht besonders topologisch vorgebildeten Leserkreis zugänglich gemacht wird.

F. W. Bauer.

Postnikov, M. M.: Untersuchungen zur Homotopietheorie der stetigen Abbildungen. III: Allgemeine Fortsetzungs- und Klassifikationssätze. Mat. Sbornik, n. Ser. **40** (82), 415—452 (1956) [Russisch].

Während der Verf. im 1. und 2. Teil (s. vorstehendes Referat) seiner Arbeit

neben der allgemeinen Theorie nur die algebraische Klassifizierung des Homotopie-typs eines Raumes angibt, wird hier die Klassifizierung der Abbildungen vorgenommen. Im ersten Teil der Arbeit wird nachgewiesen, daß man sich zur Klassifikation von stetigen Abbildungen eines beliebigen Zellkomplexes in einen linear zusammenhängenden Raum auf simpliziale Abbildungen semisimplizialer Komplexe mit sogenannten speziellen Homotopien beschränken kann. Die Konstruktionen werden hier in Anlehnung, nur sehr viel komplizierter als im simplizialen Fall durchgeführt (simpliziale Approximation von Abbildungen usw.) Im zweiten Teil wird das so reduzierte Problem gelöst. Dies geschieht mittels der sogenannten Kozykloiden, die die Obstruktion einer Abbildung f verallgemeinern. Der Begriff der Kozykloiden geht aus von dem der p -Erweiterung K' eines semisimplizialen Komplexes K (s. vorangehendes Referat). Sei $\mu: K \rightarrow L$ eine simpliziale Abbildung eines semisimplizialen Komplexes K auf einen semisimplizialen Komplex L , und L' eine Erweiterung von L mit Faktor l , so daß $\mu^*l = 0$ für die Klasse von l oder aber $\mu^*l + \nabla d^p = 0$ gilt. Sodann kann man die Abbildung μ zu einer Abbildung $\mu': K \rightarrow L'$ erweitern. Sei jetzt $\mathfrak{G} = \{G_p, k_p\}$ ein beliebiges System, N ein semisimplizialer Komplex und $\mu_1: N \rightarrow K(G_1)$ eine Abbildung, die durch eine Kette $c^1 m$ in N definiert wird. Man kann obiges Verfahren iterieren und erhält eine Folge von Abbildungen $\mu_p: N \rightarrow K_{p-1}(\mathfrak{G})$, derart, daß eine Folge $\{c^p\}$ mit $0 = \nabla c^p + \mu^*k_{p-1}$ existiert. Diese Folge $\{c^p\}$ ist das Kozykloid von N über dem System \mathfrak{G} . Entsprechend wird nun zu einer Abbildung f eines Komplexes N in einen Komplex $K(\mathfrak{G})$ ein charakteristisches Kozykloid definiert. Die beiden Hauptsätze der Arbeit lauten: (1) (Allgemeiner Fortsetzungssatz) Eine Abbildung $f: N^n \rightarrow K(\mathfrak{G})$ ist dann und nur dann auf N^{n+1} fortsetzbar, wenn für das letzte Glied des charakteristischen Kozykloides $\nabla c^n + f^*k_{n-1} = 0$ gilt. (2) (Allgemeiner Klassifikationsatz) Zwei simpliziale Abbildungen $f_1, f_2: N \rightarrow K(\mathfrak{G})$ sind dann und nur dann im speziellen Sinne homotop, wenn ihre charakteristischen Kozykloiden kohomolog sind. Diese beiden Sätze liefern die gewünschte Klassifizierung von Abbildungen der eingangs bezeichneten Raumklassen durch Kohomologeeigenschaften.

F. W. Bauer.

Boltjanskij, V. G.: Homotopietheorie der stetigen Abbildungen und der Vektorfelder. Trudy mat. Inst. Steklov. **47**, 199 S. (1955) [Russisch].

Diese Arbeit kann als Lehrbuch des Teiles der algebraischen Topologie betrachtet werden, der zur Homotopietheorie in Beziehung steht. Vorkenntnisse werden im wesentlichen vom Leser nicht vorausgesetzt. Die Arbeit ist in zwei Teile gegliedert. Im ersten Teil wird eine ausführliche Darstellung der Homologietheorie von simplizialen und Zellkomplexen gegeben, die auch die Produkttheorie der V -Homologie (Kohomologietheorie) enthält, sowie eine geometrische Darstellung der Steenrod-schen Quadrate Sq^n . Es dürfte das erste Mal sein, daß ein so wichtiges Hilfsmittel wie die Steenrod-Quadrate in einem grundlegenden Lehrbuch behandelt werden. Der zweite Teil beginnt mit einer Darstellung der Homotopiegruppen. Die Gruppe $\pi_n(S^n)$ wird mit Hilfe des Abbildungsgrades berechnet. Die Darstellung der Hindernistheorie wird besonders durchsichtig dadurch, daß Verf. allen den Schwierigkeiten, die zur Einführung der lokalen Koeffizientenbereiche sowie zu Faserraumbetrachtungen geführt haben, ausweicht (z. B. durch die Voraussetzung, daß alle seine Räume n -einfach sind). Die Homologie- und Homotopiegruppen der Stiefelschen Mannigfaltigkeiten werden zwar elementar, aber sehr elegant berechnet. Das gleiche gilt von der Behandlung der Stiefel-Whitney-Klassen in differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Die letzten beiden Abschnitte befassen sich mit der Berechnung der $\pi_{n+1}(S^n)$ und des zweiten Hindernisses mittelst der Theorie der Steenrod-Quadrate. Das Buch ist sehr geometrisch und verständlich geschrieben. Die Beweise sind sorgfältig ausgeführt.

F. W. Bauer.

Whitehead, George W.: On the homology suspension. Ann. of Math., II. Ser. 62, 254—268 (1955).

Soit B un espace simplement connexe dont les groupes d'homologie singulière (à coefficients dans un Γ -module, Γ étant un anneau principal) sont nuls jusqu'à la dimension n (inclusivement), et soit F l'espace des lacets (au point b_0 de B). La suspension homologique est l'homomorphisme naturel $\sigma: H_{q-1}(F) \rightarrow H_q(B)$, introduit par J. P. Serre (ce Zbl. 45, 260) qui a montré que σ est un isomorphisme pour $q \leq 2n$, et un épimorphisme pour $q = 2n + 1$. L'A. étudie la suspension pour $q \leq 3n$, et établit l'existence d'une suite exacte

$$\cdots \xrightarrow{\sigma} H_q(F) \xrightarrow{\sigma} H_{q+1}(B) \xrightarrow{\tau} G_{q+1} \xrightarrow{\sigma} H_{q-1}(F) \rightarrow \cdots$$

où G_{q+1} est isomorphe (pour $q \leq 3n$) à $H_{q+1}(B \times B, B \vee B)$ et à $H_{q-1}(F \times F, F \vee F)$ (\vee représentant le joint). Cette suite exacte est équivalente (par isomorphie terme à terme) à la suite exacte

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(X, e) \rightarrow H_{q+1}(E, e) \rightarrow H_{q+1}(E, X) \rightarrow H_q(X, e) \rightarrow \cdots$$

du triple (E, X, e) où E est l'espace de tous les chemins de B , e l'élément neutre de F , E_0 l'espace des chemins partant de b_0 , E_1 l'espace des chemins aboutissant en b_0 et $X = E_0 \cup E_1$. L'isomorphie de $H_{q+1}(E, X)$ avec $H_{q+1}(B \times B, B \vee B)$ et avec $H_{q-1}(F \times F, F \vee F)$ (pour $q \leq 3n$) repose sur la considération de l'homologie d'espaces fibrés, parce que E est fibré (au sens de Serre) avec $B \times B$ pour espace de base (à chaque chemin on fait correspondre ses deux extrémités) et F pour fibre; l'application τ est induite par l'application diagonale de B en $B \times B$, l'application σ est définie au moyen de la composition des lacets (qui applique $F \times F$ en F). — Moyennant certaines conditions (sur le module des coefficients et sur la torsion), l'A. établit l'équivalence (pour $q \leq 3n$) des notions d'élément transgressif (image par σ , ou, en cohomologie, par σ^*) et d'élément minimal ou primitif, et du noyau de σ (ou σ^*) avec le sous-groupe engendré par les éléments décomposables. — Les opérations cohomologiques $H^n(K; \Pi) \rightarrow H^q(K; G)$ définies pour tout complexe K sont en correspondance biunivoque avec les éléments de $H^q(\Pi, n; G)$, groupe de cohomologie d'un espace d'Eilenberg-MacLane; si cet élément est transgressif, l'opération cohomologique correspondante est additive (c'est-à-dire, est un homomorphisme pour tout complexe K), résultat annoncé par Eilenberg et MacLane; l'A. établit la réciproque pour $q \leq 3n - 1$.

G. Hirsch.

Murasugi, Kunio: Covering spaces and the invariant k . Sci. Reports Tokyo Daigaku, Sect. A 5, 49—51 (1955).

Es sei X ein einfach-zusammenhängender Raum, dessen Homotopiegruppen mit $\pi_i = \pi_i(X)$ bezeichnet werden sollen. Es werde vorausgesetzt, daß π_i für $n < i < q$ und für $i > q$ verschwindet. B sei der Raum der aus X durch „Töten“ der Homotopiegruppe $\pi_q(X)$ mittels Anheften von Zellen der Dimensionen $q + 1$, $q + 2, \dots$ entsteht. Sofern man nur auf Homotopietypen achtet, ist X gefasert über B mit dem Eilenberg-MacLaneschen Raum $K(\pi_q, q)$ als Faser. Man hat für diese Faserung eine charakteristische Klasse $k_{q+1} \in H^{q+1}(B, \pi_q)$, vgl. Postnikov (dies. Zbl. 42, 172). Nun sei \tilde{X} der $(n - 1)$ -einfach-zusammenhängende verallgemeinerte Überlagerungsraum von X , d. h. (\tilde{X}, X, p) ist ein Faserraum im Sinne von Serre, es ist $\pi_i(\tilde{X}) = 0$ für $i < n$ und $p_*: \pi_i(\tilde{X}) \cong \pi_i(X)$ für $i \geq n$. Tötet man in \tilde{X} die Homotopiegruppe $\pi_q(\tilde{X}) = \pi_q$, dann erhält man einen Raum \tilde{B} , der ein Eilenberg-MacLanescher Raum $K(\pi_n, n)$ ist. \tilde{X} ist gefasert über $\tilde{B} = K(\pi_n, n)$ mit $K(\pi_q, q)$ als Faser und hat eine charakteristische Klasse $\tilde{k}_{q+1} \in H^{q+1}(\tilde{B}, \pi_q) = H^{q+1}(\pi_n, n; \pi_q)$. Nun ist \tilde{B} der $(n - 1)$ -fach-zusammenhängende verallgemeinerte Überlagerungsraum von B (Projektion p_1), und Verf. zeigt, daß $p_1^*(k_{q+1}) = \tilde{k}_{q+1}$. Beim Beweis wird der Satz von Nakaoka benutzt, daß die charakteristischen

Klassen k_{q+1}, \tilde{k}_{q+1} durch Transgression gegeben werden können (dies. Zbl. 58, 171). — In der Formulierung seines Satzes auf der ersten Seite der Arbeit schreibt Verf. nach Ansicht des Ref. an mehreren Stellen irrtümlich X statt B und \tilde{X} statt \tilde{B} .

F. Hirzebruch.

Nakaoka, Minoru: Homotopy of two-fold symmetric products of spheres. J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., Ser. A 6, 19—30 (1955).

L'A. détermine certains groupes d'homotopie (stables) de dimension $\leq 2n-2$ du produit symétrique $S^n * S^n$ de 2 sphères à n dimensions. On a $\pi_{n+i}(S^n * S^n) = 0$ pour $i = 1, 2, 4, 6$; ce groupe est isomorphe à Z_3 pour $i = 3$, à Z_2 pour $i = 5, 8$ et 9 et à Z_{15} pour $i = 7$. Lorsque n est impair, $\pi_i(S^n * S^n)$ est toujours fini pour $i \neq n$; pour n pair, il faut exiger de plus $i \leq 2n-2$. Dans les mêmes conditions, et pour p premier (impair), la composante p -primaire de $\pi_i(S^n * S^n)$ est isomorphe à celle de $\pi_i(S^n)$. — Une première méthode de démonstration, analogue à celle de Cartan-Serre [C. r. Acad. Sci., Paris 234, 288—290, 393—395 (ce Zbl. 48, 413)], repose sur la construction par récurrence (pour $j = 0, 1, 2, \dots$) d'espaces $(S^n * S^n, n+j)$ qui „tuent“ les groupes d'homotopie jusqu'à la dimension $n+j-1$ inclusivement; un espace ayant même type d'homotopie que $(S^n * S^n, n+j)$ est fibré avec $(S^n * S^n, n+j-1)$ pour fibre et un espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\pi_{n+j}(S^n * S^n), n+j)$ pour espace de base. Les résultats se déduisent alors du calcul de l'homologie mod 2 des espaces d'Eilenberg-Mac Lane $K(Z, n)$ et $K(Z_2, n)$ au moyen des carrés de Steenrod (J. P. Serre, ce Zbl. 52, 195) et de l'homologie de $S^n * S^n$ (R. Bott, ce Zbl. 53, 301; S. D. Liao, ce Zbl. 58, 171; S. K. Stein, ce Zbl. 55, 417), où l'on suppose n suffisamment grand (par exemple $n \geq 13$). — Une deuxième méthode résulte de la construction directe (pour $n \geq 7$) d'un complexe réduit ayant même type d'homotopie que $S^n * S^n$ pour les dimensions $\leq n+6$. L'A. donne ensuite une description du type d'homotopie de $S^n * S^n$ au moyen d'un complexe réduit, pour $2 \leq n \leq 5$. Il termine par des résultats (énoncés sans démonstration complète) relatifs à la composante p -primaire des groupes d'homotopie des produits cycliques de p sphères S^n (S. D. Liao, ce Zbl. 58, 171) pour p premier impair, et des produits symétriques de la $n^{\text{ème}}$ suspension du plan projectif réel.

G. Hirsch.

Vesentini, Edoardo: Sui punti stazionari di forme differenziali meromorfe sopra una varietà complessa compatta. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 486—494 (1955).

Die Überlegungen des Verf. werden für eine m -dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit durchgeführt. Verf. wendet die Formel von Kundert (dies. Zbl. 43, 174) über die sekundären Hindernis-Cozyklen auf ein r -tupel (v_1, \dots, v_r) an, wo v_j eine Differentialform vom Grade 1 mit Koeffizienten in $K^{a_j} \otimes \bar{K}^{b_j}$ ist. Hier sind a_j, b_j ganze Zahlen, K ist das kanonische Geradenbündel und \bar{K} das konjugierte Bündel von K , das als differenzierbares Bündel zu K^{-1} isomorph ist. Insbesondere werden r -tupel von meromorphen Differentialformen vom Grade 1 untersucht. Für $r = 1$ siehe Kundert (dies. Zbl. 48, 171). Ferner betrachtet Verf. Differentialformen vom Typ $(m-1, 0)$. Verf. weist auf die klassischen Untersuchungen von M. Eger (dies. Zbl. 15, 272; 16, 41), W. V. D. Hodge (dies. Zbl. 17, 420) und F. Severi (dies. Zbl. 5, 176) hin.

F. Hirzebruch.

Theoretische Physik.

Elastizität. Plastizität:

Rüdiger, D.: Spannungen und Verschiebungen der krummen Flächen mit schiefe Grundriß. Österreich. Ingenieur-Arch. 9, 265—273 (1955).

Verf. zeigt, wie sich die Differentialgleichungen von Pucher [Beton und Eisen 33, 298 (1934)] und Jellet [Trans. Irish Acad. 22, 343 (1953)] für Membranschalen

als Spezialfälle der allgemeinen tensoriellen Schalentheorie von Neuber (dies. Zbl. 33, 29) darstellen lassen. *H. Neuber.*

Szelagowski, F.: One-directional tension of an annular plate. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV 3, 189—193 (1955).

The problems considered are those of stress-distribution 1. in an annular plate with a rigid inclusion subjected to one-directional tension, and 2. in a circular annulus subjected to one-directional tension by a stress p acting on the external circle and a stress q acting on the internal circle of the annulus. The biharmonic function of the problem is represented in polar coordinates in the complex form. Boundary conditions are strictly satisfied. *D. Radenković.*

Tu, Ching-Hua: General equations of sandwich-plates under transverse loads and edgewise shears and compressions. Sci. Sinica 4, 71—88 (1955).

Verf. behandelt das Problem der Sandwich-Platten durch Einschaltung der Plattentheorie für die beiderseitigen dünnen Außenbleche, während die innere Schicht („core“) eine elastische Stützung und einen Schubwiderstand ausübt. Die aufgestellten Differentialgleichungen sind jedoch noch nicht ausgewertet. *H. Neuber.*

Müller, W. und J. Krettner: Zur Biegungstheorie einer gleichmäßig belasteten orthotropen und isotropen Rechteckplatte mit verschiedenen Randbedingungen. Österreich. Ingenieur-Arch. 9, 11—12 (1955).

Durch Untersuchung der Lösungen der Plattengleichung in kartesischen Koordinaten wird die Durchbiegung einer orthotropen und einer isotropen Rechteckplatte bei gleichmäßiger Belastung berechnet, wobei zwei Gegenseiten als momentenfrei aufliegend vorausgesetzt werden, während die dritte und vierte Seite eingespannt oder drehbar gelagert oder ganz frei sind. Auch die Biegemomente sind angegeben. *H. Neuber.*

Hill, R.: On related pairs of plane elastic states. J. Mech. Phys. Solids 4, 1—9 (1955).

Gezeigt wird, daß zwischen äußerlich unähnlichen Randwertaufgaben der ebenen Elastizitätstheorie gewisse Zuordnungen bestehen können: den Verrückungen in bestimmten Punkten des einen Spannungszustandes entsprechen Kraftresultanten an eine Kurve durch die homologen Punkte des andern Zustandes. Ähnliches gibt es auch bei stationären Strömungen viskoser Flüssigkeiten. *E. Hardtwig.*

Choudhury, Pritindu: Two-dimensional problems of stress distribution due to certain loads on the upper surface of an elastic layer of non-isotropic material with rigid base. Indian J. theor. Phys. 3, 111—118 (1955).

The paper deals with the two-dimensional problem of an elastic layer resting on a rigid base, the material of the layer having a simple form of aeolotropy, characterized by Young's moduli E_1 , E_2 and Poisson's ratios σ_1 , σ_2 upon the x and y directions respectively, and by the relation $\sigma_1/E_2 = \sigma_2/E_1 = \text{const.}$ (The origin is taken on the upper surface along which the x -axis is taken, and the y -axis is directed towards the interior of the plate.) Since the stress-function satisfies the equation $\partial^4 \chi / \partial x^4 + 2 M \partial^2 \chi / \partial x^2 \partial \eta^2 + \partial^4 \chi / \partial \eta^4 = 0$, ($\eta = \varepsilon y$), the author assumes for χ the expression

$$\chi = \int_0^\infty [A_m \operatorname{ch} m \gamma_1 y + B_m \operatorname{sh} m \gamma_1 y + C_m \operatorname{ch} m \gamma_2 y + D_m \operatorname{sh} m \gamma_2 y] \cos m x dm,$$

where M , ε , γ_1 , γ_2 are constants of the material. Using Fourier transform, the author takes into account the following three types of normal loads on the upper surface ($\bar{x}y = 0$ for $y = 0$) of the layer resting on a rigid base (where $u = 0$ and $v = 0$ for $y = b$; b = the layer depth): 1. Gaussian distribution ($\bar{y}y = -P e^{-a^2 x^2}$ when $y = 0$); 2. Parabolic distribution ($\bar{y}y = -P (1 - x^2/a^2)$ when $-a \leq x \leq a$, and $\bar{y}y = 0$ when $x > |a|$); 3. Rectangular distribution ($\bar{y}y = -P$ when $-a < x < a$, and $\bar{y}y = 0$ when $x > |a|$).

Dan Gh. Ionescu.

Chatterjee, B. B.: Stresses in a rotating blade bounded by two equal confocal parabolas. *Indian J. theor. Phys.* **3**, 107—110 (1955).

Das ebene Blatt wird begrenzt von zwei gleichen Parabeln mit gemeinsamer Achse und gemeinsamem Brennpunkt. Die Schnittpunkte der Parabeln liegen mit dem Brennpunkt auf einer Geraden senkrecht zur Parabelachse. Diese Gerade wird zur Rotationsachse gemacht und die Spannungsverteilung innerhalb des Blattes wird berechnet.

E. Hardtwig.

Tanimoto, Bensusuke: The solution of the generalized Boussinesq's problem for elastic foundation. I, II. *Proc. Japan Acad.* **31**, 540—543, 544—549 (1955).

Für den Spannungs- und Verschiebungszustand des durch einen Körper mit Rechteckgrundriß beanspruchten elastischen Halbraumes werden unter Annahme der in der Druckfläche übertragenen drei Spannungskomponenten Lösungen in Form mehrfacher unendlicher Integrale angegeben. — II. Die in I entwickelte Theorie wird für den Fall der gleichmäßigen Druckbeanspruchung, sowie für eine linear ansteigende Druckbeanspruchung zahlenmäßig ausgewertet.

H. Neuber.

Stoppelli, Francesco: Sulla sviluppabilità in serie di potenze di un parametro delle soluzioni delle equazioni dell'elastostatica isoterma. *Ricerche Mat.* **4**, 58—73 (1955).

Für den Spannungszustand des homogenen elastischen Körpers hat Signorini (dies. Zbl. **36**, 395) die Möglichkeit einer Reihenentwicklung nach einem Parameter nachgewiesen. Verf. zeigt, daß diese Reihenentwicklung einen von Null verschiedenen Konvergenzradius besitzt, und gelangt zu Aussagen über Eigenschaften der in Betracht kommenden Funktionen.

H. Neuber.

Schaefer, Hermann: Die Spannungsfunktionen einer Dyname. *Abh. Braunschweig. wiss. Ges.* **7**, 107—112 (1955).

Aus den von W. Günther entwickelten Zusammenhängen zwischen dem Tensor der Spannungsfunktionen und der Dyname der Oberflächenkräfte eines dreidimensionalen Spannungszustandes berechnet der Verf. die Spannungsfunktion eines durch eine Dyname beanspruchten geraden Stabes. Denkt man sich den Stab in ein spannungsloses Kontinuum eingebettet, so erhält man den „Tensor der Nullspannungsfunktionen“ als symmetrischen Gradiententensor aus den ersten Ableitungen eines Vektorfeldes. Daraus läßt sich auf Grund der Formeln von Günther der Kraft- und Momentenvektor der Dyname durch Umlaufintegrale darstellen. Die Integranden haben die Form von vollständigen Differentialen, so daß nur bei einem mehrdeutigen Vektorfeld sich eine von Null verschiedene Dyname ergibt. Dieses Vektorfeld wird berechnet. Der daraus zu ermittelnde Tensor der Spannungsfunktionen (Nullspannungstensor) ist im ganzen Raum eindeutig und nur längs des Stabes singulär. Dieser Nullspannungstensor kann zum Verzerrungstensor eines Kontinuums in Analogie gebracht werden. Unterwirft man ein elastisches Kontinuum einer Volterraschen Distorsion, so stimmt der obige Nullspannungstensor mit dem Deformationstensor des Kontinuums überein, falls die Komponenten der Distorsion den Komponenten der Dyname entsprechen.

G. Heinrich.

Chakravorty, J. G.: On the stress distribution in an infinite elastic solid of a transversely isotropic material with a cylindrical hole due to a localised axial shear. *Indian J. theor. Phys.* **3**, 119—124 (1955).

Elastische Verschiebungen in Körpern, die senkrecht zu einer bestimmten Geraden isotrop sind, lassen sich aus zwei Verschiebungsfunktionen Φ_1 und Φ_2 ableiten, welche der Differentialgleichung

$$\partial^2 \Phi_{1,2} / \partial r^2 + (1/r) \cdot \partial \Phi_{1,2} / \partial r + \nu_{1,2}^2 \cdot \partial^2 \Phi_{1,2} / \partial z^2 = 0$$

genügen. Die Konstanten ν_1 bzw. ν_2 hängen nur von elastischen Konstanten des Körpers ab. Die Verschiebungsfunktionen lassen sich als Fouriersche Transformierte

in der Form

$$\Phi_1 = \int_0^{\infty} A(\lambda) \cdot K_0(v_1 \lambda z) \cdot \sin \lambda z \cdot d\lambda$$

schreiben, wenn ein solcher Körper unendlicher Ausdehnung durch konstante Schubspannungen auf einem gegebenen Mantelabschnitt im Inneren eines zylindrischen Hohlraumes beansprucht wird. Aus den Randbedingungen auf der Mantelfläche lassen sich die beiden Funktionen $A(\lambda)$ bzw. $B(\lambda)$ bestimmen. *A. Kuhelj.*

Rongved, Leif: Force at point in the interior of a semi-infinite solid with fixed boundary. *J. appl. Mech.* **22**, 545—546 (1955).

Mindlin [*Physics* **7**, 195—202 (1936)] löste das Problem der im Innern eines elastischen Halbraumes angreifenden Einzelkraft für den Fall der freien Oberfläche des Halbraumes. Verf. gibt in vorliegender Arbeit auf demselben Wege die Lösung für den Fall, daß die Oberfläche des Halbraumes eingespannt ist. *H. Neuber.*

Bordoni, Piero Giorgio: Limitazioni per gli invarianti di deformazione. *Rend. Mat. e Appl.* **14**, 269—279 (1955).

Verf. betrachtet in einem von den drei Deformationsinvarianten erzeugten Raum alle Punkte, welche realisierbaren Deformationen entsprechen, und gelangt zu einschränkenden Bedingungen für die Deformation und das thermo-elastische Potential. *H. Neuber.*

Belluzzi, Odone: Una classe speciale di fenomeni d'instabilità elastica. *Atti Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., Ann.* **243**^o, *Rend. XI. Ser.* **2**, Nr. 1, 50—59 (1955).

Sternberg, E. and R. A. Eubanks: On the concept of concentrated loads and an extension of the uniqueness theorem in the linear theory of elasticity. *J. rat. Mech. Analysis* **4**, 135—168 (1955).

Verf. zeigt, daß die Voraussetzungen des Eindeutigkeitstheorems der klassischen linearen Elastizitätstheorie in Gegenwart von konzentriert angreifenden (Einzel-) Kräften nicht mehr ausreichend sind, und gelangt durch vorliegende grundlegende Untersuchung zu wichtigen ergänzenden Eindeutigkeitsbedingungen; eine notwendige, jedoch noch nicht hinreichende Bedingung ist hiernach u. a., daß die Ordnung der Singularität der Spannungen mit $O(r_a^{-2})$ übereinstimmen muß, wenn der Abstand des betrachteten Körperpunktes vom Angriffspunkt der Last P_a mit r_a bezeichnet wird. Es wird auf verschiedene Beispiele, u. a. auf den Fall einer gewölbten Oberfläche mit Einzellast Bezug genommen. *H. Neuber.*

Craemer, H.: Fallacies and paradoxa in the plasticity theory. *Acta techn. Acad. Sci. Hungar.* **10**, 73—81, russ., französ. u. deutsche Zusammenfassg. 81, 82 (1955).

Sályi, I.: Comments on Prof. H. Craemer's paper: „Fallacies and paradoxa in the plasticity theory“. *Acta techn. Acad. Sci. Hungar.* **10**, 83—88 u. russ., französ. u. deutsche Zusammenfassg. 89 (1955).

Shield, R. T.: On Coulomb's law of failure in soils. *J. Mech. Phys. Solids* **4**, 10—16 (1955).

Bedeutet c die Kohäsionsspannung und Φ den Winkel der inneren Reibung einer zähen Flüssigkeit, so setzt nach Coulomb (1773) Fließen erst dann ein, wenn für die maximale Schubspannung τ und die Normalspannung σ in wenigstens einer Schnittebene das Kriterium $\tau \leq c - \sigma \cdot \operatorname{tg} \Phi$ (1) verletzt ist. Diese eindeutige Formulierung stellt Verf. einer mehrdeutigen von Drucker (1953) gegenüber und entwickelt eine darauf basierende Plastizitätstheorie. Zur Herleitung des Stoffgesetzes wird dabei (1) in der Gestalt $\tau + \sigma \operatorname{tg} \Phi$ als plastisches Potential [Mises (1928)] angesehen. Anwendung: Die Flüssigkeit werde durch einen rechteckigen (später allgemeiner: konvexen) Querschnitt belastet. Es interessiert die maximale Tragfähigkeit T . Sie entspricht der höchsten Belastung, für welche ein „statisch zulässiges“ (d. h. mit den Randbedingungen verträgliches) Spannungsfeld existiert. Durch An-

gabe eines speziellen solchen gewinnt Verf. eine untere Schranke für T , die etwas niedriger liegt als eine Lösung von Prandtl (1920) für unendlich lange Rechtecke.

H. Lippmann.

Lyons, W. James: Statistico-mechanical theory of deformation, involving the activated state. Amer. J. Phys. 23, 268—275 (1955).

Es wird die Anwendung der Eyringschen Theorie der Reaktionsgeschwindigkeit auf Fließvorgänge in festen Körpern besprochen, wobei von den Grundlagen der statistischen Mechanik ausgegangen wird. Es wird die thermisch aktivierte Bewegung von „Fließeinheiten“ sowohl in kristallinen Körpern als auch in Hochpolymeren behandelt.

A. Seeger.

Pao, Yoh-Han: Extension of the Hertz theory of impact to the viscoelastic case. J. appl. Phys. 26, 1083—1088 (1955).

Durch Verwendung der Laplace-Transformation findet Verf. einen einfachen Zusammenhang zwischen den Lösungen rein elastischer Probleme und den entsprechenden Lösungen für visco-elastische Stoffe. Es wird so eine Beziehung zwischen den Transformaten der Kriech- und Relaxationsfunktion gewonnen, welche schließlich bei Anwendung auf die Hertzsche Theorie deren Modifikation für visco-elastische Stoffe ermöglicht.

H. Neuber.

Semjakin, E. I.: Die Ausbreitung instationärer Störungen in einem zäh-elastischen Medium. Doklady Akad. Nauk SSSR 104, 34—37 (1955) [Russisch].

Ein Verfahren zur Lösung gewisser Randwertaufgaben aus der Theorie der Ausbreitung von nichtstationären Störungen in einem zäh-elastischen Medium wird vorgeschlagen. Man geht aus von der Bewegungsgleichung des zäh-elastischen Mediums

$$(A + 2M) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - M \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \varrho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2, \\ A = \lambda + \lambda' \partial / \partial t, \quad M = \mu + \mu' \partial / \partial t;$$

ϱ die Dichte; $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ die Laméschen bzw. die Zähigkeitskonstanten. Die Lösung der Aufgabe über die Bestimmung des Verschiebungsfeldes in einem zäh-elastischen Halbraum wird in zylindrischen Koordinaten in der Form

$$\mathbf{u}(r, \theta, z, t) = \int_0^\infty \mathbf{u}_0(r, \theta, z, t) R(t, \tau) d\tau$$

gesucht. Dabei ist \mathbf{u}_0 die Lösung der entsprechenden Aufgabe über die Ausbreitung der Störungen in einem ideal elastischen Medium und $R(t, \tau)$ die Lösung folgender Hilfsgleichung

$$(1 + \omega \partial / \partial t) \partial^2 R(t, \tau) / \partial \tau^2 = \partial^2 R(t, \tau) / \partial t^2,$$

$$R(t, \tau)|_{t=0} = \partial R(t, \tau) / \partial t|_{t=0} = 0, \quad (1 + \omega \partial / \partial t) R(t, \tau)|_{\tau=0} = \delta(t),$$

wo ω eine Konstante und $\delta(t)$ die Diracsche Funktion bezeichnet. Das Verfahren besteht in der Anwendung der sog. unvollständigen Trennung von Veränderlichen und einer nachträglichen besonderen Transformation. Als Beispiel wird die Lösung einer Aufgabe für den elastischen Halbraum bei besonderen Randbedingungen gegeben.

T. P. Angelitch.

Semjakin, E. I.: Das Lambsche Problem für ein Medium mit elastischer Nachwirkung. Doklady Akad. Nauk SSSR 104, 193—196 (1955) [Russisch].

Folgendes Problem wird behandelt: Im Halbraum $z > 0$, der sich für $t > 0$ in Ruhe befindet, sind die Funktionen $\varphi(x, y, z, t)$ und $\vec{\psi}(x, y, z, t)$ zu bestimmen, welche den Gleichungen

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi(t) - \omega \int_0^t h(t - \tau) \Delta \varphi(\tau) d\tau, \quad a = \sqrt{\frac{\varrho}{\lambda + 2\mu}} \\ b^2 \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} = \Delta \vec{\psi}(t) - \omega \int_0^t h(t - \tau) \Delta \vec{\psi}(\tau) d\tau, \quad b = \sqrt{\frac{\varrho}{\mu}}$$

genügen. Dabei sind die Anfangswerte ($t = 0$)

$$\varphi = \partial\varphi/\partial t = 0; \quad \vec{\psi} = \partial\vec{\psi}/\partial t = 0$$

und die Randwertbedingungen ($z = 0$), die nicht explicite angegeben sind, erhält man, wenn man die sog. Boltzmannschen Beziehungen zwischen den Deformationen und Spannungen durch die Funktionen φ und $\vec{\psi}$ ausdrückt. Zur Lösung des aufgestellten Problems benützt der Verf. seine in der vorstehend besprochenen Arbeit vorgeschlagene Methode mit entsprechenden Änderungen. *T. P. Angelitch.*

Hopkins, H. G.: On the behaviour of infinitely long rigid-plastic beams under transverse concentrated load. *J. Mech. Phys. Solids* 4, 38—52 (1955).

Ein unendlich langer Balken (Längskoordinate x) wird in einer Symmetrieebene des Querschnittes zeitlich und räumlich veränderlich durch die Querkraftdichte $p(x, t)$ belastet und erfährt die Auslenkung $y(x, t)$. Querkräfte werden lediglich zur Berechnung des Momentes M herangezogen, Scher- und Drillverformungen vernachlässigt. Verf. vermeidet das Rechnen mit Spannungen durch Idealisierung des Fließkriteriums zu $|M| = M_0$ im plastischen, $|M| < M_0$ im starren Zustande ($M_0 = \text{const} > 0$). Allgemeine Ansätze, Formulierung der mathematischen Voraussetzungen. Gleichungen (7)—(10) sind jedoch falsch [Beispiel: $\xi(t) = t$; $y = 0$ für $x \leq \xi$, $y = (x - t) \cdot \sin \{(x + t)/(x - t)\}$ für $x > \xi$ verletzt (7)] und müssen, soweit man sie benötigt, postuliert werden. Spezielles Problem: konzentrierte Kraft $P(t)$ bei $x = 0$, eingeprägte Geschwindigkeit $\dot{y}(0, t) = v(t)$. Voraussetzungen: (1) $v(t)/t$ wächst nicht mit der Zeit; (2) plastischer Zustand herrscht lediglich in drei Querschnitten $x = -\xi(t)$, 0 , $\xi(t)$ (wobei $\xi(0) = 0$). (1) ist notwendig für (2). Es ergeben sich einfache Formeln für P , M , y , ξ während zweier Phasen: (I) Belastung $P(t) > 0$, $0 \leq t \leq \tau$; (II) Entlastung $P(t) = 0$, $\tau < t$. Anwendungsbeispiel: $v(t) = c \cdot t^a$ ($a \leq 1$). Graphische Darstellung der Ergebnisse.

H. Lippmann.

Großman, P. U. A. and R. S. T. Kingston: Mechanical conditioning of high polymers. *Austral. J. appl. Sci.* 6, 442—452 (1955).

The effect of an irrecoverable initial deformation proceeding for a short time at a rapidly decreasing rate under the applied stress and usually referred to as „permanent set“ but here called „mechanical conditioning“, is studied with respect to its inclusion in the linear visco-elastic equation through which, in the absence of „permanent set“ the creep and relaxation functions are interrelated. It is found that the existence of a function representing the „permanent set“ observed in polymers interferes with the linear interrelation between creep and relaxation, unless this function is introduced in the form of a linear viscous flow term.

A. M. Freudenthal.

Bland, D. R. and E. H. Lee: Calculation of the complex modulus of linear viscoelastic materials from vibrating reed measurements. *J. appl. Phys.* 26, 1497—1503 (1955).

This paper is describing two methods of determination of the complex modulus of a linear viscoelastic material governed by the following equation of state (1) $P(\sigma) = Q(\epsilon)$ where P and Q are polynomials in the operator $(\partial/\partial t)$ with constant coefficients while σ and ϵ are respectively the stress and strain. The dynamic system used, is a vibrating reed clamped at the driven end and free at the other end. The clamped end is given a steady oscillatory motion while the motion of the free end over a range of frequency is being measured. In the first method both the amplitude and the phase lag of the free end are supposed to be known from measurements. The second method uses only amplitude frequency curves taken by measurements at resonance and is useful when the imaginary part of the complex modulus does not exceed one-half of the real modulus. The latter method is given to be used when an iron pin is stuck through the end for more accurate measurements. It is important

to emphasize that by using the general strain-stress relation (1) this analysis is essentially different from the preceding ones which were based on an arbitrary assumption that the material behaves according to a special form of this relation.

M. Predeleanu.

Eringen, A. Cemal: On the nonlinear oscillations of viscoelastic plates. *J. appl. Mech.* **22**, 563—567 (1955).

The author deduces a two-dimensional theory of flexural oscillations for plates by integrating across the plate thickness the three-dimensional equations of motion in the case of finite deformations. In effecting computations, the components of the displacement vector are assumed to have power-series expansions in the transverse coordinate and a systematic perturbation procedure in a nondimensional thickness parameter is used. In comparison to the previous theories, this theory comprises: a) the effect of large deformation, b) effects of shear deformations and rotary inertia, c) body force and moments, d) the effect of viscoelastic behaviour of material specified by linear relations between the components of stress, strain and derivatives with respect to time.

M. Predeleanu.

Huth, J. H. and J. D. Cole: Elastic-stress waves produced by pressure loads on a spherical shell. *J. appl. Mech.* **22**, 473—478 (1955).

The paper treats the problem of stresses in a spherical elastic shell subjected to a plane pressure wave traveling across it with constant speed, a case of technical interest when considering the effect of blast waves on the structure of a missile in flight. Zusammenfassg. der Verf.

Ghosh, M. and K. Ray: Dynamics of the vibration of a bar excited by transverse impact of an elastic load. II. *Indian J. theor. Phys.* **3**, 151—160 (1955).

(Teil I, dies. Zbl. **67**, 176.) Ein elastischer Balken ist an einem Ende eingespannt, am anderen Ende wird er durch transversal gerichtete Schläge mit einem elastischen Hammer beansprucht. Berechnet werden die Ausdrücke für die Verrückungen am Punkt der Beanspruchung, und für den Druck während der Schläge. Der Fall des „harten Hammers“ wird aus dem allgemeinen Fall durch Spezialisieren der elastischen Konstanten auf den Wert unendlich abgeleitet.

E. Hardtwig.

Herrmann, G.: Forced motions of Timoshenko beams. *J. appl. Mech.* **22**, 53—56 (1955).

Verf. zeigt einen Weg für die Behandlung von Timoshenkos Differentialgleichungen der erzwungenen Biegeschwingungen elastischer Stäbe mit Berücksichtigung des Trägheitsmomentes und der Querkraftschubdeformation, wobei auf die freien Hauptschwingungen Bezug genommen wird und entsprechend einem Verfahren von Mindlin und Goodman zeitabhängige Randbedingungen in Betracht gezogen werden.

H. Neuber.

Diziöglü, Bekir: Temperatur-, Zähigkeits- und Reibungsverhältnisse in raschlaufenden Gleitlagern. 50 Jahre Grenzschichtforschung 236—256 (1955).

Ausgehend von der Energiegleichung der zähen Strömung wird für ein raschlaufendes Lager unendlicher Breite, in welchem wegen der konzentrischen Lage von Welle und Schale im Spalt eine Couette-Strömung angenommen werden kann, unter Berücksichtigung der Reibungswärme die Temperatur- und Zähigkeitsverteilung im Schmiermittel mit Näherungsansätzen für folgende drei Fälle berechnet: Wärmeübergang an Schale und Welle; kein Wärmeübergang an der Welle, die durch Reibungswärme geheizt wird; kein Wärmeübergang, die Wärme bleibt im Schmiermittel. Die ermittelten Reibungszahlen weichen bei großen Sommerfeld-Zahlen merklich von der Petroffschen Geraden ab.

J. Pretsch.

Hydrodynamik:

Žuravlev, P. A.: Anwendung der Methode von S. A. Christianovič zur Untersuchung der Bewegung einer Flüssigkeit mit freier Oberfläche. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **102**, 899—902 (1955) [Russisch].

Fadnis, B. S.: Axisymmetric flow in perfect fluid. I. Motion about a spheroid and circular disc. — II. Motion of a paraboloid of revolution along the axis of a rotating liquid. *Bull. Calcutta math. Soc.* **47**, 143—152; 249—254 (1955).

Betrachtet werden Strömungen einer idealen Flüssigkeit um Rotationskörper mit konstanter Anströmgeschwindigkeit parallel zur Rotationsachse, um welche die Flüssigkeit noch mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotieren soll. Strömungen dieser Art sind, wie G. J. Taylor [*Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **102**, 180—189 (1922)] am Beispiel der Kugel gezeigt hat, mittels der üblichen Randbedingung des Gleitens längs der Oberfläche nicht eindeutig bestimmbar; sie werden es jedoch, wenn man zusätzlich Haften der Flüssigkeit an der Oberfläche fordert. Nach S. D. Nigam (unpublizierte Arbeit 1953) lassen sich die Bewegungsgleichungen in krummlinigen orthogonalen Koordinaten auf eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung für die Stromfunktion reduzieren. In I wird für Sphäroide und den Grenzfall der kreisrunden Scheibe die in Zylinderkoordinaten geschriebene Gleichung mittels Variablentrennung exakt in zugeordneten Legendreschen Polynomen und Besselfunktionen der halben Ordnung integriert und die eindeutige Lösung angegeben. In II wird die eindeutige Lösung für Paraboloid exakt in Whittakerschen Funktionen angegeben. *W. Szablewski.*

Carrier, G. F.: The mechanics of the Rijke tube. *Quart. appl. Math.* **12**, 383—395 (1955).

Ein beiderseits offenes, senkrecht stehendes Rohr (Orgelpfeife) kann unter gewissen Bedingungen durch Erhitzen eines im Rohr befindlichen Drahtnetzes zum Ertönen gebracht werden. Dieser vor hundert Jahren entdeckte Effekt wurde schon von mehreren Autoren mit mehr oder weniger großen Vernachlässigungen theoretisch behandelt. In der vorliegenden Arbeit wird — ausgehend von der Kontinuitätsgleichung, dem Energiesatz unter Berücksichtigung der Wärmeleitung, den Navier-Stokesschen Gleichungen und der Zustandsgleichung für ideale Gase — untersucht, wann ein Rohr anfängt zu tönen. Die Gleichungen werden näherungsweise gelöst, wobei angenommen wird, daß die verschiedenen Feldgrößen aus einem zeitunabhängigen und einem im Vergleich dazu sehr kleinen zeitabhängigen Anteil bestehen. Aus den Randbedingungen ergibt sich dann eine Gleichung für die Wellenzahlen, aus denen sich ersehen läßt, ob das Rohr tönt oder nicht. *M. Heckl.*

Cap, F.: Über Strömungsvorgänge, die mit einer Verbrennung gekoppelt sind. Bericht V. Internat. astronaut. Kongr. 264—273 (1955).

Es werden Gasströmungen betrachtet, in denen Flüssigkeitströpfchen mitgerissen werden, die dabei allmählich verbrennen und zu Gas werden. Für diese Gasquellen wird eine geringere bis gleiche Geschwindigkeit wie für das Gas angenommen. Die mit der Gasbildung verbundene Entropieänderung läßt Verf. in dieser Untersuchung beiseite und versucht nur, die sonst (adiabatisch) erforderlichen Änderungen der gasdynamischen Gleichungen aufzustellen. Auf die Bewegung der Gasquellen selber wirken der Druckgradient und die Stokessche Reibungskraft (Tröpfchen als Kugeln). Für die Strömungsgleichung werden zwei Ansätze (II, 1) und (II, 4) erwogen, von denen Verf. den zweiten für zutreffender hält. (Nach Ansicht des Ref. sind beide falsch; der zweite wäre richtig, hätte nicht Verf. dort noch die Reibungskraft hinzugefügt, die als innere Kraft die Gesamt-Impulsdichte der Strömung nicht ändern kann). Für die Gasbildungsichte (d. i. also: die Verbrennungsgeschwindigkeit) D wird vorgeschlagen, experimentell die Abhängigkeit von Druck und Temperatur zu bestimmen, dann aber wird unvermittelt angenommen, D sei als Funktion von Ort und Zeit gegeben. Für das so verbleibende Gleichungssystem wird in zwei Hauptfällen der Weg zur Lösung mit Charakteristiken gezeigt. *U. T. Bödevadt.*

Glansdorff, P., A. Jaumotte et J. Baland: Sur la puissance utile des propulseurs à réaction par jets. *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **41**, 1029—1036 (1955).

Die Begriffe der „Nutzleistung“, „verfügbaren Leistung“, und des „Wirkungsgrades“ von Strahltriebwerken sind in der Literatur in verschiedener Bedeutung verwendet worden, so daß sich manche Unstimmigkeiten ergaben. Die Verff. stellen sich die verdienstvolle Aufgabe, in der oben angegebenen und der nachstehend referierten Arbeit diese Grundbegriffe zu klären. Sie beginnen mit der Definition von „abgeschlossenen“ und „offenen“ bewegten Systemen und geben die Fundamentalformeln für die substantiellen Ableitungen von Strömungsgrößen bei einem Triebwerk im raumfesten und körperfesten (bewegten) Bezugssystem an. Die Verff. beschränken sich dann auf geradlinig gegeneinander bewegte Bezugssysteme und schreiben die Energiegleichungen nieder. Hieraus leiten sie die Formeln für die Nutzleistung ab. Die beiden Spezialfälle der Rakete und des Turbinentriebwerkes werden schließlich erörtert.

E. Meister.

Glansdorff, P., A. Jaumotte et J. Baland: Sur la puissance disponible et le rendement de propulsion des moteurs à réaction par jets. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 41, 1264—1280 (1955).

Im Anschluß an den ersten Teil der Arbeit (s. vorstehendes Referat) leiten die Verff. zunächst die Formel für die „relative Nutzleistung“ ab und definieren dann den Begriff der „verfügbaren Leistung“ eines Triebwerkes. Der Quotient aus Nutzleistung zu verfügbarer Leistung ist rein mechanisch definiert und wird als „mechanischer Wirkungsgrad“ des Triebwerkes bezeichnet. Die Autoren wenden ihre gewonnenen Formeln dann auf die Spezialfälle der Rakete und der Turbinen- und Staustrahltriebwerke im stationären Betrieb ab. Sie geben explizite Ausdrücke für den Schub, die verschiedenen Leistungen und den mechanischen Wirkungsgrad an, die noch auf dimensionslose Größen umgerechnet werden. Für $v_r = \text{const.}$ sind diese in einem Diagramm als Funktionen von $v = v_r/v_a$ aufgetragen. (v_r : Geschwindigkeit des Gases im Triebwerk bez. eines körperfesten Koordinatensystems, v_a : Geschwindigkeit des Gases im Triebwerk bez. eines raumfesten Koordinatensystems.) Zum Schluß werden für Turbinen- und Staustrahltriebwerke noch Näherungsformeln angegeben.

E. Meister.

● **Hecht, F.** (Im Auftrage der Österreichischen Gesellschaft für Weltraumforschung herausgegeben von): Bericht über den V. Internationalen Astronautischen Kongreß Innsbruck, 5. bis 7. August 1954. Wien/Innsbruck: Springer Verlag 1955. VI, 307 p. DM 58,—.

Die Arbeiten werden, soweit für dieses Zbl. von Interesse, einzeln angezeigt.

● **Ferri, Antonio, Nicholas J. Hoff and Paul A. Libby** (edited by): Proceedings of the conference on high-speed aeronautics, January 20—22, 1955. Brooklyn/New York: Polytechnic Institute of Brooklyn 1955. VI, 392 p.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

● **Ballabh, R.:** Steady superposable flows with cylindrical symmetry. *Gapita* 6, 15—21 (1955).

In Fortsetzung früherer Mitteilungen [Proc. Benares math. Soc., n. Ser. 2, 69—79 (1940) und dies. Zbl. 47, 437] werden allgemein die Bedingungen für die Überlagerbarkeit drehungsfreier und drehungsbehafteter Strömungen mit Zylindersymmetrie untersucht.

J. Pretsch.

● **Stepanoff, A. J.:** Turboblenders. Theory, design and application of centrifugal and axial flow compressors and fans. New York: John Wiley & Sons, Inc. London: Chapman & Hall, Ltd. 1955. IX, 377 p. \$ 8,—.

● **Hawthorne, W. R.:** Rotational flow through cascades. I. The component of vorticity. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 8, 266—279 (1955).

Für a flow with a non-uniform velocity, passing through a cascade of turbine or compressor blades, the formation of a component of vorticity in the direction of the main stream is examined theoretically. It appears that this component can be decomposed into three parts: (i) a secondary circulation due to the bending of

the flow; the other parts lie in the stagnation streamlines leaving the blades viz. (ii) a trailing shed circulation due to change in circulation along the span, (iii) a trailing filament circulation due to a stretching of the vortex filaments carried with the flow, as a result of the non uniformity of the flow between two blades. Applications to cascades and isolated aerofoils are discussed briefly. *A. van Heemert.*

Hawthorne, W. R. and W. D. Armstrong: Rotational flow through cascades. II. The circulation about the cascade. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 8, 280—292 (1955).

Analysis of experimental results shows the adequacy of the postulation of a trailing filament vorticity (see preceding review). It is further shown that the secondary flow tends to cause a stalling of the blades near the wall of the turbine and a similar behaviour for isolated aerofoils in non uniform flow is predicted.

A. van Heemert.

Bergman, Stefan: Tables for the determination of fundamental solutions of compressible fluids. *Math. Tables Aids Comput.* 9, 8—14 (1955).

In der vom Verf. entwickelten Theorie der Unterschallströmungen (Bergman, dies. Zbl. 32, 229) kann das Potential in der Hodographenebene als Funktion des Geschwindigkeitsvektors angegeben werden. Einige hierbei auftretende Integrale werden in vorliegender Arbeit tabelliert.

C. Heinz.

Kuessner, H. G.: The difference property of the kernel of the unsteady lifting surface theory. *J. aeronaut. Sci.* 22, 227—230 (1955).

Verf. beweist, daß sich der Kern der Integraldarstellung des Geschwindigkeitspotentials für die Störbewegung einer kompressiblen Unterschallströmung um eine harmonisch schwingende Tragfläche als Differenzkern schreiben läßt. Daraus folgert er einige Formeln für die zugehörige Umkehrströmung. Für die charakteristische Funktion des Problems ergibt sich eine zur Differenzeigenschaft des Kernes äquivalente Determinantenbedingung. Schließlich gibt der Autor noch eine Integraldarstellung für das Stördruckfeld an, die auf Grund der obengenannten Eigenschaften eine ganz analoge Form zu der im inkompressiblen Fall hat (siehe auch: H. G. Küssner dies. Zbl. 51, 174; 55, 188).

E. Meister.

McCormick, B. W.: The effect of a finite hub on the optimum propeller. *J. aeronaut. Sci.* 22, 645—650 (1955).

Verf. leitet die Formeln für das Geschwindigkeitspotential und die Zirkulationsverteilung bei einem mehrflügligen Propeller mit endlichem Nabenradius auf Grund der Theorie von Goldstein her [*Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 123, 440 (1929)]. Die Koeffizienten der Reihenentwicklung für das Potential müssen aus einem unendlichen Gleichungssystem bestimmt werden. Dabei unterscheiden sich jedoch die Elemente der zugehörigen Koeffizientenmatrix von denen bei Goldstein (Nabenradius = 0) nur um kleine Störungsglieder. Von der bekannten Goldsteinschen Lösung ausgehend gewinnt der Verfasser dann die Koeffizienten der Reihe für das Potential mit Hilfe eines Approximationsverfahrens, das sehr rasch konvergiert. In einer graphischen Darstellung gibt er dann seine Rechenergebnisse für 2-, 4-, 6- und 8-flüglige Propeller mit verschiedenen Nabenverhältnissen an. Es ist sofort zu erkennen, daß die Zirkulation in der Nähe der Nabenwand bei Vorhandensein einer Nabe größer ist als ohne Nabe und zwar ist der Unterschied um so kleiner, je größer die Blattzahl ist. Zu den Flügelspitzen hin nimmt die Differenz der Zirkulationswerte rasch ab, so daß etwa bei einem achtflügligen Propeller mit einem Nabenverhältnis von 0,4 für das 0,5-fache des Flügelradius der Unterschied nur noch 2% des Zirkulationswertes ohne Nabe beträgt.

E. Meister.

Müller, Wilhelm: Über die Flügelschwingungen eines Hub- oder Tragschraubers beim Vorwärtsflug. *Z. angew. Math. Mech.* 35, 385—396 (1955).

Hohenemser, Kurt H.: Selbsterregte Schlagschwingungen von Drehflügeln bei hohem Fortschrittsgrad. *Z. angew. Math. Mech.* 35, 201—210 (1955).

Der Verf. stellt die nichtlineare Differentialgleichung der Schlagbewegung eines

starren Blattes bei einem Drehflügel mit hohem Fortschrittsgrad auf. Die Luftkräfte werden als quasistationär angesehen. (Siehe auch: K. Hohenemser, Proc. Eighth Annual Forum, Amer. Helic. Soc., p. 147, May 1952.) Die genannte Differentialgleichung für den Schlagwinkel β wird zunächst linearisiert. Die von dem Drehwinkel ψ des Rotors abhängigen periodischen Koeffizienten der Gleichung sind in Diagrammen aufgetragen. Die linearisierte Gleichung wird dann auf die Schwingungsgleichung reduziert, die nach einer Differenzenmethode gelöst wird im Gegensatz zum früheren „Twin Ripple“-Verfahren. Der Verfasser benutzt 24 bzw. 48 Teilpunkte für den Zeitraum einer Rotorumdrehung. Während die „Twin Ripple“-Methode eine stark gedämpfte Bewegung des Blattes ergibt, kommt der Autor mit dem neuen Verfahren der wirklichen an die Grenzen der Stabilität führenden Bewegung recht nahe. Er studiert dann noch den Einfluß der drei Parameter: Blattwinkel-Schlagwinkelkoppelung, Fortschrittsgrad und Blattträgheitszahl und gibt seine Ergebnisse in Form von Diagrammen an. Er erwartet noch bessere Übereinstimmung seiner Theorie mit den Messungen, wenn die elastischen Blatteigenschaften und die instationären Luftkräfte Berücksichtigung finden. *E. Meister.*

Kaeppler, H. J. und M. E. Kübler: Die Rückkehr von geflügelten Geräten von Außenstationsbahnen. Bericht V. Internat. astronaut. Kongr. 120—149 (1955).

Um von einer Außenstationsbahn herunterzukommen, ist es nötig, die Geschwindigkeit (meist über 7 km/sec) stark herabzusetzen. Schon früh ist vorgeschlagen worden, dazu den Luftwiderstand zu benutzen. Um die damit verbundene Erwärmung technisch zu beherrschen, muß man wissen, wie Verzögerung und Erwärmung von den Gerätdaten und der gewählten Bahn abhängen. Analytische Lösungen können wegen der vielen Parameter eher Überblick gewähren als numerische Lösungen. Über die Bahn machten die Verff. folgende Voraussetzungen: Ausgehend von einer höchstens schwach exzentrischen Stationsbahn soll das Gerät durch einen passend bemessenen Bremsstoß seine Geschwindigkeit etwas vermindern, um auf einer Übergangsellipse an die obere Grenze der dichteren Luftschichten zu gelangen, wo der (zunächst abwärts gerichtete) Auftrieb es verhindern kann, wieder emporzusteigen. Auf dieser Grenzhöhe (etwa 80 bis 100 km) wird es eine Zeitlang kreisen und dabei etwas Geschwindigkeit verlieren, um dann in eine Gleitbahn konstanter Neigung überzugehen. Diese Überschallgleitbahn ist also eine logarithmische Spirale. Beim Schalldurchgang müßte der Anstellungswinkel α vorübergehend = 0 genommen werden, worauf dann der Gleitflug im Unterschall bis zur Landung durchgeführt wird. — Die Stärke des ersten Bremsstoßes ist durch Ausgangsbahn und gewählte Anfangshöhe der Gleitbahn bestimmt, die dazu nötigen Formeln werden aufgeführt, auch eine Formel für die Endneigung der Bremsbahn wird gegeben. Für die Überschallgleitbahn wird die Schwerebeschleunigung durch einen festen Mittelwert ersetzt, die Luftdichte als Exponentialfunktion der Höhe und die Schallgeschwindigkeit als konstant angenommen (wie in der Normal-Stratosphäre). Für Widerstandsbeiwert $c_w = c_0 + c_2 \alpha^2$ und Auftriebsbeiwert $c_u = c_1 \alpha$ werden c_0, c_1, c_2 im Unterschall konstant genommen, während im Überschall $c_1 = k_2 v^{-1}$ und $c_0 = k_3 + k_4 v^{-2}$ genommen werden. Damit ist erreicht, daß sich die Geschwindigkeit mit Hilfe des Exponentialintegrals als Funktion der Höhe angeben läßt, wie das unter den gewählten Voraussetzungen bei $\alpha = 0$ (z. B. bei senkrechtem Aufstieg) bekannt ist. Um auch die Zeit zu bekommen, wird für α^2 in c_w ein fester mittlerer Wert angenommen, was wegen der lange nur geringen Abnahme der Fluggeschwindigkeit berechtigt ist. Mit der so erhaltenen Lösung ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für das Maximum des Staudrucks und unter bestimmten weiteren Annahmen auch für die stärkste Erwärmung, wobei eine graphische Lösung gezeigt wird. Für den Schwebeflug auf der Grenzhöhe (zwischen der Abstiegsellipse und der Überschallgleitbahn) läßt sich die Zeit als Funktion der Geschwindigkeit elementar integrieren. Für den

Weg hierbei wird eine Näherung angegeben unter Verwendung eines Mittelwertes von α , der dann ersatzweise aus dem Zeitgesetz bestimmt wird. *U. T. Bödewadt.*

Young, A. D. and S. Kirkby: The profile drag of biconvex wing sections at supersonic speeds. 50 Jahre Grenzschichtforschung 419—431 (1955).

Für eine ebene Platte und zwei bikonvexe Flügelprofile verschiedener Dicke wird die laminare und turbulente kompressible Grenzschicht bei wärmeisolierter Wand berechnet und zwar für die Machzahlen 1,5, 2,5 und 5 und für die mit der Flügeltiefe gebildeten Reynoldszahlen 10^6 , 10^7 und 10^8 . Die Übergangsstelle zwischen laminarer und turbulenter Grenzschicht wird über die ganze Flügeltiefe variiert. Bei der näherungsweise Berechnung nach dem Impulssatzverfahren wird die Prandtl'sche Zahl $Pr = 0,72$ angenommen und für die Zähigkeits-Temperatur-Beziehung ein Potenzgesetz vorausgesetzt. Die Ergebnisse werden benutzt, um die Oberflächenreibung und den Formwiderstand zu berechnen. Die in Form von Tabellen und Kurventafeln niedergelegten Ergebnisse zeigen, daß bei wachsender Machzahl, wachsender Flügeldicke und abnehmender Reynoldszahl der Unterschied zwischen vollturbulenter und volllaminarer Grenzschicht immer mehr abnimmt. *W. Wuest.*

Pai, S. I. and S. F. Shen: Hypersonic viscous flow over an inclined wedge with heat transfer. 50 Jahre Grenzschichtforschung 112—121 (1955).

Die Hyperschallströmung an einem schräg angeströmten Keil mit Wärmeübergang wird mit einem verallgemeinerten v. Kármánschen Integralverfahren untersucht und zwar unter Beschränkung auf die gewöhnliche Gasdynamik, also ohne Berücksichtigung von Dissoziation oder Gleitströmung. Die Untersuchung bezieht sich auf den Bereich in der Nähe der Vorderkante, deren unmittelbare Umgebung aber ausgeschlossen bleibt, da dort die Grenzschichtvernachlässigungen nicht mehr gültig sind. Nach Einführung einer Temperaturfunktion S und einiger Hyperschallnäherungen führt die Methode der Impuls- und Energieintegrale auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für die Grenzschichtdicke und eine Wärmeübergangsfunktion, welche die wesentlichen Unbekannten des Problems sind. Die Gleichungen werden zunächst durch Reihenentwicklung gelöst, wobei die Koeffizienten Funktionen eines Wärmeübergangsparameters S_0 sind. Die Lösungen können durch numerische Integration über den Konvergenzbereich der Reihen hinaus fortgesetzt werden. Zwei Sonderfälle werden ausführlich numerisch behandelt, um die Rückwirkung der Stoßwelle zu zeigen, und zwar einmal der Fall kleinen Wärmeüberganges (fast isolierte Platte) und der Fall großen Wärmeüberganges, wobei die Oberflächentemperatur nahezu der ungestörten Temperatur entspricht. Numerische Ergebnisse werden für die ebene Platte bei $Ma = 10$ gegeben. Es zeigt sich, daß die örtlichen Reibungs- und Wärmeübertragungskoeffizienten wesentlich durch die Zähigkeitskoeffizienten in der Nähe der Körperoberfläche bestimmt sind. *W. Wuest.*

● **Fung, Y. C.:** An introduction to the theory of aero-elasticity. (Galcit Aeronautical Series.) New York: John Wiley and Sons, Inc.; London: Chapman & Hall 1955. X, 490 p. illustr. 84 s. net.

Das Erscheinen dieses Buches wird dankbar begrüßt werden von allen Studenten und Ingenieuren, die sich in das umfangreiche Gebiet der Aeroelastizität einarbeiten wollen. Der Verf. nennt selbst sein Werk eine Einführung in den genannten Problembereich; so darf man nicht erwarten, Antwort zu finden auf die kompliziertesten Einzelfragen. Es ist ja zunächst für den Lernenden wichtig, sich in die neue Disziplin hineinzufinden, in der, wie der Name schon sagt, eine starke Wechselwirkung zwischen der Aerodynamik und der Elastizitätstheorie stattfindet. Am Ende der einzelnen Kapitel hat der Verf. sehr sorgfältig die Literatur der Originalarbeiten zusammengetragen und auf den neuesten Stand zur Zeit der Publikation des Buches (1955) gebracht. Die zitierten Arbeiten sind sehr stark gegliedert nach den speziellen Fragen, so daß man ohne mühsames Suchen sofort die Titel findet. Das Buch ist deshalb besonders für Studierende geeignet, weil es keine besonders hohen mathematischen

Vorkenntnisse erfordert und durch Diagramme belebt wird. Am Anfang stehen die grundlegenden Tatsachen aus der Elastizitätstheorie des Balkens, wobei die Begriffe der Einflußfunktionen definiert werden. Es werden dann die verschiedenen Schwingungsarten behandelt und Beispiele für das Auftreten in der Aeroelastizität und anderen Bereichen der Mechanik gegeben. Die Rückführung der Differentialgleichungen usw. auf lineare Gleichungssysteme und ihre moderne Behandlung mit Matrizen ist ausführlich dargestellt. Es sind dann mehrere Abschnitte der Theorie der Auftriebsverteilung auf Flügeln gewidmet und es werden die Wirkungen elastischer Deformationen auf die Flugzeugteile erörtert. Dann wird die Phänomenologie des Flatterns beschrieben. Im Kapitel 6 geht der Verf. bei den Grundlagen des Flattervorganges mehr ins einzelne, im Kapitel 7 befaßt er sich mit den dreidimensionalen Erscheinungen und diskutiert die Grenzen der linearen Theorie. Hierzu ist eine besonders umfangreiche Bibliographie angegeben. Anschließend wird die instationäre Aerodynamik der Böen behandelt, und der Leser findet die Grundbegriffe der Turbulenztheorie. Weiter schneidet der Verf. die Fragen des Flatterns im abgerissenen Gebiet an, und er illustriert den Text durch eine Reihe von Diagrammen von Meßergebnissen an NACA-Profilen. Viele aeroelastische Probleme lassen sich mit Hilfe der Laplace-Transformation lösen, für die er eine Einführung gibt und sie auf die Böenrechnungen anwendet. Kapitel 11 stellt in Kürze eine Einführung in die Operatorentheorie dar, deren Wert an einigen Beispielen gezeigt wird. Die Aerodynamik der instationären, zweidimensionalen Strömungen im inkompressiblen und kompressiblen Fall wird dann eingehend behandelt. Hier findet man die Ergebnisse der Untersuchungen von Theodorsen, Küssner, Karman-Sears u. a. wieder. Der ebene kompressible Fall wird mit Hilfe des Beschleunigungspotentials und Rückführung auf die Possiosche Integralgleichung bearbeitet. Die Resultate sind in drei Tafeln tabuliert. In Kapitel 15 diskutiert der Verf. die experimentellen Ergebnisse der beliebigen instationären Bewegungen von Profilen, wobei der Praktiker hier reichlich Literaturstellen findet. In einem mathematischen Anhang sind das Routh-Hurwitzsche Stabilitätskriterium und eine Integralauswertung angegeben. Das vorliegende Buch sei wärmstens empfohlen beim Grundstudium der Aeroelastizität. Druck und Einband sind sehr ansprechend. *E. Meister.*

• **Bisplinghoff, R. L., Holt Ashley and R. L. Halfman: Aeroelasticity.** Cambridge, Mass: Addison-Wesley Publ. Co., Inc. 1955. IX, 860 p. \$ 14,50.

Das Erscheinen dieses ausgezeichneten Buches, das erste seiner Art, wird wohl von allen Ingenieuren und Aerodynamikern, die irgendwie in ihrer Arbeit auf Fragen der „Aeroelastizität“ stoßen, freudig begrüßt werden. Die Bedeutung dieses wichtigen Teilgebietes der Flugwissenschaft ist ständig gewachsen und auch heute hält diese Entwicklung an. Es wird aber immer schwieriger, sich an Hand der umfangreichen Spezialliteratur zu orientieren, so daß es hoch anerkannt werden muß, daß die drei Verff. das wichtigste Material zusammengetragen und es sorgfältig gegliedert haben. Zunächst haben sie eine grobe Einteilung des Stoffes vorgenommen und es haben R. L. Bisplinghoff die elastischen Probleme eines Tragflügels, H. Ashley die aerodynamischen Grundlagen der instationären Strömungen und R. L. Halfman die Fragen geeigneter Versuchsanordnungen zur Prüfung der Theorie behandelt. Die Zusammenarbeit zwischen den drei Verff. ist so gut gewesen, daß das ganze Werk wie aus einem Guß erscheint. Wegen des großen Umfanges des Buches wird sich verständlicherweise der Referent nur auf eine recht skizzenhafte Beschreibung beschränken müssen, bei der gerade die Feinheiten verlorengehen müssen, die das Buch auszeichnen. Am Anfang des Werkes steht ein historischer Überblick, wie man durch die immer größer werdenden Fluggeschwindigkeiten und dünner werdenden Flügel zum Studium aeroelastischer Fragen geführt wurde. Es wird dann eine Aufgliederung der verschiedenen Erscheinungen vorgenommen. Nach diesen einleitenden Betrachtungen führt der erste Verf. in die Theorie elastischer Körper ein und definiert

hierbei die „Einflußfunktionen“ und „-matrizen“, deren Eigenschaften in der Folge studiert werden. Die allgemeinen Methoden zur Behandlung der Balkenbiegung im Hinblick auf Flugzeugflügel werden ausführlich dargelegt (Methode von Rayleigh-Ritz, Zerlegung eines Flügels in Elemente) und durch Beispiele belebt. Die dynamischen Belastungen von Flügeln werden genau erörtert und die Existenz von Eigenschwingungen begründet. Wenn der mehr mathematisch interessierte Leser seine Freude an der Strenge mathematischer Ableitungen hat, dann wird der Praktiker durch die Diagramme und klaren Bezeichnungen angezogen. Die grundlegenden Begriffe der Matrizenalgebra und der Interpolationsverfahren sind in einem Anhang am Schluß des Buches niedergeschrieben, so daß auch der weniger damit Vertraute bald ohne Schwierigkeiten dem Text folgen kann. Die Kapitel über die aerodynamischen Grundlagen beginnen mit den Begriffen der kleinen Störungen einer Grundströmung. Der zweite Verf. beschreibt klar und ausführlich die einzelnen Schritte der Linearisierung der Strömungsgleichungen für den allgemeinen kompressiblen Fall. Nach eingehender Behandlung der Theorie der dünnen Profile und Tragflächen endlicher Spannweite, bei der die Verfahren von Multhopp, Weissinger u. a. in Einzelheiten dargelegt werden, wendet sich Ashley der Theorie der dünnen Profile zu, die in einer zweidimensionalen inkompressiblen Strömung beliebige Bewegungen ausführen. Hier haben die bekannten Arbeiten von Küssner, Schwarz, Söhngen, Sears, Jones u. a. ihren Niederschlag gefunden. Anschließend widmet sich der Verf. der kompressiblen stationären und instationären Strömung, leitet die Integralgleichung von Possio ab und geht auf das Verfahren von Timman mit den Mathieufunktionen ein. Es folgt dann die Theorie beliebiger instationärer Bewegungen im Überschall- und schallnahen -Bereich. Die Untersuchungen von E. Reissner über Flügel in dreidimensionaler Strömung haben ebenfalls Eingang gefunden. Es wird dann noch der Einfluß der Pfeilung und Streckung von Flügeln berücksichtigt. Nach diesen sieben vorbereitenden Kapiteln kann sich der Leser vertraut machen mit den statischen aeroelastischen Erscheinungen, die die einfachsten sind wegen des Fehlens der Zeitabhängigkeit. Eine Reihe von Beispielen werden hier durchgerechnet und die mit verschiedenen Methoden gewonnenen Ergebnisse in Diagrammen dargestellt und miteinander verglichen. Auch hier werden die verschiedensten Flügel mit Ruder usw. behandelt. Besonders den gepfeilten Flügeln ist ein längerer Abschnitt gewidmet. Im neunten Kapitel werden dann ausführlich die eigentlichen Flatterprobleme studiert und durch zahlreiche Beispiele und Diagramme wird der Text belebt. Das Flattern von Rudern und der Einfluß der endlichen Spannweite der Flügel finden weitgehend Berücksichtigung. Während in diesem Kapitel besonders die Erscheinungen bei periodischer Zeitabhängigkeit erörtert werden, wenden sich die Verff. im darauffolgenden Kapitel beliebig zeitabhängigen instationären Vorgängen am Flugzeug zu, wie sie etwa beim Landen oder Eintritt in atmosphärische Böen auftreten. In den weiteren Abschnitten des Buches macht der dritte Verf. den Leser vertraut mit der Modelltheorie und den Verfahren zum Studium der Flattervorgänge im Windkanal. Eine große Zahl von Abbildungen läßt hier den Meßingenieur Antwort finden auf seine Fragen und er erkennt die Bedeutung der Zusammenarbeit der Theoretiker mit den Praktikern. Zu jedem Kapitel befindet sich am Ende des Buches ein umfangreiches Literaturverzeichnis, das sich auf dem neuesten Stand der Forschung (bis zum Jahre 1954) befindet. Im mathematischen Anhang sind neben den schon erwähnten Grundbegriffen der Matrizenrechnung die wichtigsten Eigenschaften der Fourierintegrale aufgeführt. Für die heute so wichtigen Untersuchungen über instationäre Probleme in Verdichtern und Turbinen wird der Fachmann viele wertvolle Hinweise entdecken, wenn sich die Verff. auch nicht direkt mit diesen Fragen befassen. Man kann nur wünschen, daß dieses Standardwerk eine große Verbreitung finden möge und neue Mitarbeiter an den schwierigen, aber hochinteressanten instationären Problemen wirbt. Nicht zuletzt sei dem Verlage ge-

dankt für den sehr guten Druck und die Ausstattung des gesamten Werkes.

E. Meister.

Müller, Ernst-August: Theoretische Untersuchungen über die Wechselwirkung zwischen einem einfallenden schwachen Verdichtungsstoß und der laminaren Grenzschicht in einer Überschallströmung. 50 Jahre Grenzschichtforschung 343—363 (1955).

Das Wechselwirkungsproblem einer stationären Überschallströmung mit einer laminaren Grenzschicht bei einfallendem schwachen Stoß wird mittels einer Störungstheorie behandelt. Die Außenströmung wird mit der linearen Überschallgleichung erfaßt. Für die Grenzschichtströmung werden Störungsgleichungen aufgestellt, die aus den Prandtlschen Grenzschichtgleichungen und nicht, wie bei der bekannten instationären Störungstheorie, aus den Navier-Stokes-Gleichungen abgeleitet sind. Dies hat zur Folge, daß die Störungsgleichung des Verf. am Grenzschichttrand nicht in die Störungsgleichung der Außenströmung übergeht, was nach Meinung des Ref. gewisse quantitative Ungenauigkeiten zur Folge haben muß. Bei der mathematischen Behandlung wird für den einfallenden Stoß zunächst eine stetige Kurve angenommen, dann aber im Verlauf der Rechnung zu verschwindender Stoßtiefe übergegangen. Für die Grenzschicht wird ein von x unabhängiges lineares Geschwindigkeitsprofil angesetzt. Dies ermöglicht eine Darstellung der Störungslösung in der Grenzschicht mittels Hankelscher Funktionen. Durch Knüpfen an die Außenlösung lassen sich dann alle freien Konstanten bestimmen. Dabei ergibt sich eine Wirkung stromaufwärts in der Grenzschicht, wie auch schon bei stark vereinfachten Theorien anderer Verf., die angesichts einer parabolischen Grenzschichtgleichung noch nicht ausreichend geklärt erscheint. Dennoch ist in Anbetracht der Schwierigkeit des Problems mit der Arbeit ein schöner Fortschritt und eine erfolgreiche Beschreibung des Versuchsmaterials erzielt worden.

K. Oswatitsch.

Tollmien, W.: 50 Jahre Grenzschichtforschung, ihre Entwicklung und Problematik. 50 Jahre Grenzschichtforschung 1—12 (1955).

In diesem einleitenden Aufsatz wird die Entwicklung der Grenzschichttheorie in großen Linien dargelegt, wobei besonders auf problematische Stellen wie z. B. den noch nicht streng bewiesenen Übergang von den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen zu den Grenzschichtgleichungen hingewiesen wird. Auch dem Übergang der Grenzschichtströmung in die reibungsfreie Außenströmung sowie den Wandbindungen wird besondere Beachtung geschenkt. Der Überblick erstreckt sich auch auf die Stabilitätstheorie laminarer Grenzschichten sowie auf zelluläre Grenzschichtströmungen.

W. Wuest.

• **Brun, E. A.:** Introduction à l'étude de la couche limite. Paris: Gauthier-Villars 1955. 189 p. 1800 fr.

Wie im Vorwort gesagt wird, ist es das Ziel dieser Einführung, in möglichst einfacher Weise die gebräuchlichsten Resultate der Grenzschichttheorie für Flüssigkeiten mit konstanten Stoffbeiwerten darzustellen; ein weiterer Band soll die Behandlung spezieller Probleme bringen. Nach einem einleitenden Kapitel, in dem grundlegende Begriffe sowie allgemeine Definitionen und Sätze gegeben werden, folgt in Kap. 2 die Behandlung der Grenzschicht einer Flüssigkeit mit konstanten Stoffbeiwerten, insbesondere der Grenzschicht an der ebenen Platte; darin sind sowohl Strömungs- als auch Temperaturgrenzschichten enthalten. Kap. 3 enthält Grenzschichten allgemeinerer ebener und rotationssymmetrischer Strömungen. Ein kurzes 4. Kap. (6 Seiten) berichtet über Diffusion. Trotz des begrenzten Ziels, das sich der Verf. gesteckt hat, hält Ref. teilweise eine größere Vollständigkeit für wünschenswert. Ref. vermißt z. B. die dreidimensionalen Grenzschichten oder die Erwähnung von Differenzenverfahren zur Berechnung von Geschwindigkeitsprofilen und Ablösungsstellen. Über die ausgedehnten Studien des laminar-turbulenten Umschlags wird nichts berichtet. Die Beschränkung auf konstante Stoff-

beiwerte bringt es mit sich, daß kompressible Medien nur kurz erwähnt werden. Leider enthält das Buch weder Sach- noch Namensregister, Literaturangaben von Originalarbeiten fehlen ganz. Das Buch dürfte für Leser geeignet sein, denen der Problembereich fremd ist und die mehr an einem einführenden Überblick als an tiefergehenden Fragestellungen interessiert sind.

G. Hämmerlin.

Krzywoblocki, M. Z. v.: On the boundary layer in liquids. 50 Jahre Grenzschichtforschung 80—90 (1955).

Die Arbeit enthält eine gute Zusammenstellung der Ergebnisse und Methoden verschiedener Verff., die das Studium der Strömung innerhalb einer Grenzschicht bei verschiedenen Zustandsgleichungen des strömenden Mediums auf ein Randwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung zurückführen. Neu scheint vor allem die Ausdehnung des Existenzbeweises einer Lösung nach dem Vorgang des Ref. (dies. Zbl. 50, 196) auf folgende beiden Randwertprobleme zu sein: (1) $f''' + \varphi f f'' + \lambda(1 - f^2) \pm K(x) = 0$; $f(0) = 0 = f'(0)$; $f'(\infty) = 1$; $f'(\eta) > 0$ für $0 < \eta < \infty$. Unabhängige Veränderliche ist η , x ist ein Parameter. Ferner für die Temperaturverteilung $t(\eta)$ (2) $t'' + C(f t' - f' t) + L(x) f'^2 = 0$; $t(0) = C^* > 1$; $t(\infty) = 1$; $C > 0$; $L(x) > 0$; weiter einige Voraussetzungen über $f(x)$.

R. Iglisch.

Carrier, G. F.: Integral equation boundary layer problems. 50 Jahre Grenzschichtforschung 13—20 (1955).

Der Ausdruck „Grenzschicht“ bezieht sich hier nicht in erster Linie auf Strömungen bei hohen Reynoldsschen Zahlen, sondern der Autor versteht darunter Probleme, die sich mit Methoden behandeln lassen, welche schon seit längerem in der Grenzschichttheorie erfolgreich angewandt werden. Speziell werden zwei Integralgleichungen, eine inhomogene und eine homogene, untersucht, in denen ein über weite Bereiche veränderlicher Parameter auftritt. Die Verwandtschaft mit Grenzschichtproblemen besteht darin, daß hier unter der Annahme großer Werte dieser Parameter eine asymptotische Lösung gewonnen wird, die bereits bei mäßigen Parameterwerten eine gute Übereinstimmung mit bekannten Lösungen zeigt.

G. Hämmerlin.

Iglisch, Rudolf und Friedrich Kemnitz: Über die in der Grenzschichttheorie auftretende Differentialgleichung $f''' + f f'' + \beta(1 - f^2) = 0$ für $\beta < 0$ bei gewissen Absauge- und Ausblasegesetzen. 50 Jahre Grenzschichtforschung 34—46 (1955).

Im Anschluß an frühere, den Fall $\beta \geq 0$ behandelnde, Arbeiten von R. Iglisch (vgl. dies. Zbl. 50, 196 und 57, 181) wird die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems $f''' + f f'' + \beta(1 - f^2) = 0$, $f(0) = C$, $f'(0) = 0$, $f'(\infty) = 1$ nun für $\beta < 0$, C beliebig, untersucht und folgendes bewiesen: Zu jedem $\beta < 0$ gibt es ein $C^*(\beta)$ derart, daß für alle $C \geq C^*(\beta)$ genau eine, dagegen für $C < C^*(\beta)$ keine Lösung existiert. Für die zu $C^*(\beta)$ gehörende Lösung gilt $f''(0) = 0$. Dabei sind zum Nachweis der Eindeutigkeit noch die Zusatzvoraussetzung $0 < f' < 1$ und die Hartree-Bedingung raschster Annäherung von f' an den Wert 1 erforderlich. Das früher benutzte Beweisverfahren ist hier wesentlich komplizierter. Es wird weiter gezeigt, daß die Kurve $C^*(\beta)$ bei $\beta = 0$ mit $C^*(0) = -0,8757 \dots$ beginnt und bei fallendem β monoton unbeschränkt zunimmt.

H. Witting.

Rheinboldt, Werner: Über die äußere Randbedingung bei den Grenzschichtgleichungen. 50 Jahre Grenzschichtforschung 328—333 (1955).

Unter Benutzung asymptotischer Entwicklungen für die Lösungen der Prandtl'schen Gleichungen einer stationären Grenzschicht wird gezeigt, daß die „äußere Randbedingung“ $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_\infty(x)$ von selbst erfüllt ist, falls a) das Einlaufprofil diese Bedingung erfüllt, b) das Einlaufprofil und alle Ableitungen asymptotische Entwicklungen haben und c) die Lösungen in x analytisch sind. Die Voraussetzungen sind in der Zwischenzeit vom Verf. und weiter von K. Nickel wesentlich abgeschwächt worden.

H. Witting.

Flügge-Lotz, I.: A difference method for the computation of the laminar compressible boundary layer. 50 Jahre Grenzschichtforschung 393—406 (1955).

Ausgehend von den Croccoschen Grenzschichtgleichungen wird ein Differenzenverfahren zur Berechnung von Schubspannung und Enthalpie als Funktionen von x (Koordinate längs der Wand) und der Geschwindigkeitskomponente parallel zur Wand eingehend und sorgfältig diskutiert. Zwei Beispiele. *H. Wendt.*

Tinkler, J.: Quantitative effects of Prandtl number and viscosity-temperature index on the compressible laminar boundary layer with pressure gradient. 50 Jahre Grenzschichtforschung 164—180 (1955).

In verschiedenen Arbeiten wurden zur Berechnung der Geschwindigkeits- und Temperaturprofile einer zweidimensionalen laminaren und kompressiblen Grenzschichtströmung die vereinfachenden Annahmen getroffen, daß die Prandtl'sche Zahl $\sigma = 1$ sei und daß die Zähigkeit linear von der Temperatur abhängt. Hier wird untersucht, welchen Einfluß realere Annahmen bezüglich σ und des Exponenten der Zähigkeits-Temperaturrelation auf die Profilform haben. Dazu werden die üblichen Grenzschichtgleichungen nach Canetti (verallgemeinerte Illingworth-Stewartson-Transformation) umgeformt und anschließend werden Reihenansätze zur Lösung der transformierten Gleichungen gemacht. Als Hauptströmung wird sowohl beschleunigte als auch gleichförmige und verzögerte Strömung angenommen. Die Änderung der Geschwindigkeits- und Temperaturprofile für $\sigma = 0,725$ und $\omega = 0,76$ (Zähigkeitsexponent) ist graphisch dargestellt (Thermometerproblem). Allgemeine Aussagen: ω hat einen stärkeren Einfluß auf das Geschwindigkeitsprofil als σ , σ hat einen größeren Einfluß als ω auf das Temperaturprofil und die Wandtemperatur.

G. Hämmerlin.

Emmons, Howard W.: The non-steady aerodynamic heating of a plate. 50 Jahre Grenzschichtforschung 385—392 (1955).

Folgendes Problem einer ebenen kompressiblen laminaren Grenzschichtströmung wird behandelt: Eine dünne Platte mit vorgegebener Verteilung der Anfangstemperatur wird plötzlich mit konstanter Geschwindigkeit parallel zu sich durch ein Medium bewegt. Welche zeitlichen Änderungen erfährt unter Berücksichtigung der Wärmekapazität der Platte und ihrer Wärmeleitung in Längsrichtung die Temperaturverteilung längs der Platte bis zur Erreichung des adiabatischen Gleichgewichts? — In quasistationärer Behandlung werden in der von D. Chapman, M. Rubesin [J. aeronaut. Sci. 16, 547 (1949)] und L. Crocco [Monographie Sci. di Aeronautica Nr. 3 (1946)] angegebenen Temperaturverteilung des stationären Problems in Form einer Reihe von Eigenfunktionen die Koeffizienten a_n der Reihe als Funktionen der Zeit t angesetzt. Diese lassen sich mittels des Ansatzes $a_n \sim f(t)$ aus der Differentialgleichung der Temperaturverteilung längs der Platte ermitteln. Die so für die Plattentemperatur gewonnene allgemeine Lösung enthält einen Eigenwert-Parameter. Die Koeffizienten der mit den Eigenfunktionen gebildeten Reihe sind dann der Anfangstemperatur anzupassen. Ein Beispiel wird gerechnet. *W. Szablewski.*

Garbsch, K.: Über die Grenzschicht an der Wand eines Trichters mit innerer Wirbel- und Radialströmung. 50 Jahre Grenzschichtforschung 471—486 (1955).

In einem Trichter werde eine stationäre, laminare und rotationsymmetrische Strömung erzeugt, die durch eine reibungsfreie Strömung mit einer Grenzschicht an der Innenseite des Trichters idealisiert werden kann. Die reibungsfreie Strömung bestehe aus einer Senkenströmung in Richtung auf die Trichterspitze mit überlagertem Potentialwirbel, wobei die Parameter beider Strömungsanteile unabhängig voneinander variiert werden können. Unter Einführung von Kugelkoordinaten lauten die Grenzschichtgleichungen nach Wahl geeigneter dimensionsloser Koordinaten: $(\partial^3 \psi / \partial y^3) + [(\partial \psi / \partial x)(\partial / \partial y) - (\partial \psi / \partial y)(\partial / \partial x)](\partial \psi / \partial y) + [2/(1-x)][1 - (\partial \psi / \partial y)^2] + \lambda^2(1-x)(1-\bar{w}^2) = 0$, $(\partial^2 \bar{w} / \partial y^2) + [(\partial \psi / \partial x)(\partial / \partial y) - (\partial \psi / \partial y)(\partial / \partial x)]\bar{w} = 0$ mit den Randbedingungen: a) Haftbedingung an Trichterwand: $\psi = 0$, $\partial \psi / \partial y = 0$,

$w = 0$; b) Übergang in reibungsfreie Strömung: $\partial\psi/\partial y = 1$, $\bar{w} = 1$. Das Problem enthält wegen der Rotationssymmetrie nur zwei Ortskoordinaten x und y , aber drei Geschwindigkeitskomponenten: $\bar{u} = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$, \bar{w} ; $\psi(x, y) =$ Stromfunktion; λ ist ein Parameter. — Lösung durch Iteration, wobei die Iterationsfolge zwei Prinzipien genügen soll: I. Beim Übergang von der n -ten zur $(n + 1)$ -ten Näherung soll $\psi(x, y)$ bei festem x aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit der unabhängigen Veränderlichen y [genauer: $y: D(x)$ mit geeignetem $D(x)$] berechnet werden. (Hierdurch wird dem unterschiedlichen Charakter der Veränderlichen x und y in den parabolischen Grenzschichtgleichungen Rechnung getragen.) II. Das erste Glied der Iterationsfolge soll schon den asymptotischen Übergang der Grenzschicht in die Potentialströmung wiedergeben. — Wie diesen beiden Forderungen — und einigen weiteren — Genüge getan werden kann, führt Verf. im einzelnen durch, und zwar sowohl für kleine als auch für große Werte von λ . Ein Vergleich mit den Resultaten nach dem Pohlhausen-Verfahren wird durchgeführt. *R. Iglish.*

Geis, Theo: Ähnliche Grenzschichten an Rotationskörpern. 50 Jahre Grenzschichtforschung 294—303 (1955).

Betrachtet wird die Grenzschichtströmung an einem Rotationskörper, der sich in einer Drehströmung befindet, deren Achse mit der des Rotationskörpers zusammenfällt, oder der in sonst ruhender Flüssigkeit um seine Achse rotiert. Im Gegensatz zum Fall eines in Achsenrichtung angeströmten Drehkörpers handelt es sich hierbei um ein wesentlich dreidimensionales Problem. Unter Benutzung eines geeigneten orthogonalen Koordinatensystems werden die Bedingungen dafür hergeleitet, daß es sich um eine „ähnliche“ Strömung handelt, deren Geschwindigkeitskomponenten u und v parallel zur Wand in Abhängigkeit von der Koordinate z senkrecht zur Wand sich also durch Ähnlichkeitstransformationen ineinander überführen lassen. Danach müssen die Außengeschwindigkeit $U(y)$ und die Meridiankurve $r(y)$ von der Form $U(y) = A y^m$, $r(y) = B y^n$ bzw. $U(y) = A e^{\alpha y}$, $r(y) = B e^{\beta y}$ sein. Die Gestalt der zu den ähnlichen Lösungen gehörigen Rotationskörper wird diskutiert.

H. Witting.

Schuh, H.: Über die „ähnlichen“ Lösungen der instationären laminaren Grenzschichtgleichung in inkompressibler Strömung. 50 Jahre Grenzschichtforschung 147—152 (1955).

Es werden für die instationäre inkompressible ebene Grenzschicht die Bedingungen untersucht, unter welchen „ähnliche“ Lösungen erhalten werden. Es werden hierfür im ganzen vier Fälle angegeben: Von diesen ist der erste nach Blasius und Görtler bereits bekannt (Außenströmung $u_1 \sim t^n$, $t =$ Zeit). Ein zweiter Fall besitzt wegen der Anfangsbedingung kaum eine praktische Bedeutung. Im dritten Fall ist $u_1 \sim e^t$ und $u/u_1 = 1 - e^{-y/\delta}$, ($\delta =$ Grenzschichtdicke). In diesem Fall sind die Geschwindigkeitsprofile von der Art der Absaugeprofile bei stationärer Grenzschicht. Der vierte Fall schließlich ist von der Art der Staupunktströmung, $u_1 \sim x/t$. Die zugehörige inparametrisierte Schar von Grenzschichtprofilen wird mit Hilfe eines Pohlhausen-Näherungsverfahrens diskutiert.

H. Schlichting.

Lessen, M. and J. A. Fox: The stability of boundary layer type flows with infinite boundary conditions. 50 Jahre Grenzschichtforschung 122—126 (1955).

Die Stabilität des laminaren Freistrahls wird untersucht; asymptotische Lösungen für die reibungslosen Störungsdifferentialgleichungen werden angegeben. Zur Berechnung der Eigenwerte der reibungsbehafteten Störungsdifferentialgleichung wird eine Reihenentwicklung vorgeschlagen, aus der sich die Eigenwerte des reibungsbehafteten Falls, ausgehend vom reibungslosen, berechnen lassen. Da in der Sommerfeld-Orrschen Gleichung eine Grundströmung mit parallelen Stromlinien angenommen wird, schlägt der Verf. eine Störungsdifferentialgleichung vor, die diese Annahme nicht enthält und deren asymptotische Lösungen mit denen der Sommerfeld-Orrschen Gleichung übereinstimmen.

G. Hämmerlin.

Krzywoblocki, M. Z. v.: On the boundary layer in electron stream. 50 Jahre Grenzschichtforschung 91—100 (1955).

Howard leitete die Bewegungsgleichung einer Elektronenströmung ab, die der Navier-Stokesschen bis auf Zusatzglieder analog ist. Der Autor nimmt an, daß eine solche Strömung sich an einer festen Wand wie die einer zähen Flüssigkeit verhält. So lassen sich in Anlehnung an die Abschätzungen der Grenzschichttheorie Vereinfachungen vornehmen, die es erlauben, die Bewegungsgleichungen in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu transformieren. Mit den Randbedingungen der Grenzschichttheorie läßt sich die Verbindung zur Blasiuschen Lösung der Grenzschicht an der ebenen Platte herstellen. Numerische Resultate fehlen, da über die Größe des schon bei Howard auftretenden zweiten Zähigkeitskoeffizienten (Normal-Koeffizient der Zähigkeit) noch nichts bekannt ist. *G. Hämmerlin.*

Coles, Donald: The law of the wall in turbulent shear flow. 50 Jahre Grenzschichtforschung 153—163 (1955).

Die Arbeit befaßt sich mit Folgerungen, die sich aus der Existenz des universellen Wandgesetzes von der Form $u/u_\tau = f(y u_\tau/\nu)$ bei turbulenter Strömung ergeben (u = mittlere Geschwindigkeit, $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$, τ_w = Wandschubspannung, y = Wandabstand, ρ = Dichte, $\nu = \mu/\rho$ = kinematische Zähigkeit). Aus der Kontinuitätsgleichung folgt, daß bei konstanter Dichte das Verhältnis u/u_τ entlang einer Stromlinie konstant ist. Vermittels der Bewegungsgleichungen wird die Schubspannungsverteilung in der Nähe der Wand berechnet. Auf Grund der Hypothese, daß u/u_τ auf den Stromlinien konstant ist, wird eine Erweiterung des Wandgesetzes für Fälle mit veränderlicher Dichte vorgeschlagen. *J. Rotta.*

Meyer, R. E.: Turbulent boundary layers on nozzle liners. J. aeronaut. Sci. 22, 572—573 (1955).

Verf. bezieht sich auf ältere Berechnungen von Grenzschichtdicken an Düsenkonturen, bei denen verschiedene Potenzgesetze und empirische Beziehungen für die Wandreibung vorausgesetzt waren und die am Düsenende bis zu 55% falsche Ergebnisse für die Verdrängungsdicke der Grenzschicht lieferten. In der vorliegenden Kurzmitteilung werden die von Illingworth und Stewartson (dies. Zbl. 34, 115; 40, 405) für laminare Grenzschicht gemachten Ansätze auch auf turbulente Grenzschicht angewandt und dabei ein fast linearer Anstieg der Grenzschichtdicke längs der Düsenwandung erhalten. *F. W. Riegels.*

Curle, N.: The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 231, 505—514 (1955).

Die Theorie von Lighthill (dies. Zbl. 49, 259; 55, 191) über aerodynamisch erzeugten Schall setzte Strömungen ohne feste Grenzen voraus. Verf. erweitert diese Theorie durch Einbeziehung von festen Grenzen, was bedeutet, daß 1. der durch die Quadrupole der Lighthillschen Theorie erzeugte Schall an diesen reflektiert und gebrochen wird und 2. Quadrupole nur noch außerhalb des durch feste Grenzen eingeschlossenen Gebietes bestehen können. Das bedeutet dann auch, daß eine resultierende Verteilung von Dipolen auf den Grenzen möglich erscheint, welche die Schwingungskraft (fluctuating force) darstellt, mit der die festen Wände auf die Flüssigkeit einwirken. Aus Dimensionsbetrachtungen wird abgeleitet, daß die Grundfrequenz der Dipole halb so groß wie diejenige der Quadrupole ist und daß die Dipole mit abnehmender Mach-Zahl zunehmend an Bedeutung gewinnen. *F. W. Riegels.*

Ryffert, Halina: Über die Ausbreitung „Exponential-begrenzter“ Wellen von endlicher Amplitude. Acta phys. Polon. 14, 435—445 (1955).

Es wird die Schallausbreitung in Exponentialtrichtern unter Berücksichtigung der bei hohen Intensitäten im Schallfeld auftretenden nichtlinearen Erscheinungen untersucht. Ausgangspunkt sind die exakten Bewegungsgleichungen für ein ideales (schubspannungs- und verlustfreies) Gas. Die Gleichungen werden in „substantiellen“ (Lagrangeschen) Koordinaten angegeben; sie lassen sich dann unter idealisierten

Randbedingungen mit Hilfe eines Näherungsverfahrens lösen. In dieser Weise wird das Verhältnis der Amplitude der Grundwelle zu der der ersten Oberwelle berechnet, wenn die Anregung rein sinusförmig ist und alle anderen Effekte zweiter Ordnung vernachlässigbar sind.

M. Heckl.

Maruhn, K.: Zur mathematischen Theorie der Gestalt der Himmelskörper. *Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau* **1** (1954/55), 163—164 (1955).

Bericht über einige klassische Ergebnisse der Theorie.

Wärmelehre:

Buchdahl, H. A.: Simplification of a proof of Carathéodory's theorem. *Amer. J. Phys.* **23**, 65—66 (1955).

Verf. hat in Band 17 derselben Zeitschrift im Jahre 1949 (dies. Zbl. **35**, 261; p. 44—46, 212—218) einen Beweis für den Satz von Carathéodory gegeben, der bei der Herleitung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik benutzt wird. In einer späteren Mitteilung aus dem Jahre 1954 (dies. Zbl. **58**, 210) hatte er eine Vereinfachung angegeben, bei der beliebige Nachbarlösungen der Pfaffschen Differentialgleichung betrachtet werden. In der vorliegenden Note werden die entsprechenden Vereinfachungen zu dem Beweise des Jahres 1949 ausführlich angeschrieben.

U. T. Bödewadt.

Bohm, D. and W. Schützer: The general statistical problem in physics and the theory of probability. *Nuovo Cimento, Suppl. X. Ser. 2*, 1004—1047 (1955).

Eine mehr programmatische als mathematische Arbeit über das sogenannte „allgemeine statistische Problem“: Auffindung derjenigen Beziehungen in einer statistischen Gesamtheit, die bei großer Variationsbreite der Einzeleigenschaften ihrer Elemente gelten, wobei die Variationsbreite durch die physikalischen Bedingungen und den „Interessenzusammenhang“ festgelegt wird. Es wird behauptet, daß Probleme dieser Art notwendig den Rahmen einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Behandlung sprengen und die Suche nach neuen formalen Systemen rechtfertigen, welche den wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatz als Spezialfall umfassen. Diskussion dieser These an Hand verschiedener physikalischer Probleme.

H. Richter.

Nakajima, S.: Perturbation theory in statistical mechanics. *Advances Phys., Quart. Suppl. philos. Mat.* **4**, 363—380 (1955).

Verf. berichtet über Näherungsmethoden zur Auswertung von Zustandssummen für den Fall, daß man vom Hamiltonoperator einen kleinen Störterm abspalten kann. Ferner wird die Anwendung auf die Elektron-Phonon-Wechselwirkung in nicht supraleitenden Metallen diskutiert, auf den Diamagnetismus eines Gases aus geladenen Teilchen sowie die Schafrothsche Methode zur Behandlung des Meißner-Effekts.

G. Höhler.

● **Band, William:** An introduction to quantum statistics. Princeton, New York, Toronto, London: D. van Nostrand Company, Inc., London: Macmillan & Co., Ltd. 1955. XIII, 342 p. 45/— net.

Das Buch ist für in ihrem Studium weiter fortgeschrittene Studenten gedacht. Nach einem sehr knappen Kapitel über einige Grundbegriffe der Quantenmechanik wird im folgenden der Formalismus der statistischen Mechanik, so unter anderem auch die Darwin-Fowler-Methode besprochen. Das folgende Kapitel bringt die statistische Interpretation der Thermodynamik, ein weiteres behandelt die Verteilungsfunktion in der klassischen Statistik. Die beiden weiteren Abschnitte sind dem Gleichgewicht zwischen Phasen sowie dem chemischen und dem Dissoziations-Gleichgewicht gewidmet. Sodann werden Gesamtheiten von Systemen, die miteinander in Wechselwirkung stehen, wie auch wechselwirkungsfreie Systeme, die eine quantenmechanische Entartung aufweisen, untersucht. Die beiden folgenden Kapitel befassen sich mit Phasengleichgewichten zwischen quantenmechanisch

entarteten Systemen sowie mit dem Dissoziationsgleichgewicht zwischen derartigen Systemen. Dieser Problemkreis wird mit einem Kapitel über quantenmechanisch entartete Gesamtheiten wechselwirkender Systeme abgeschlossen. Die große Verteilungsfunktion wie auch einige ihrer Anwendungen bilden den Inhalt des folgenden Kapitels, während im nächsten die allgemeine Theorie der flüssigen Phase dargestellt wird. Thema des weiteren Kapitels sind einige Probleme aus der Festkörperphysik. Ein Abschnitt über Fluktuationen und Nichtgleichgewichts-Phänomene beschließt das Buch. — Da bei dem Umfang des Buches keine Vollständigkeit zu erwarten ist, begrüßt man die am Ende eines jeden Kapitels aufgeführten Literaturhinweise als besonders wertvoll. Die ebenfalls sich an jedes Kapitel anschließenden Übungen dienen vor allem einer Ergänzung der Herleitung der in den Kapiteln behandelten Beziehungen.

H. Haken.

Popov, Kiril: The mathematical foundations of the theory of irreversible thermodynamical processes. Soviet Phys., JETP 1, 336—353 (1955), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 28, 257—282 (1955).

Es wird versucht, die phänomenologischen Gleichungen $\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} X_k$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $L_{ik} = L_{ki}$, bei kleinen Abweichungen vom Gleichgewicht als erste Integrale der Differentialgleichungen $d^2x_i/dt^2 = X_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) zu deuten. Im adiabatisch isolierten System ist $X_i = -\partial Q/\partial x_i$, S = Entropie, x_i = innere Variable. Verf. folgert daraus, daß sich die phänomenologischen Koeffizienten aus den thermodynamischen Eigenschaften des Systems herleiten lassen. — Nach dieser Auffassung gäbe es keine Katalyse und der Begriff der Aktivierungsenergie wäre überflüssig, beziehungsweise sie könnte auf Größen der chemischen Thermodynamik zurückgeführt werden. D. Ref.

J. Meixner.

Karanikolov, Christo (Khristo): The phenomenological relations of Onsager. Soviet Phys., JETP 1, 265—267 (1955), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 28, 283—286 (1955).

Beweis der Symmetrie $L_{ik} = L_{ki}$ für $n = 3$ nach Popovs Theorie. Siehe Soviet. Phys., JETP 1, 336—353 (1955), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 28, 257—282 (1955).

J. Meixner.

• **Brønsted, J. N.:** Principles and problems in energetics. Translated from Danish by R. P. Bell. New York: Interscience Publishers, Inc. 1955. VII, 119 p. 3 Fig. \$ 3,50.

Der Aufbau der Thermodynamik, wie er seit langen Jahrzehnten in den Lehrbüchern dargeboten wird, trägt unverkennbar die Spuren der Entstehungsgeschichte dieser Wissenschaft. Es gibt gewisse Besonderheiten, die im Wesen der Dinge liegen, aber sie werden weithin überdeckt durch Eigentümlichkeiten, die zwar geschichtlich unvermeidbar gewesen sein mögen, aber nachträglich heute nicht mehr nötig erscheinen. Verf. hat sich bemüht, die makroskopische Lehre von den verschiedenen Energieformen und ihren Wechselbeziehungen systematisch aufzubauen, und ist dabei zu einem hohen Grade von Klarheit und Symmetrie gelangt, der die grundlegenden Eigenheiten des Gebietes um so reiner erkennen läßt. In dem vorliegenden Buch, einer Übersetzung der noch zu Lebzeiten des 1947 verstorbenen Verf. erschienenen Ausgabe, wird diese einheitliche Theorie als „Energetik“ in kritischer Auseinandersetzung der „klassischen Thermodynamik“ gegenübergestellt. Das Buch umfaßt sieben Kapitel: 1. Einleitung, 2. Arbeit, 3. Temperatur, 4. Entropie, 5. Wärme, 6. Energie und ihre Umwandlungen, 7. Energetischer Mechanismus. Die Grundgedanken dieser „Energetik“ sind folgende: Jeder reversible Vorgang besteht aus einem oder mehreren einfachen (oder: Grund-) Vorgängen. In jedem einfachen Vorgang wird, infinitesimal gesehen, eine Menge $\delta\alpha$ einer bestimmten (den einfachen Vorgang kennzeichnenden) extensiven Größe α von einem Systemteil (1) zu einem anderen Systemteil (2) transportiert. Dabei ändert sich das zu dieser Größe α ge-

hörige Potential — und die Existenz eines solchen Potentials macht das Wesen der reversiblen Vorgänge aus — von seinem Wert β_1 im Teilsystem (1) zu dem Wert β_2 , den es in (2) hat. Dieser Transport erfordert die Arbeit $\delta A = \delta x (\beta_2 - \beta_1)$. Bei reversiblen Vorgängen gilt dann für alle darin gekoppelten einfachen Vorgänge insgesamt der Satz von der Erhaltung der Arbeit: $\sum \delta A_i = 0$. Es kann α z. B. Volumen, Gewicht, Elektrizitätsmenge, chemische Stoffmenge sein, das zugehörige Potential ist dann: Druck, Schwerkraftpotential, elektrisches Potential, chemisches Potential. In dieses Schema fügen sich auch die thermischen reversiblen Vorgänge zwanglos ein: die Temperatur als intensive Größe ist hierbei das Potential, und die zugehörige extensive Größe, von der eine gewisse Quantität auf ein anderes Potential gebracht wird, wird als Entropie bezeichnet. Jede der Größen α hat, für sich genommen, das „Bestreben“, von höherem zu niedrigerem Potential überzugehen; die Entropie hat darin keine Ausnahmestellung. Es zeigt sich dann weiter, daß man schon allein durch Benutzung reversibler Vorgänge eine universelle energetische Temperatur festlegen kann, wobei freilich, da reversible Vorgänge nur Potentialdifferenzen betreffen, der Nullpunkt noch willkürlich bleibt (so daß diese energetische Temperatur eine lineare Funktion der absoluten Temperatur ist). Das Produkt $\delta A = \delta S \cdot \Delta T$ ist dann die „thermische Arbeit“, die durch Analyse der übrigen mit ihr gekoppelten einfachen Vorgänge eines reversiblen Prozesses bestimmt werden kann. Daher ist es auch möglich, die reversibel transportierten Entropiemengen zu messen. — Irreversible Prozesse sind dadurch gekennzeichnet, daß bei ihnen ein gewisser Arbeitsbetrag δA (abhängig von dem Wege, auf dem der Prozeß geführt wird, nicht nur von Anfangs- und Endzustand des Systems) als reversible Energieform verlorengeht und daß ferner dabei Entropie neu entsteht. Wenn man nun, analog den Zusammenhängen bei reversiblen Prozessen, zwischen der verlorenen Arbeit und der gebildeten Entropiemenge δS den Zusammenhang $\delta A = T \cdot \delta S$ ansetzt, so ergibt sich hieraus die universelle absolute Temperatur T . (Die Analyse der von Caratheodory und Born vertretenen Herleitung des 2. Hauptsatzes führt den Verf. zu einer Bestätigung von Plancks Auffassung, daß dort die formale Verallgemeinerung mit einer sachlichen Einengung der Anwendungsmöglichkeiten verbunden ist.) An die Stelle der oft anzutreffenden Formulierung des 1. Hauptsatzes, daß sich verschiedene Energieformen ineinander überführen lassen, tritt hier der Satz, daß das nur auf die Arbeit als reversible Energieform unbeschränkt zutrifft. Diese Aussage deckt aber auch die Wärmekraftmaschinen, bei denen thermische in mechanische Arbeit übergeführt wird oder umgekehrt (wie bei der Wärmepumpe). Es ist nicht erforderlich, bei der Betrachtung dieser Maschinen mit Clausius die Idee einzuführen, daß in ihnen Wärme oder Entropie „verbraucht“ werde, um mechanische Energie zu erzeugen. Ein solcher Gedanke legt sich nur dann nahe, wenn man die Betrachtung auf einen isolierten Teil des Gesamtsystems beschränkt. Nimmt man das System einschließlich der Wärmebehälter als Ganzes, so kann man feststellen, daß in jeder Arbeitsperiode eine bestimmte Entropiemenge unverringert vom wärmeren zum kälteren Reservoir übergeht und daß die damit verbundene thermische Arbeit durch die mit ihr gekoppelte mechanische Arbeit gerade aufgewogen wird. Schließt man auch irreversible Vorgänge mit in die Betrachtung ein, so ist bei Verwendung der Begriffe „Wärme“ und „Wärmeentwicklung“ besondere Vorsicht geboten, da Entropie sowohl reversibel transportiert als auch irreversibel produziert werden kann. Man hat zum Beispiel die reversible, „thermometrische“ Wärmeentwicklung von der irreversiblen, „energetischen“ zu unterscheiden. — Auf die Untersuchungen des Verf. über die genauen Zusammenhänge bei thermisch-elektrisch-chemischen Umwandlungen kann hier nicht weiter eingegangen werden. Diese ganzen Untersuchungen, die weder den ersten noch den zweiten Hauptsatz in der gewohnten Form bestehen lassen, berühren sich weithin mit denen von Onsager, von denen die moderne Entwicklung der Thermodynamik irreversibler Vorgänge zum großen Teil ihren Ausgang nahm. Ob auch

Verf. davon Kenntnis hatte, bleibt zweifelhaft. Das Vorwort zu diesem Buch schrieb V. K. La Mer, der in seinen Vorlesungen seit mehreren Jahren den Aufbau der Thermodynamik nach Brønsted durchgeführt hat. *U. T. Bödewadt.*

Palladino, Raffaele: Un nuovo metodo di determinazione del rapporto fra i coefficienti di irradiazione e di conducibilità termica interna. *Ricerca, Rivista Mat. pur. appl.* 6, Nr. 1, 33—40 (1955).

Palladino, Raffaele: Un nuovo metodo di determinazione del rapporto fra i coefficienti di irradiazione e di conducibilità termica interna. *Ricerca, Rivista Mat. pur. appl.* 6, Nr. 2, 27—35 (1955).

Si espone un metodo analitico-sperimentale per la determinazione del rapporto tra i coefficienti di irradiazione e di conduttività interna di un mezzo omogeneo isotropo, schematizzando l'imperfetto contatto tra due superficie limitanti due blocchi del materiale considerato con un sistema di cavità sferiche praticate in un blocco unico. Non entrando nel merito del valore delle esperienze fatte, il recensore ritiene la trattazione analitica del tutto priva di rigore matematico. *G. Sestini.*

Manfredi, Bianca: Calcolo numerico della temperatura in uno strato piano, con date condizioni al contorno variabili col tempo. *Rivista Mat. Univ. Parma* 6, 363—374 (1955).

Ricollegandosi ad un precedente lavoro (cfr. questo Zbl. 67, 192) l'A. applica il metodo delle differenze alla risoluzione del generale problema di flusso lineare non stazionario di calore in uno strato piano di spessore finito. L'A. calcola quindi la temperatura dello strato quando una delle faccie è tenuta a temperatura nulla, mentre l'altra ha una temperatura variabile col tempo o linearmente o sinusoidalmente, supposta nulla la temperatura iniziale nello strato. I risultati numerici trovati mettono bene in rilievo la convenienza del metodo. *G. Sestini.*

Jaeger, J. C.: Conduction of heat in a solid in contact with a thin layer of a good conductor. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 8, 101—106 (1955).

Bei Temperaturmessungen mit Thermoelementen befindet sich ein dünner Draht eines guten Wärmeleiters innerhalb eines schlecht wärmeleitenden Mediums. Es fragt sich, wie weit die Temperaturanzeige durch Wärmeleitung von den Enden des Meßdrahtes her beeinflußt und verfälscht wird. Verf. betrachtet daher die Temperaturverteilung in einem zwischen zwei parallelen Ebenen ausgespannten, senkrecht zu ihnen stehenden Draht. Als Lösung (mittels der Laplace-Transformation) erhält er eine gut konvergente Reihe, deren einzelne Glieder durch numerische Quadratur bestimmt werden müssen. Das Ergebnis ist, daß bei den üblichen Drahtdicken doch noch erhebliche Fehler in der Temperaturanzeige vorkommen können, so daß entweder sehr dünne Drähte verwendet werden oder eine rechnerische Korrektur angebracht werden müßte. Die gefundene Lösung läßt sich mathematisch auf einige verwandte Fälle verallgemeinern, zum Beispiel einen elektrisch geheizten Draht zwischen den beiden Ebenen, oder einen Draht, der in der Achse eines Zylinders von endlichem Durchmesser verläuft. Für die Temperatur des Mittelpunktes des Drahtes werden die expliziten Ausdrücke angegeben. *U. T. Bödewadt.*

Bachr, H. D.: Die Lösung nichtstationärer Wärmeleitungsprobleme mit Hilfe der Laplace-Transformation. *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 21, 33—40 (1955).

Einführung in die Benutzung der Laplace-Transformation zur Lösung von Aufgaben der Wärmeleitung, nach einem Vortrag auf der Tagung des VDI-Fachausschusses für Wärmeforschung in Graz, 1954. Die Laplace-Transformation wird definiert, eine kurze Tabelle von Korrespondenzen gegeben, dann werden die Rechenregeln über die Linearität und die Abbildung von Differentialoperationen gezeigt. Es folgt die Behandlung eines ersten Beispiels: Abkühlung einer warmen Flüssigkeit an einer kalten Wand. Anschließend wird die komplexe Umkehrformel erläutert und dann als Beispiel das Aufheizen einer Wand endlicher Dicke bei konstanter Dichte des Wärmestroms behandelt. Die Lösung wird in Form einer Fou-

rierreihe erhalten. Im nächsten Abschnitt folgt die Reihenentwicklung für kleine Zeiten nach Potenzen von \sqrt{t} . Den Abschluß bilden einige Ausführungen über den Anwendungsbereich der Laplace-Transformation. *U. T. Bödewadt.*

Frankl', F. I.: Zur Theorie der Bewegung schwebender Teilchen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 247—250 (1953) [Russisch].

Ausgehend von allgemeinen Gleichungen für die Bewegung der Kontinua und unter Vermeidung jeglicher zusätzlicher Annahmen werden zuerst die raum-zeitlichen Mittelwerte einer gegebenen Größe sowohl für ein bestimmtes Gebiet, als auch für den von der Flüssigkeit und von festen Körpern eingenommenen Anteil dieses Gebietes definiert. Es folgt die Aufstellung zweier Kontinuitätsgleichungen für die feste und flüssige Phase, in welchen neben den Mittelwerten für die Geschwindigkeiten auch die Mittelwerte der Verteilungsfunktion für die Feststoffe auftreten. Aus dem Impulssatz werden dann noch je drei Bewegungsgleichungen für die mittleren Geschwindigkeitskomponenten des festen und flüssigen Anteils abgeleitet, in welchen auch Spannungsglieder auftreten, die von der turbulenten Mischbewegung der Flüssigkeit herrühren. *A. Kuhelj.*

Frankl', F. I.: Die Energiegleichungen für die Bewegung von Flüssigkeiten mit schwebenden Teilchen. Doklady Akad. Nauk SSSR 102, 903—906 (1955) [Russisch].

In Fortsetzung seiner früheren Arbeit (s. vorstehendes Referat) werden vom Verf. aus etwas umgeformten Bewegungsgleichungen zunächst die Energiegleichungen für die mittlere Bewegung beider Phasen abgeleitet. Es folgt die Mittelwertbildung zur Bestimmung der Gleichung für die Pulsationsenergie und dann durch Subtraktion die Aufstellung der Energiegleichungen für die Mittelwerte der Bewegung beider Anteile, in welchen auch Glieder auftreten, welche durch die ungeordnete Bewegung der Flüssigkeit verursacht werden. Schließlich werden nach demselben Vorgange wie früher aus den Gleichungen für die Gesamtenergie in Integralform Gleichungen für die Mittelwerte der Wärmemengen in beiden Phasen aufgestellt. *A. Kuhelj.*

Frankl', F. I.: Versuch einer halbempirischen Theorie der Bewegung von schwebenden Teilchen in einer ungleichmäßigen Strömung. Doklady Akad. Nauk SSSR 102, 1093—1096 (1955) [Russisch].

Während die Diffusionstheorie der Bewegung von Schwemnteilchen nur für den Fall gleichmäßiger Strömung ausgearbeitet und geprüft worden ist, wurde andererseits bei der Aufstellung der allgemeinen Theorie (s. die beiden vorangehenden Referate) vom Verf. die Frage über die Abhängigkeit des mittleren Flüssigkeitswiderstandes offen gelassen. Durch Vergleich der Form der allgemeinen Bewegungsgleichungen für den Fall gleichmäßiger Strömung mit denen der Diffusionstheorie und unter Berücksichtigung von Versuchsergebnissen ergibt sich, daß die Widerstandskomponenten R_i nur von der Differenz der mittleren Relativgeschwindigkeit zwischen den festen Teilchen und der Flüssigkeit und der mittleren Geschwindigkeit der turbulenten Diffusion abhängen. Bei kleinen Reynoldsschen Zahlen und bei kugelförmigen Teilchen kann man für R_i den bekannten Stokesschen Ansatz benutzen. Bei kleinen Trübungen kann die Flüssigkeitsbewegung in erster Näherung ohne Berücksichtigung des Einflusses der festen Teilchen bestimmt werden, während das beobachtete Zurückbleiben größerer Festkörper gegenüber der mittleren Flüssigkeitsströmung nur durch die genauere Theorie erfaßt werden kann. *A. Kuhelj.*

Elektrodynamik. Optik:

● **Vlasov, A. A.: Makroskopische Elektrodynamik.** Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1955. 228 S. R. 5,40 [Russisch].

Lehrbuch für Studenten der Universitäten und Pädagogischer Hochschulen, nach Vorlesungen des Verf. Inhalt: I. Die Fundamentalgrößen der makroskopischen Elektrodynamik. II. Die Grundgleichungen der Elektrodynamik, als Verallgemeine-

rung der Versuchsergebnisse. III. Allgemeine Folgerungen aus den Grundprinzipien der Elektrodynamik. IV. Elektrostatik. V. Grundlagen der Magnetostatik. VI. Quasistationäre Erscheinungen. VII. Probleme der Strahlung. VIII. Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen.

G. Freud.

Daboni, Luciano: Capacità elettrostatica di un condensatore sferico con apertura circolare. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 89, 208—217 (1955).

In questo lavoro l'A. si occupa del calcolo della capacità elettrostatica C di un condensatore Γ la cui armatura interna sia schematizzabile con una superficie sferica S di raggio r e quella esterna con una superficie S' ottenuta asportando ad una superficie sferica di raggio r/q e concentrica alla prima una calotta sferica di semiapertura δ . L'A. approssima il potenziale di Γ mediante funzioni del tipo $v(P) = C_1/\overline{OP} + C_2 \int_{S'} \frac{d_Q \alpha}{PQ}$ ove, indicate con φ la colatitudine di Q su S' , con X_p il p -esimo polinomio

di Legendre, e con E i boreliani di S' , si ha: $\alpha(E) = \int_E \sum_{p=0}^N K_p X_p(\cos \varphi) d\sigma$; le costanti C_i e K_p vengono determinate con la condizione di render minimo $\int_S [v(P) - 1]^2 d\sigma + \int_{S'} [v(P)]^2 d\sigma$. In corrispondenza a tale approssimazione del

potenziale di Γ viene calcolato il valore approssimato di C nei quattro casi: $\delta = 12^\circ 50'$, $19^\circ 30'$, 30° , 42° . Inoltre l'A. dimostra che, indicata con C_0 la capacità di Γ relativa al caso $\delta = 0$ (cioè al caso del condensatore sferico privo di apertura: $C_0 = q/(1 - q)$) e indicati con m, M, m', M' rispettivamente i valori minimo e massimo di $\int_{S'} d_Q \alpha / PQ$ su S ed S' (i quali nei casi, presi in esame dall'A. sono sempre positivi) sussistono le limitazioni: $(m' - M)/(m'/q - M) \leq (C_0 - C)/C_0 \leq (M' - m)/(M'/q - m)$, ed applica tali formule nei casi predetti. Una tabella raccoglie i valori così ottenuti in corrispondenza ai 4 valori di δ prima indicati (cioè il valore approssimato di $\eta = (C_0 - C)/C_0$ ed il valore della limitazione superiore di η) insieme con i corrispondenti valori delle limitazioni superiori di η ottenuti da F. Bertolini, con i valori approssimati di η ottenuti da G. Capriz e P. Lesky e con i valori di η ottenuti sperimentalmente da G. Persico. A titolo di esempio, nel caso $\delta = 42^\circ$, $q = 2/9$, il valore approssimato di η in decimillesimi ottenuto dall'A. in terza approssimazione è 61,4, quello di Capriz e Lesky in quinta approssimazione è 96,1, quello sperimentale di Persico è 60; la limitazione superiore di η data dall'A. è 180,2; quella di Bertolini è 285,4. Da ultimo l'A. riporta i valori estremi su S ed S' della funzione approssimante il potenziale di Γ costruita col metodo sopradetto.

L. de Vito.

Vowels, R. E.: A matrix method in the solution of cascaded four-terminal networks. Austral. J. appl. Sci. 6, 427—441 (1955).

In this paper it is shown how the matrix algebra may be employed in the solution of symmetrical and asymmetrical cascaded networks. Where the cascaded networks are similar the equivalent networks parameters may be determined by the process of diagonalizing the matrix of constants for each network. There are given the values of constants for four-terminal networks: T -section, Π -section, symmetrical lattice, asymmetrical lattice, bridge T section, unsymmetrical lattice, etc. and combinations of them.

M. Nedelcu.

Belatini, Paul de: Multipotentials of multipoles. Bull. techn. Univ. Istanbul 8, 57—74 (1955).

In der vorliegenden Arbeit wendet der Verf. sein Prinzip, das darin besteht, daß er statt der magnetischen Feldintensität H die verschiedenen räumlichen Abteilungen derselben verwendet, auf die Beschreibung des Feldes von verschiedenen Multipolen an. Der Methode kommt natürlich nur ein rein formaler Charakter zu, der sich in der übersichtlicheren Behandlung verschiedener technischer Probleme äußert.

P. Urban.

Brazma, N. A.: Verallgemeinerung von Variations- und Kompensationssätzen für n Parameter einer elektrischen Kette. Doklady Akad. Nauk SSSR 105, 271—274. (1955) [Russisch].

Betrachtet wird ein Netzwerk aus n Zweigen, in denen die Ströme I_1, \dots, I_n fließen. I sei der zugehörige Spaltenvektor. Die gegebene $n \times n$ -Impedanzmatrix sei Z . Die Determinante $\det Z$ darf Null sein. Einer (beliebigen endlichen) Änderung von Z in $Z + \delta Z$ entspricht dann ein gewisser Zuwachs δI von I , der zu berechnen ist, und zwar unter der Annahme, daß der Spaltenvektor K der (gleichfalls gegebenen) den Zweigen eingeprägten EMK's dabei ungeändert bleibt. Verf. setzt die Existenz einer (von Z und von der topologischen Struktur des Netzwerks abhängigen) $n \times n$ -Admittanzmatrix Y ($I = Y K$) voraus, für welche

$$(*) \quad \delta I = -(E + Y \delta Z)^{-1} Y (\delta Z) I$$

wird (wo E die Einheitsmatrix ist); er beschränkt sich unnötigerweise auf den Fall, wo δZ eine Diagonalmatrix ist und erwähnt auch nicht, daß (*) auf einer Formel von G. Kron beruht (Anmerkung des Ref.): Wenn m die Anzahl der Basismaschen, \tilde{I} der Spaltenvektor der Basismaschen-Ströme und C die Kronsche $n \times m$ -Transformationsmatrix des Netzwerks ist, so gilt $I = C \tilde{I}$ und $C_t K - C_t Z I = 0$ (C_t = Transponierte von C). Wegen $\delta K = 0$ folgt $C_t Z C \delta \tilde{I} = C_t Z \delta I = -C_t (\delta Z) (I + \delta I)$. Für Netzwerke, in denen aus $K = 0$ stets $I = 0$ folgt, ist bei Benutzung eines (stets vorhandenen) Systems von Basismaschen, bezüglich dessen die Zuordnung $\tilde{I} \rightarrow I = C \tilde{I}$ eineindeutig ist, $\det(C_t Z C) \neq 0$ und $Y = C(C_t Z C)^{-1} C_t$, woraus sich $\delta I = C \delta \tilde{I} = -Y (\delta Z) (I + \delta I)$, also (*) ergibt, sobald $\det(E + Y \delta Z) \neq 0$ ist, was für hinreichend kleines δZ sicher zutrifft. Verf. bringt (*) auf die Form $\delta I = (E + Y \delta Z)^{-1} I - I$, die im dualen Fall schon bei Zeljach [Grundlagen der allgemeinen Theorie linearer elektrischer Schaltungen (Russisch) Moskau 1951] vorkommt, und bemerkt, daß man die (für kleines δZ konvergierende) Reihenentwicklung $(E + Y \delta Z)^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} (-Y \delta Z)^p$ zur numerischen Berechnung von δI verwenden kann.

H.-J. Hoehnke.

• Report of the Physical Society Conference on the Physics of the Ionosphere. Held at the Cavendish Laboratory Cambridge September 1954. London: The Physical Society 1955. 406 p. 40 s.

Bei der Tagung wurden vier Problemkreise behandelt, nämlich: I. Die untere Ionosphäre — II. Unregelmäßigkeiten und Bewegungen in der Ionosphäre — III. Die F 2-Schicht — IV. Mathematik der Wellenausbreitung durch die Ionosphäre. Einleitung und Zusammenfassung wurden von den jeweiligen Diskussionsleitern A. H. Waynick, J. A. Ratcliffe, D. F. Martyn und K. G. Budden gegeben. Nur die theoretischen Beiträge werden im folgenden referiert: E. V. Appleton und A. J. Lyon, „Ionospheric layer formation under Quasi-Stationary Conditions“ (20—39). Die übliche Kontinuitätsgleichung der Ionisation wird auch für die (variable) Höhe des Ionisationsmaximums umgeschrieben. Zur Lösung wird eine Störungsmethode benutzt, bei der die zeitliche Variation als klein vorausgesetzt wird. Die Abweichungen von der stationären Lösung werden berechnet. Die Methode wird auch auf Fälle angewandt, wo Skalenhöhe oder Rekombination höhenabhängig sind oder wo durch eine vertikale Bewegung ein Divergenzterm in der Kontinuitätsgleichung erscheint. — D. F. Martyn, „Theory of Height and Ionization Density Changes“ (254—259). In die Kontinuitätsgleichung der Ionisierung wird ein Divergenzterm aus der Bewegung und ein Diffusionsterm nach Ferraro eingeführt. Der letztere hat \sin^2 des Inklinationswinkels als Faktor, läßt also nur Diffusion längs des Erd-Magnetfeldes zu. Die Bewegung des Höhen-Maximums der Elektronendichte und seine Wertänderung werden berechnet mit Hilfe einer Approximation der Chapman-

Schicht. Für Störungen der normalen Verteilung wird eine lineare Störungsrechnung unter Vernachlässigung des Diffusionsterms durchgeführt. Die Vertikalbewegung kann aus der beobachteten solaren Variation des Erd-Magnetfeldes in Abhängigkeit von der Breite erhalten werden. — **Pütter**, „Messung des Ionosphärenwindes aus der Wanderungsgeschwindigkeit eines Zustandes“ (191—201). Bei der Geschwindigkeits-Bestimmung aus dem zeitlichen Unterschied der Feldstärke-Schwankungen an drei Antennen wird nicht die wahre Geschwindigkeit des Feldstärke-Musters auf der Erde gemessen. Vielmehr erhält man jeweils nur die Bewegungs-Komponente senkrecht zur Richtung der Extremal-Linien der Feldstärke. Deshalb genügt eine einzelne nicht zur Ermittlung der tatsächlichen Wanderungsgeschwindigkeit. Bei vielen Messungen sollten die Endpunkte der scheinbaren Geschwindigkeitsvektoren auf einem Kreis liegen. Statt dessen wird eine Darstellung nach Zeitdifferenzen (t_x, t_y) empfohlen, in der dann eine Gerade besser erscheinen sollte. Das Vektormittel der scheinbaren Geschwindigkeit sollte sich um den Faktor $\cos^3 \Phi$ von der wahren Geschwindigkeit unterscheiden. Ein Faktor $\cos^2 \Phi$ kommt von der Vektormittelung. Ein weiterer Faktor $\cos \Phi$ kommt von der „Trefferwahrscheinlichkeit“ her. (Das gilt, wenn im Fading-Muster eine „Gratlänge“ angenommen wird, die mit dem Abstand der Antennen vergleichbar ist.) Im Mittel über alle Richtungen wäre der Betrag des Vektormittels nur $2/3$ der wahren Geschwindigkeit. — **Berg**, „Zur Deutung der Wanderung von Feldstärkeschwankungen als Ionosphärenwinde“, (104—112). Die Anwendung der Pütterschen Analyse gibt nur in 15% der Fälle den Zusammenhang, wie er sich unter der Voraussetzung einer reinen Translation eines unregelmäßigen Feldstärke-Musters ergibt. In den meisten Fällen erhält man eine „Punktwolke“ statt einer Geraden im t_x, t_y -Diagramm. Sie läßt sich nur erklären aus einer linearen Amplitudenfigur (Interferenzstreifen); daraus wird auf eine lineare Anordnung der „Störungen“, etwa in Form von Wogenwolken, geschlossen. Für die Ausbildung eines solchen Wogensystems wäre eher die örtliche vertikale Ableitung des Windvektors als dieser selbst von Bedeutung. — **Briggs und Page**, „An empirical Study of Random Functions which arise in the Interpretation of Ionospheric Movements“ (119—122). Bei der Windmessung nach der Fading-Methode zieht ein Zufalls-Muster der Feldstärke über die Antennen; dabei ergeben sich an benachbarten Antennen Feldstärke-Schwankungen, die als zufällig angesetzt werden, deren jede jedoch eine gewisse Autokorrelation hat und die untereinander eine mit dem Abstand der Antennen abnehmende Korrelation haben. Derartige Funktionspaare werden mit einem elektronischen Rechenautomaten hergestellt, wobei die zugrunde liegenden Zufallsreihen ebenfalls vom Rechenautomaten erhalten werden. Jedes Funktionspaar bedeutet im Feldstärkemuster eine bestimmte Richtung der „Extremallinie“, die vom Lot zur Driftrichtung um einen Winkel abweicht. Spielt man viele Zufallsreihen durch, so ergibt sich die statistische Verteilung von $\tan \alpha$, die durch $\exp(-\tan^2 \alpha / 0,74)$ näherungsweise beschrieben wird. — **Briggs und Spencer**, „The Variability of Time Shifts in Measurements of Ionospheric Movements“ (123—135). Die vorstehende statistische Arbeit erlaubt es, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der gemessenen Zeitdifferenzen bei der Driftmessung vorherzusagen, sofern das „Muster“ seine Form nicht ändert. Die empirischen Resultate weichen davon oft stark ab. (Die Analyse wird getrennt für die beiden Koordinatenrichtungen ausgeführt). Es wird deshalb angenommen, daß erhebliche Verformungen des Musters während der Bewegung auftreten. — **R. Fürth**, „Statistical Analysis of Star Scintillations as a means for Investigating Atmospheric Disturbances“ (140—149). Statt das statistische Verhalten einer Zeitfunktion durch das Fourierintegral der Autokorrelations-Funktion zu beschreiben, kann nach Smoluchowski auch die „Nacheffekt-Funktion“ Δ herangezogen werden, nämlich $\Delta(\tau) = \overline{|f(t + \Delta) - f(t)|}$, wobei der Querstrich Mittelung über viele zufällige t -Werte bedeutet. Für eine reine Zufallsfunktion wird Δ monoton, das statistische Verhalten ist dann durch eine Relaxations-

zeit und den Grenzwert $A(\infty)$ bestimmt. Im entgegengesetzten Fall einer periodischen Funktion ist A periodisch mit der gleichen Periode. Bei der Szintillation, die durch Schlieren hervorgerufen wird, ist Zufall und Periodizität insofern gemischt, als die Schlieren bestimmter Dimensionen bevorzugt auftreten. Das drückt sich in der A durch entsprechende Extremwerte aus. — **J. W. Dungey**, „Electrodynamics of the outer atmosphere“ (229—236). Die äußere Atmosphäre liegt über der F -Region der Ionosphäre und reicht bis zu einer relativ dünnen Grenzschicht zum interplanetaren Gas, die dem inneren Rand der abschirmenden Plasmahülle in der Chapman-Ferraro'schen Theorie der magnetischen Stürme entspricht. Veränderungen des Erdmagnetfeldes werden von dieser Diskontinuitätsfläche abgeschirmt, so daß folgende idealisierte Grenzbedingungen bestehen sollen: 1. in der äußeren Atmosphäre ein Magnetfeld parallel zur Grenzfläche und keine Längsbewegung, 2. im interstellaren Gas kein Magnetfeld und eine Längsbewegung (entsprechend der Rotation der Erde). Wie bei Windbewegung über einer Wasseroberfläche können dabei Querbewegungen der Diskontinuitätsfläche entstehen, die als magneto-hydrodynamische oder Schallwellen bis in die Ionosphäre gelangen könnten, vorausgesetzt, daß ihre Dämpfung nicht zu groß ist. — **E. Argence**, „Propagation d'une onde plane dans un milieu ionisé“ (288—298). Für vertikalen Strahlenabgang läßt sich die Differentialgleichung der Energie-Trajektorie durch Quadratur lösen, wenn an Stelle der Höhe die Variable $u = 1 - (f_0/f)^2$ eingeführt wird (f_0 Plasmafrequenz, f Frequenz). Im Fall der Appleton-Hartreeschen Dispersionsformel kann das Integral mit Hilfe verschiedener transzendenter Funktionen gelöst werden, und zwar für ordentlichen und außerordentlichen Strahl. Stoßdämpfung und horizontale Inhomogenität werden vernachlässigt. — **S. A. Bowhill**, „The Transient Response of the Ionosphere at Low Frequencies“ (308—319). An Stelle der üblichen Behandlung des Ausbreitungsproblems mit fester Frequenz wird, wie in der Leitungstheorie, ein Ansatz mit einer Sprungfunktion (Dirac-Impuls) eingeführt. Als erste Näherung betrachtet man nur die direkten Streufelder der Elektronen unter dem Einfluß der einfallenden Wellen, als zweite die Streuung der Sekundärwellen, als dritte die Streuung der Tertiärwellen usw. — **K. G. Budden**, „The Non-Existence of a ‚Fourth reflection Condition‘ for Radio Waves“ (320—331). Im Fall der Appleton-Hartreeschen Dispersionsformel (bei verschwindender Stoßzahl) liegt für die ordentliche Welle hinter der Nullstelle des Brechungsindex ein Pol. Der Ortsverlauf der Dielektrizitätskonstante (Quadrat des Brechungsindex) wird durch $(\alpha^2 + \beta/s)$ dargestellt, wo s eine Ortskoordinate ist. Mit der Transformation $\zeta = \pm 2i\alpha s$ kann die Wellengleichung in die Differentialgleichung der konfluenten hypergeometrischen Funktion übergeführt werden. Aus den asymptotischen Lösungen von Whittaker und Watson bzw. Heading ergeben sich Reflexions- und Durchgangskoeffizienten. Bei Einfall von großen negativen s her erfolgt im wesentlichen Reflexion, die restliche Energie jedoch „durchschwebt“ nur zum Teil das Gebiet negativer Dielektrizitätskonstante, so daß die Erhaltung der Energie nicht zu bestehen scheint. Im Fall einer von großen positiven s ankommenden Welle gibt es überhaupt keine Reflexion, nur ein Teil der Energie wird durchgelassen, so daß auch hier die Energie nicht erhalten bliebe. Verf. glaubt dieses Paradox durch eine Kumulation von Energie in der Umgebung der Unendlichkeitsstelle erklären zu können. (?). Aus dem Verschwinden der Reflexion im zweiten Fall wird gefolgert, daß an der Unendlichkeitsstelle keine Reflexion eintritt, so daß es die sonst vermutete „vierte Reflexions-Bedingung“ nicht gibt. — **K. G. Budden**, „A Method for Determining the Variation of Electron Density with Height from Curves of equivalent Height against Frequency“ (332—339). In der Integralgleichung der „wahren Höhe“ wird das Integral durch eine „Streifen-summe“ ersetzt, die als Produkt einer „Dreieckmatrix“ zweiter Stufe mit einer Matrix erster Stufe geschrieben wird. Nur letztere enthält Höhen-Daten, die Glieder der ersten folgen aus der Frequenzabhängigkeit des Gruppen-Index, also aus der

Dispersionsformel. Die numerische Auflösung geschieht durch Inversion der Dreiecksmatrix. Man erhält dann die Matrix (erster Stufe) für die wahre Höhe als Produkt der invertierten Dreiecks-Matrix mit der Matrix (erster Stufe) der scheinbaren Höhe. Die Methode setzt Monotonie der Elektronendichte als Funktion der Höhe voraus. — **P. C. Clemmow und R. F. Mullaly**, „The Dependence of the Refractive Index in Magneto-Ionic Theory on the Direction of the Wave Normal“ (340—350). Die Kurven $\mu(\theta)$, wo μ der Brechungsindex und θ der Winkel zwischen Wellennormale und Magnetfeld ist, werden in 8 Typen eingeteilt. Unterscheidungsmerkmal ist Lage und Anzahl der Extremwerte; vier Typen sind offene, vier geschlossene Kurven. — **J. J. Gibbons**, „Methods of Solving the coupled Equations of plane Wave Propagation in the Ionosphere“ (351—354). Bei geringer Kopplung geht man von Lösungen der ungekoppelten Gleichungen aus, die Kopplung kann dann durch Variation der Parameter behandelt werden. Bei starker Kopplung gehen Davids und Parkinson zu neuen Feldkomponenten über, indem sie den Dielektrizitäts-Tensor diagonalisieren. Diese Komponenten werden im Kopplungsbereich benutzt und am Rand mit den üblichen ungekoppelten Komponenten nach Försterling und Rydbeck verknüpft. — **R. Jancel und T. Kahan**, „Mécanique statistique des plasmas électriques lorentziens et ses applications à l'ionosphère“ (365—373). Überblick über die in C. r. Acad. Sci., Paris und J. Phys. Radium veröffentlichten Arbeiten der Verff. — **R. Jancel und T. Kahan**, „Analyse du couplage des ondes électromagnétiques ordinaire et extraordinaire dans un plasma lorentzien et son application à l'ionosphère“ (374—383). Anwendung der Eckersleyschen Methode der Darstellung der Brechungsindices auf einer Riemannschen Fläche. — **W. Pfister**, „Studies of the refractive Index in the Ionosphere: The Effect of the Collision Frequency and of Ions“ (394—401). Aus den Dispersionsformeln von Appleton-Hartree einerseits, Huxley andererseits, werden die Haupt-Achsen des Dielektrizitätstensors bestimmt. Der Einfluß der Stöße ist bei Appleton nur näherungsweise wiedergegeben und es fehlt jedenfalls ein Faktor $4/3$ in den Stoß-Gliedern. Für größere Stoßzahl ist der Unterschied erheblich. Der Korrektur-Einfluß schwerer Ionen in der Appleton-Hartreeschen Dispersionsformel wird ebenfalls untersucht. Für Stoßzahlen \ll Wellenfrequenz stimmen die Korrekturen mit den von Goubau angegebenen überein. — **J. Haselgrove**, „Ray Theory and a new Method for Ray Tracing“ (355—364). — **R. F. Mullaly**, „Graphical Constructions for Ray-Tracing in the Ionosphere“ (384—393). — **D. H. Shinn**, „Tables of Group refractive Index for the ordinary Ray in the Ionosphere“ (402—406). K. Rawer.

● **Mentzer, J. R.**: Scattering and diffraction of radio waves. (Pergamon Science Series, Electronics and Waves. Vol. 7.) London & New York: Pergamon Press 1955. VIII, 134 p. 10 s. net., \$ 4,50.

Die Bestimmung von Rückstreu-Querschnitten für Radar verlangt genauere Lösungen des Beugungsproblems, als sie die Kirchhoffsche Theorie gibt. Deshalb interessieren exakte Lösungen oder zumindest bessere Näherungen. Nur in wenigen Fällen ist bisher eine exakte Lösung der Maxwellschen Gleichungen mit Randbedingungen durch Separierung in geeigneten Koordinaten gewonnen worden. Häufig sind dafür geeignete Funktionen noch nicht tabuliert, außerdem bereitet die Bestimmung der Separierungsparameter oft Schwierigkeiten. Grundsätzlich kann das „Streuelfeld“ auch aus der Stromverteilung an der Oberfläche des Streukörpers durch Integration über die Wirkung der Flächenelemente erhalten werden. Nur in erster Näherung und bei unendlich guter Leitfähigkeit darf das magnetische Primärfeld an der Oberfläche als Streuquelle angesetzt werden. Im allgemeinen muß die Stromverteilung selbst aus einer Integralgleichung erhalten werden, die sich beim unendlich guten Leiter aus der Randbedingung ergibt. Näherungsweise kann gelegentlich diese Stromverteilung auch mit einem offenen Parameter erraten werden und dann der Parameter bestimmt werden (Variationsmethode). Diese Methoden werden auf

Kreiszyylinder und Halbebene (als zweidimensionale Probleme), sowie auf Kugel, unendlichen Konus, Kreiszyylinder endlicher Länge, Kreisblende, begrenzte dünne Platte, Rotations-Paraboloid und Rotations-Ellipsoid angewandt. Ausführlich werden Kugel, Konus und endlicher Zylinder behandelt. Im letzteren Fall wird die Taische Lösung mit der Variationsmethode dargestellt und auch die interessante Frage des Stroms am Antennen-Ende gestreift. In einem letzten Kapitel des sehr klar geschriebenen Buches werden die praktischen Methoden der Messung des Radar-Rückstreu-Querschnitts besprochen.

K. Rawer.

Budden, K. G.: The numerical solution of differential equations governing reflexion of long radio waves from the ionosphere. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 227, 516—537 (1955).

Von der von Clemmow und Heading (dies. Zbl. 58, 219) angegebenen Matrix-Form der Ausbreitungsgleichungen im inhomogenen Plasma wird ausgegangen. Sie sind ein Satz simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung und können numerisch (auf der „EDSAC“) mit einer modifizierten Runge-Kutta-Methode integriert werden. Die Höhe wurde schrittweise um einen passenden Schritt (je nach der Variation der Plasmafrequenz) verändert, meist ungefähr um $1/25$ der Vakuum-Wellenlänge, aus der Differentialgleichung wurde jeweils die Ableitung der Feldgrößen erhalten. Dazu mußten die komplexen Matricelemente teils gespeichert, teils Schritt für Schritt berechnet werden. Höhenvariabel wurde die Plasmafrequenz angesetzt, meist mit einem Exponential-Modell. Ausgangspunkt der Integration war eine ausreichend große Höhe, wo die Plasma-Dichte so groß ist, daß die Plasmafrequenz etwa das 100-fache der Frequenz der Welle ist. Hier ist die Wellennormale praktisch senkrecht, die Wellenlänge ist so klein, daß das Medium als langsam variabel behandelt werden kann. Deshalb entfällt die Kopplung, so daß die Ausbreitungsmatrix sich stark vereinfacht. Dort wird eine zirkular polarisierte, aufsteigende Welle angesetzt, die dann im Integrationsverfahren nach unten fortgesetzt wird; unterhalb der Ionosphäre ist dann eine Kombination von zwei (verschieden) elliptisch polarisierten Wellen, und zwar einer auf- und einer absteigenden daraus geworden. Die Rechnung wird wiederholt für die andere zirkulare Ausgangswelle und gibt wieder zwei elliptisch polarisierte Wellen unterhalb der Ionosphäre, eine auf- und eine absteigende. Durch lineare Kombination beider Lösungen kann jede gewünschte Polarisation der effektiv aufsteigenden Welle unterhalb der Ionosphäre erhalten werden. (Den Experimenten entspricht lineare Polarisation.) Ein Vergleich der auf- und absteigenden Wellen unterhalb der Ionosphäre (nach Amplitude und Phase) führt auf die (komplexe) Reflexions-Matrix R , die das Verhalten der Schicht als Ganzes durch die Reflexion der beiden (relativ zur Einfallsebene) linearen Hauptpolarisationen beschreibt. Rascher führt eine zweite Methode zum Ziel, bei der allerdings die physikalische Anschaulichkeit etwas verloren geht. Dazu wird wie bei der Bestimmung der Reflexionsmatrix nun für alle Höhen mit den beiden linearen Polarisationen gerechnet und formal auch in der Schicht die Reflexionsmatrix R gebildet. Die Ausbreitungsgleichung gibt einen Zusammenhang zwischen diesem R und den Feldgrößen, ebenfalls als Matrix-Gleichung. Wird nun, an Stelle der Feldgrößen, R als Variable eingeführt, so ergibt sich für R ein Satz von vier nichtlinearen, inhomogenen Differentialgleichungen. Für die numerische Integration kommt man dann aber mit einem einzigen Weg durch die Schicht aus und damit schneller zum Ziel.

K. Rawer.

Budden, K. G.: The numerical solution of the differential equations governing the reflexion of long radio waves from the ionosphere. II. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 248, 45—72 (1955).

Die Arbeit gibt die Ergebnisse numerischer Modell-Rechnungen nach der vorstehend beschriebenen Methode an. In den meisten Beispielen wurde das Erdmagnetfeld als vertikal und die Stoßzahl als höhenunabhängig angesetzt. Die Resultate für

zwei Modelle werden mit den Beobachtungen verglichen, zunächst für eine Exponentialschicht, dann für eine „doppelte“ Schicht, bestehend aus einer „Gaußschen“ *D*-Schicht und exponentieller *E*-Schicht. Die meisten Ergebnisse wurden für eine Wellen-Frequenz von 16 kHz berechnet. *K. Rawer.*

Eckart, Gottfried: Statistische Beschreibung der dielektrischen Turbulenz in der Troposphäre (Erster Teil einer Theorie der Streuung elektrischer Wellen in turbulenter Atmosphäre). Abh. Bayer. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., n. F. Heft 74, 34 S. (1955).

Die vorliegende Arbeit ist der erste Teil einer Untersuchung über die Streuung elektrischer Wellen in turbulenter Atmosphäre und beschäftigt sich mit der mathematischen Beschreibung der sogenannten „dielektrischen Turbulenz“. Darunter versteht man die Änderung der Dielektrizitätskonstanten — etwa in der Troposphäre — hervorgerufen durch turbulente Schwankungen. Der Verf. denkt hierbei nicht von vornherein an turbulente Strömungserscheinungen, sondern z. B. an die Wirkungen mehr oder weniger ungleichmäßiger Sonneneinstrahlung oder Stürme in Wüstengebieten usw. Zur Erfassung dieser „dielektrischen Turbulenz“ wird die Statistik benötigt. Jedes einzelne „Phänomen“ kann man durch eine vierdimensionale Fourierreihe beschreiben. Führt man die Beobachtung ein und desselben Prozesses möglichst unter denselben Anfangsbedingungen sehr oft durch, so stellen sich gewisse Häufigkeitsverteilungen ein. Wichtig ist hier der vom Verf. bestimmte Zusammenhang zwischen den Häufigkeitsfunktionen des Prozesses selbst und denjenigen der Fourierkoeffizienten der vierdimensionalen Reihe. Nach Lösung dieser Frage wird zur Korrelationsfunktion übergegangen, die die zeitliche Mittelbildung (über alle Realisierungen des Prozesses) am Orte beschreibt. Dies führt mathematisch zum Fragenkreis des Momentenproblems und zu einer Lösung über die Mellin-Transformation. Den Abschluß bilden Untersuchungen über zeitlich stationäre und räumlich homogene Prozesse. Man kann gespannt auf die Fortsetzung dieser Arbeit sein, die dann gewiß auch einige quantitative Aussagen über das Problem der Streuung elektrischer Wellen in turbulenter Atmosphäre enthalten wird.

J. Ziarep.

Aymerich, Giuseppe: Proprietà variazionali nelle guide d'onda anisotrope. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser. 4, 9—25 (1955).

L'A. considera un guscio anisotropo (superficie cilindrica a conduttività unidirezionale) coassiale e interno a un tubo cilindrico perfettamente conduttore e dimostra come il calcolo del numero d'onda dei modi (elettromagnetici) che si propagano entro il tubo può ricondursi alla ricerca del minimo dell'azione elettromagnetica. Applica poi i suoi risultati per dedurre l'impossibilità di frequenze critiche e l'esistenza di infiniti modi nel caso del guscio a sezione circolare.

D. Graffi.

Aymerich, Giuseppe: Pseudoortogonalità dei modi e sviluppo formale di un campo armonico sostenuto da una guida anisotropa. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser. 4, 27—32 (1955).

L'A. dimostra una condizione di pseudoortogonalità per i modi considerati nella nota precedente, ottenendo così uno sviluppo formale per il campo elettromagnetico sostenuto da un guscio anisotropo.

D. Graffi.

Steel, W. H.: A general equation for the choice of Glass for cemented doublets. Austral. J. Phys. 8, 68—73 (1955).

Ableitung einer Gleichung zur Bestimmung der Brechkräfte der Komponenten eines chromatischen verkitteten zweilinsigen Objektivs bei vorgegebener Gesamtbrechkraft und erlaubten Aberrationsresten der chromatischen Aberration bzw. des Komafehlers. Die vom Verf. abgeleiteten mathematischen Ausdrücke werden bezüglich ihrer praktischen Brauchbarkeit näher diskutiert, besonders im Hinblick auf bestimmte Kombinationen verschiedenartiger Glassorten.

J. Picht.

Sokolov, A. A., A. N. Matveev und I. M. Ternow: Über Polarisations- und

Spin-Effekte in der Theorie des leuchtenden Elektrons. Doklady Akad. Nauk SSR 102, 65—68 (1955) [Russisch].

Ivanenko, D. and V. N. Cytovič (Tsytoich): On the theory of energy losses of charged particles traversing a ferromagnetic material. Soviet Phys., JETP 1, 135—138 (1955), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 28, 291—296 (1955).

Für eine bewegte Punktladung in einem durch die Dielektrizitätskonstante ε und die Permeabilität μ charakterisierten Medium werden die Potentialgleichungen aufgestellt. Dabei dürfen ε und μ komplexe Werte annehmen. Für den Fall einer gleichmäßigen geradlinigen Bewegung lassen sich die Lösungen in Form Greenscher Funktionen angeben, und der Energieverlust als Strömung des Poyntingvektors durch die die Teilchenbahn im Abstand b umschließende Zylinderfläche berechnen. Unter gewissen Voraussetzungen kann man die durch Cerenkovstrahlung und Ionisierungsarbeit hervorgerufenen Energieverluste getrennt bestimmen. Weiter wird in einem Beispiel für eine konkrete Dispersionsformel der gesamte Energieverlust berechnet und näher diskutiert. Unter anderem zeigt sich, daß der Energieverlust des Teilchens mit höherer Geschwindigkeit einem Grenzwert zustrebt. K. H. Höcker.

Agostinelli, Cataldo: Oscillazioni magneto idrodinamiche in una massa fluida cosmica uniformemente rotante dotata di un campo magnetico assiale e di un campo magnetico equatoriale rotante. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 89, 68—92 (1955).

On étudie les oscillations magnéto-hydrodynamiques dans une masse fluide homogène, électriquement conductrice, animée d'un mouvement de rotation, soumise à sa propre gravitation et immergée dans un champ magnétique uniforme H'_0 dirigé suivant l'axe de rotation, ainsi qu'à un champ magnétique H''_0 ayant un mouvement de rotation et étant dirigée suivant la normale à l'axe de rotation. On établit les équations différentielles du phénomène et l'on étudie deux cas particuliers: 1. Dans le premier cas, la composante H''_0 du champ magnétique est suffisamment petite pour pouvoir négliger les termes supérieurs au premier dans le rapport H''_0/H'_0 . Dans ce cas, on trouve deux types d'ondes magnéto-hydrodynamiques, sinusoïdales par rapport au temps et qui se propagent dans la direction de l'axe de rotation, avec une vitesse déterminée. 2. Dans le second cas, on considère le champ magnétique H''_0 ayant une valeur aussi grande que l'on veut et on trouve des solutions sous la forme de séries qui sont uniformément convergentes pour des valeurs de H''_0 supérieures à une limite déterminée. Ces solutions représentent des ondes magnéto-hydrodynamiques, se propageant dans la direction de l'axe de rotation. Dan Gh. Ionescu.

Agostinelli, Cataldo: Oscillazioni magneto-idrodinamiche in una massa fluida rotante di dimensioni cosmiche di forma ellissoidale rotonda. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 89, 41—58 (1955).

Dans ce travail, on étudie les oscillations magnéto-hydrodynamiques d'une masse fluide ayant la forme d'un ellipsoïde de révolution. Dans ce cas on peut réduire le problème général de la magnéto-hydrodynamique à l'intégration de deux équations différentielles scalaires indépendantes, qui définissent deux classes de solutions. La première de ces classes définit une succession d'ondes magnéto-hydrodynamiques sinusoïdales par rapport au temps et dont l'amplitude varie avec la longitude et avec la distance à l'axe de rotation, et qui se propagent avec la même vitesse dans la direction de cet axe. Les solutions de la seconde classe définissent une autre succession d'ondes magnéto-hydrodynamiques, dont chacune dépend d'un paramètre arbitraire qui détermine la période. Selon que ce paramètre est réel ou complexe, on obtient des ondes sinusoïdales par rapport au temps et qui se propagent avec la même vitesse suivant l'axe de rotation, ou bien des ondes amorties, dont le coefficient d'atténuation est inversement proportionnel avec la conductivité électrique du fluide. Dan Gh. Ionescu.

Zeuli, Tino: Oscillazioni magneto-idrodinamiche in una massa liquida elissoide rotante elettricamente conduttrice. Atti. Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 89, 270—285 (1955).

On étudie les oscillations magnéto-hydrodynamiques d'une masse fluide homogène, électroconductrice, ayant la forme d'un ellipsoïde et étant soumise à l'action de sa propre gravitation et à celle d'un champ magnétique uniforme, dirigé parallèlement à l'axe Oz . Les solutions obtenues représentent des ondes magnéto-hydrodynamiques, sinusoïdales par rapport au temps et se propageant dans la direction de l'axe Oz . Ces résultats constituent une généralisation de ceux qui ont été obtenus par C. Agostinelli (voir le résumé précédent) pour le cas d'un ellipsoïde de révolution.

Dan Gh. Ionescu.

Nardini, Renato: Su particolari campi alternativi della magneto-idrodinamica. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 89, 17—36 (1955).

Dans ce travail, on reprend un problème traité antérieurement par l'A., (ce Zbl. 51, 238), concernant un fluide incompressible, idéal, homogène et électriquement conducteur, occupant le sémi-espace $z > 0$, et étant sous l'action d'un champ électromagnétique dépendant seulement de z et fonction sinusoïdale du temps. On cherche une solution dépendant d'une seule coordonnée spatiale et qui soit fonction sinusoïdale du temps. Étude des cas limites pour lesquels la conductibilité électrique devient nulle ou infinie.

Dan Gh. Ionescu.

Stanjukovič, K. P.: Einige Ergebnisse auf dem Gebiet der relativistischen Magneto-Gasdynamik. Doklady Akad. Nauk SSSR 103, 73—76 (1955) [Russisch].

Es werden die relativistischen Bewegungsgleichungen aufgestellt für ein Plasma im Magnetfeld. Die Gleichungen werden angewandt auf den Fall unendlicher Leitfähigkeit und eindimensionaler Bewegung, wobei das Magnetfeld nur eine Komponente senkrecht zur Bewegungsrichtung besitzt. Im isentropen Fall vereinfachen sich die Gleichungen, der Verlauf der Charakteristiken wird angegeben. Weiterhin werden die Frontbedingungen für ebene stationäre Stoßfronten angegeben. Es wird darauf hingewiesen, daß alle so erhaltenen Formeln gleichen Aufbau besitzen wie die Formeln ohne Magnetfeld, nur daß zu Druck und Energie magnetische Zusatztherme addiert werden müssen.

S. v. Hoerner.

Quantentheorie:

● **Platrier, Charles:** Mécanique rationnelle. II. Paris: Dunod 1955. XII, 444 p. avec 110 fig. Relié toile 3900 f.

In questo secondo volume dell'opera [Vol. I: Paris, 1954], il Platrier, dopo avere esposto le nozioni e i metodi della meccanica classica dei sistemi continui, illustrandoli su alcuni problemi particolarmente istruttivi, tratta i fondamenti della meccanica ondulatoria. I contributi di L. de Broglie, W. Heisenberg, E. Schrödinger, P. M. Dirac a questa importante dottrina moderna sono presentati nelle loro linee essenziali e costituiscono un'ottima introduzione per chiunque si proponga di fare uno studio sistematico della fisica quantica. L'idea dell'A. di ampliare il programma istituzionale della meccanica razionale classica mediante l'introduzione dei principi della meccanica razionale quantica è certamente apprezzabile. È inoltre augurabile che l'esempio venga seguito nelle esposizioni future della scienza meccanica. È necessario che i giovani studiosi, quali che siano le loro finalità, abbrano fin dall'inizio dei loro studi meccanici una chiara visione dei movi principi in guisa che essi siano capaci di discutere i vecchi schemi di fronte alle audaci conquiste del pensiero moderno.

G. Lampariello.

Sanatani, S.: Wavestatistical derivation of the formula for transition probability. Indian J. theor. Phys. 3, 21—26 (1955).

Tomonaga, Sin-iti-ro: Elementary theory of quantum-mechanical collective motion of particles. I. II. Progress theor. Phys. **13**, 467—481, 482—496 (1955).

I. Die Arbeit enthält eine allgemeine Quantenmechanik kollektiver Bewegungen. Als Vorbild dient die Abseparation der Schwerpunktsbewegung; doch muß im allgemeinen Fall vorausgesetzt werden, daß die Teilchenzahl N sehr groß ist. Die Methode wird zunächst an einem einfachen Beispiel erläutert (inkompressible Oszillationen eines zweidimensionalen Tröpfchens). Ausgangspunkt ist die Einführung der kollektiven Impulskoordinaten π , die definiert sind als die erzeugenden der infinitesimalen kollektiven Bewegungen. Die kollektiven Ortskoordinaten ξ müssen zu den π kanonisch konjugiert sein; außerdem muß dafür gesorgt werden, daß die verbleibenden „inneren Ortskoordinaten“ ζ 1. zu den ξ im Konfigurationsraum orthogonal sind und 2. mit π vertauschbar sind. Diese drei Forderungen sind (nur) für $\sqrt{N} \gg 1$ miteinander verträglich. Anschließend wird der Hamiltonoperator mit Hilfe der neuen Koordinaten umgeformt, ohne daß es nötig wäre, die inneren Koordinaten ζ zu spezifizieren. Die kinetische Energie zerfällt in einen inneren Anteil und einen kollektiven von der Form $\pi^2/2J$; die potentielle Energie dagegen enthält außer einem inneren Anteil einen kollektiven von der Form $(T_2 + V_2)\xi^2$ und ein Wechselwirkungsglied von der Form $(T_1 + V_2)\xi$. Die „Koeffizienten“ T_2, V_2, T_1 und V_1 hängen allerdings noch von den inneren Orts- und Impulskoordinaten ab. Zum Schluß wird gezeigt, wie Hilfsfelder in der Art des von Bohm in seiner Theorie der Plasmaschwingungen benutzten in den Formalismus eingebaut werden können. — II. Die im Teil I entwickelte Theorie wird auf das Problem der Plasmaschwingungen angewandt. Der Verf. erhält Übereinstimmung mit den Theorien von Bohm und Bloch.

G. Süßmann.

Jastrow, Robert: Many-body-problem with strong forces. Phys. Review **98**, 1479—1487 (1955).

Verf. gibt ein Näherungsverfahren an zur Behandlung des Vielkörperproblems bei kurzreichweitigen Kräften. Es besteht im wesentlichen darin, daß durch einen multiplikativen Faktor in der Wellenfunktion Korrelationen zwischen den Teilchen berücksichtigt werden. Oberflächeneffekte werden vernachlässigt. Es folgen Anwendungen auf Fermi- und Bosegase.

K. Wildermuth.

Mandelstam, S.: Dynamical variables in the Bethe-Salpeter formalism. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **233**, 248—266 (1955).

Die Wellenfunktion der Bethe-Salpeter-Gleichung hat keine direkte und einfache physikalische Bedeutung, daraus entsteht das Problem: wie kann man die Übergangsmatrixelemente einiger physikalischer Operatoren berechnen? Aus dem Zusammenhang der gebundenen Zustände und der Singularitäten der Fortpflanzungsfunktionen kann der Verf. das obige mathematische Problem auf elegante Weise lösen. Die Berechnung der Übergangsmatrixelemente ist durch eine geeignete Graphentechnik wesentlich erleichtert. Die Resultate stimmen mit den von Matthews und Salam, Zimmermann, Nishijama überein, aber sind teilweise allgemeiner, teilweise durch explizite Formeln und nicht durch implizite Gleichungen gegeben. Als Anwendungsbeispiel sind die Matrixelemente der Stromdichte zwischen zwei gebundenen Zuständen berechnet, und es wurde die Lösung von Goldstein kritisiert. Besonders bemerkenswert ist die Diskussion des Zusammenhanges der Existenz von gebundenen Zuständen mit der Größe der Kopplungskonstante.

G. Marx.

Plebański, J. and J. Sawicki: Remarks on the relativistic two body problem in the classical scalar meson field theory. Acta phys. Polon. **14**, 455—470 (1955).

The relativistic but classical two body problem is investigated by assuming a neutral scalar meson field (meson mass μ) which is responsible for the interaction

between point particles. The mass renormalization procedure is applied to remove the divergent coefficients of the second derivatives. Some remarks are given on the Cauchy problem for the system. An exact solution of the problem of two bodies (with equal mechanical masses m) is given in the case of circular motion and $\mu = 0$. Several different approximations to the circular motion are also studied with neglect of the different relativistic terms. These results are compared with each another. Finally, the rectilinear motions and the effective forces are discussed. It will be interesting to compare the results obtained in this paper with the quantum field theoretical case.

Y. Yamaguchi.

Peierls, R. E.: A survey of field theory. I. General background. Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. 18, 423—432 (1955).

Salam, A.: A survey of field theory. II. Fields and particles. Ibid. 18, 433—440 (1955).

Matthews, P. T.: A survey of field theory. III. Interactions of quantized fields. Ibid. 18, 441—451 (1955).

Matthews, P. T.: A survey of field theory. IV. Properties of the π -meson. Ibid. 18, 452—461 (1955).

Feldman, G.: A survey of field theory. V. High energy experiments. Ibid. 18, 462—469 (1955).

Peierls, R. E.: A survey of field theory. VI. Final remarks. The new particles. Ibid. 18, 470—477 (1955).

Die Serie von Artikeln möchte dem Nicht-Spezialisten einen Eindruck vermitteln von den physikalischen Grundlagen, dem wichtigsten formalen Handwerkzeug, den erfolgreichen und den erfolglosen Anwendungen der Quantentheorie der Wellenfelder. Dabei war die ausgesprochene Absicht „zu vereinfachen ohne irreführen“. Dies ist den Verff. gelungen. Für denjenigen, der selbst auf dem Gebiet der Quantentheorie der Wellenfelder arbeiten möchte, kann die Artikelserie allerdings nur eine erste Orientierung bedeuten. — Teil II gibt einen Abriß der Theorie der freien Felder. In Teil III wird die Form der Wechselwirkung in Quantenelektrodynamik und Mesontheorie besprochen, ferner, in groben Zügen, die Störungsrechnung nach Feynman-Dyson und ihre Anwendung zur Berechnung von Phänomenen wie dem anomalen magnetischen Moment des Elektrons und der Lamb-shift. Die Teile IV und V bringen diejenigen experimentellen Fakta der Mesonphysik, die für das qualitative Verständnis besonders bedeutsam sind (Spin, Parität, Ladungsunabhängigkeit der Wechselwirkung, Meson-Nukleon-Resonanz). Von den allgemeinen Betrachtungen der Teile I und VI sei besonders erwähnt die Diskussion des klassischen Grenzfalles (VI) und die hübsche qualitative Analyse der verschiedenen Beiträge zur Selbstenergie des Elektrons (I).

R. Haag.

Imamura, Tsutomu: Potential in quantum field theory. Progress theor. Phys. 13, 183—188 (1955).

Freese, E.: Many-point correlation-functions in quantum field theory. Nuovo Cimento, X. Ser. 2, 50—57 (1955).

Unter physikalischer Argumentation wird vorgeschlagen, das unendliche Differentialgleichungssystem für „Korrelationsfunktionen“ (das sind, störungstheoretisch ausgedrückt, die Summen von Beiträgen von nur zusammenhängenden Feynmangraphen bestimmter äußerer Linienzahl) durch Berücksichtigung nur endlich vieler dieser Funktionen näherungsweise zu behandeln. — Die Berufung auf die Korrelationsnäherungen der statistischen Mechanik scheint dem Ref. nicht überzeugend, da die Korrelationsfunktionen der Feldtheorie hauptsächlich mit virtuellen Prozessen zu tun haben. Damit hängt zusammen, daß die Renormierung des unendlichen oder auch abgebrochenen Gleichungssystems praktisch nicht durchführbar ist.

K. Symanzik.

Matthews, P. T. and A. Salam: Propagators of quantized field. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 2, 120—134 (1955).

Recent progresses in the quantum field theory have been mainly based on the formulation in the Heisenberg representation to display general features of the theory independent of the perturbation calculations; e. g. problems of the propagators and the dispersion relations, etc. One way for calculating the transition matrices in the theory of propagators is to express the propagators as functional integrals over the fields. In the article under review, the author gives a simple and clear way for deriving the functional integral forms of the many body propagators for both cases of the free and interacting particles.

H. Umezawa.

Goldberger, Marvin L.: Causality conditions and dispersion relations. I. Boson fields. *Phys. Review*, II. Ser. 99, 979—985 (1955).

Die bekannten Dispersionsformeln von Kramers und Kronig werden in neuartiger Weise mit Hilfe des Formalismus der Feldtheorie abgeleitet und gleichzeitig auf geladene und neutrale Bose-Teilchen mit endlicher Ruhemasse verallgemeinert.

Th. Sexl.

Goldberger, M. L., H. Miyazawa and R. Oehme: Application of dispersion relations to pion-nucleon scattering. *Phys. Review*, II. Ser. 99, 986—988 (1955).

Die in der vorigen Arbeit abgeleiteten Formeln werden zur Berechnung der Streuung von geladenen Pionen an Nukleonen herangezogen. In den Dispersionsformeln für diese Prozesse tritt ein ungewöhnliches Glied auf, welches einen gebundenen Zustand repräsentiert und das Neutron darstellen soll. Der Beitrag dieses Gliedes zur Streuung wird streng berechnet unter der Annahme, daß die Pionen pseudoskalar sind und daß ihre Wechselwirkung mit den Nukleonen ladungsunabhängig ist. Ferner wird ein Vergleich mit einer Näherungsrechnung des gleichen Problems von Low durchgeführt.

Th. Sexl.

Fer, Francis: Formation d'une équation non linéaire de la mécanique ondulatoire dans la théorie de la double solution. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 241, 1719—1721 (1955).

Chalatnikov (Khalatnikov), I. M.: The representation of Green's function in quantum electrodynamics in the form of continual integrals. *Soviet Phys., JETP* 1, 568—571 (1955), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* 28, 633—635 (1955).

Es wird die Greensche Funktion der Quantenelektrodynamik durch ein kontinuierliches Integral im Raum der Funktionen ψ , bzw. A dargestellt. Ist ein Koordinatengitter mit dem Zellenvolumen ω in dem vier-dimensionalen Raum eingeführt worden und sind $D_{\mu\nu}(ik)$, $A_\mu(i)$, $\psi(i)$, $S(ik)$, usw. die Abkürzungen für $D_{F\alpha\beta}(x_i - x_k)$, $A_\mu(x_i)$, $\psi_\alpha(\alpha_i)$, $S_{F\alpha\beta}(x_i - x_k)$, sowie $\check{S}(ik)$ bzw. $\check{A}(ik)$ für $S(ik) \eta_{ik}$ bzw. $\gamma_\mu^{\alpha\beta} A_\mu(i) \delta_{ik} \eta_{\alpha\beta}$ (wo $\eta_{\alpha\beta}$ eine geeignete, vertauschbare Matrix bedeutet), dann läßt sich die Greensche Funktion in der expliziten Form

$$G(l, m) = (\pi^{N/2} \sqrt{\text{Det } D_{\mu\nu}})^{-1} \cdot \int \bar{\psi}(l) \psi(m) \eta_{lm} \cdot \exp \{ -\bar{\psi}(i) \check{S}^{-1}(ik) \psi(k) - \\ - A(i) D^{-1}(ik) A(k) - \bar{\psi}(i) \check{A}(ik) \psi(k) \} \delta\psi \cdot \delta\bar{\psi} \cdot \delta A \times \\ \times \left(\int \exp \{ -\bar{\psi}(i) \check{S}^{-1}(ik) \psi(k) \} \delta\psi \delta\bar{\psi} \right)^{-1} S_{\text{vac}}^{-1}$$

angeben, wo N die Anzahl der Gitterpunkte bezeichnet.

J. I. Horváth.

Gor'kov, L. P. und I. M. Chalatinikov: Störungstheorie und asymptotisches Verhalten der Greenschen Funktionen in der Elektrodynamik der Teilchen mit dem Spin Null. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 103, 799—802 (1955) [Russisch].

In der Quantenelektrodynamik von Teilchen vom Spin null wird die asymptotische Form der Teilchenfortpflanzungsfunktion nach den halbstörungstheoretischen Methoden von Gell-Mann und Low (dies. Zbl. 57, 214) sowie Landau et al. [Doklady Akad., n. Ser. 95, 1177—1180 (1954) und frühere] gewonnen. Hierbei erweist sich die Benutzung des Kemmerschen β -Formalismus als vorteilhaft.

K. Symanzik.

Gunn, J. C.: Theory of radiation. Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. **18**, 127—183 (1955).

Der Artikel gibt eine klare, übersichtliche Darstellung der explizit kovarianten Formulierung der Quantenelektrodynamik und der Störungsrechnung nach Feynman-Dyson. Die Methoden der Renormierung werden besprochen und einige Anwendungen des Formalismus vorgeführt (höhere Näherungen bei Elektron-Elektron-Streuung und Compton-Effekt, Lamb-shift, anomales magnetisches Moment).

R. Haag.

Arnowitz, R. and S. Deser: High-energy multiple photon production. Nuovo Cimento, X. Ser. **2**, 707—718 (1955).

The authors explore possibilities of explaining large photon multiplicities, which have recently been observed in several unusual cosmic ray events, by examining the cases of conventional models as well as that of magnetic monopoles. A semiclassical method is applied, treating the motion of the matter field as prescribed (which can include, though, radiation reaction effects). They find that neither Bremsstrahlung of a fast charged particle when colliding with the Coulomb field of Al nucleus nor a fast antiparticle annihilation can give so high a multiplicity and so large an energy loss and deflection as experimental data do. The case of hypothetical magnetic poles (strongly coupled to electromagnetic field), on the other hand, gives a too high multiplicity. (The mass of monopole is put equal to electron mass, in order to obtain reasonable deflection.)

Z. Koba.

● **Bellamy, E. H. and R. G. Moorhouse** (ed. by): **Proceedings of the 1954 Glasgow Conference on Nuclear and Meson Physics.** (Conference sponsored by the International Union of Pure and Applied Physics.) London, New York: Pergamon Press, Ltd. 1955. IX, 352 p. 5 pl. 63 s. net.

Der Konferenzbericht enthält einige Übersichtsartikel und zahlreiche Einzelbeiträge. Insbesondere die letzteren haben wohl durchweg inzwischen durch neuere Arbeiten an Interesse eingebüßt, so daß wir uns hier zumeist auf Nennung der Übersichtsartikel beschränken. Im ersten Teil über „Kernkräfte und Nukleonenstreuung“ berichtet **W. S. M. Massey** über den Vergleich des experimentellen Materials über Nukleon-Nukleon-Streuung bis etwa 150 MeV mit einfachen Potentialannahmen, soweit hierzu Rechnungen vorliegen. Es ergibt sich hinsichtlich der Möglichkeit eines solchen Vergleichs ein „gedämpft optimistisches“ Bild, das sich gegenwärtig wenigstens für den angegebenen Energiebereich als tatsächlich gerechtfertigt erwiesen hat. **M. M. Lévy** und **R. E. Marshak** berichten ausführlich über die Ergebnisse bei Rechnungen mit einem mesonentheoretischen Potential. Es zeigt sich, daß dieses Potential qualitativ nicht unvernünftig erscheint und quantitativ als noch nicht widerlegt gelten muß. — da das von der Theorie vorhergesagte Potential noch nicht genügend genau bekannt ist. In dieser Beurteilung hat sich übrigens bis heute nicht viel geändert. Im umfangreichsten Teil über „Kerndaten und Kernmodelle“ gibt **J. A. Wheeler** einen sehr klaren Überblick über die verschiedenen Kernmodelle (Sandsackmodell, optisches Modell, Schalenmodell, Bruecknersche Näherung, Methode der kollektiven Parameter) und weist auf ihre jeweiligen Erfolge hin. Dabei betont er die größere Ähnlichkeit des kerntheoretischen Problems mit dem der Molekülbildung als mit dem des Atombaus. Ein kürzerer Übersichtsbeitrag von **V. Weisskopf** weist nochmals auf die unbefriedigende Situation (vor der Ausarbeitung der Bruecknerschen Ideen zur Kernbindung) hin. Der Teil über „Photospaltung“ enthält einen ausführlichen Beitrag von **D. H. Wilkinson** zur schalentheoretischen Erklärung der Giant-Resonanz. Der folgende Teil über „Beta- und Gammastrahlenübergänge“ bringt einen Einleitungsbericht von **K. Siegbahn** sowie einen Bericht von **C. S. Wu** über die Betazerfallskopplung. Auf diesem letzten Gebiet haben sich inzwischen zahlreiche neue Aspekte ergeben. Den schalentheoretischen Blickpunkt zum Betazerfall gibt **L. W. Nordheim**, den zu Gammaübergängen **M. Goldhaber**.

Im nächsten Abschnitt über „Pimesonen“ berichtet **H. A. Bethe** über die Lage bei der theoretischen Interpretation der vorliegenden Experimente; auch hier haben inzwischen vor allem die Arbeiten von Chew und Low weitere Klärung gebracht. Den Abschnitt über Feldtheorie leitet **W. Heisenberg** mit einer kurzen Zusammenfassung seiner neuartigen Quantisierungsmethode ein. Es folgen einige kurze Beiträge von **R. E. Peierls** über Eigenschaften von Fortpflanzungsfunktionen, von **S. F. Edwards** über ein Näherungsverfahren zur Auswertung solcher Funktionen, von **J. G. Valatin** über einen Grenzprozeß, durch den lokale Feldtheorien aus nicht-lokalen zu gewinnen sind, von **Morpurgo, Radicati und Tousek** über eine ungewöhnliche Definition der Zeitumkehrbarkeit bei quantisierten Systemen und von **R. G. Moorhouse** über einen Versuch zur feldtheoretischen Behandlung leichter Atomkerne. Der Abschnitt über „Experimentelle Methoden“ bei hohen Energien enthält von **R. Hildebrand** einen der ersten Berichte über die inzwischen so außerordentlich erfolgreich verwendete Glasersche Blaskammer. Der letzte Abschnitt über „Schwere Mesonen und Hyperonen“ enthält in der Hauptsache einen Übersichtsartikel von **C. C. Butler** über die Eigenschaften dieser Teilchen und eine Darstellung verschiedener Modelle zur Erklärung dieser abnormen Eigenschaften durch **M. Gell-Mann** und **A. Pais**, wobei bereits auch das später zu allgemeiner Anerkennung gelangte „strangeness number“-Prinzip von Gell-Mann in roher Form auftritt.

K. Symanzik.

Fermi, E.: Lectures on pions and nucleons. Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 2, 17—95 (1955).

Diese nach Fermis Tod von Feld ausgearbeiteten Vorlesungen (Varenna 1954) sind eine hervorragende Einführung in den Problemkreis. Sie beginnen mit der Erläuterung des isobaren Spins für Nukleonen und Pionen. Dann folgen die Kapitel über Pion-Nukleon-Streuung, Photoerzeugung von Pionen, Erzeugung von Pionen bei Nukleon-Nukleon-Streuung und über die Polarisierung der Nukleonen bei Streuung an Kernen.

G. Höhler.

Edwards, S. F.: The nucleon Green function in pseudoscalar meson theory. I. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 232, 371—376 (1955).

Edwards, S. F.: The nucleon Green function in pseudoscalar meson theory. II. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 232, 377—389 (1955).

Asribekov, V. E.: Renormierung von Ladung und Masse des Nukleons in der Theorie der Vakuum-Korrekturen zu Meson-Nukleon-Prozessen. Soobščeniia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 16, 27—34 (1955) [Russisch].

Nukleonselbstenergie und Vertexkorrektur bei freien Nukleonen werden für pseudoskalare Mesontheorie mit Feynman-Abschneidefaktor in g^2 - bzw. g^3 -Näherung berechnet. Hierbei wird die Kopplungskonstantenrenormierung (in der Definition von Watson und Lepore) in dieser Näherung gewonnen. Die auftretenden Integrale werden mit den Methoden von Brown und Feynman (dies. Zbl. 46, 438) auf einfache Formen zurückgeführt.

K. Symanzik.

Mano, Koichi: The self-energy of the scalar nucleon. Progress theor. Phys. 14, 435—456 (1955).

Verf. wendet die von Feynman (dies. Zbl. 65, 239) angegebene variationelle Methode zur Behandlung von Elektronen in polaren Kristallgittern, auf die Berechnung der Selbstenergie eines skalaren Feldes in Wechselwirkung mit einem zweiten skalaren Feld, an. Es ergibt sich, daß keine Lösungen existieren und daß kein niedrigster Energieeigenwert vorhanden ist.

M. E. Mayer.

Nigam, B. P. and H. P. Noyes: Quasi-bound states of the pion-nucleon system in the lowest Tamm-Dancoff approximation. Phys. Review, II. Ser. 99, 989—995 (1955).

Die experimentell beobachtete Streuung von Pionen an Nukleonen kann mit Hilfe der Tamm-Dancoff-Näherung in der pseudoskalaren Mesonentheorie mit

pseudoskalarer Kopplung wiedergegeben werden, wenn man annimmt, daß die Streuung in $I = 3/2$ (I = Ladungsquantenzahl), $J = 1$ (p -Zuständen) erfolgt und wenn man $G^2/4\pi \sim 15$ setzt. Da das Λ^0 -Teilchen in ein Pion und ein Nukleon mit einer mittleren Lebensdauer von $3 \cdot 10^{-10}$ sec zerfällt, wird die Frage aufgeworfen, ob nicht in den Streuformeln ein gebundener Zustand hoher Drehimpulsquantenzahl enthalten ist, der mit dem Λ^0 -Teilchen identifiziert werden könnte. Da auf Grund der Tamm-Dancoff-Näherung ein Wert von $G^2/4\pi \sim 10^3$ folgen würde, ist nach der Meinung der Autoren eine solche Möglichkeit auszuschließen. *Th. Seel.*

Migdal, A. B.: Meson production at energies close to threshold. Soviet Phys., JETP 1, 7—9 (1955), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 28, 10—12 (1955).

Aus einer halbphänomenologischen Theorie [vgl. A. H. Rosenfeld, Phys. Review 96, 130—139 (1954)] werden das Energiespektrum der durch Nukleon-Nukleon-Stoß produzierten π -Mesonen und das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte für Mesonproduktion mit zwei freien oder zwei gebundenen Nukleonen im Endzustand berechnet. *W. Brenig.*

Dalitz, R. H.: Radiative τ -meson decay. Phys. Review, II. Ser. 99, 915—920 (1955).

The characteristics of the decay process $\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm + \pi^+ + \pi^- + \gamma$ are considered. For a pseudoscalar τ -meson, the probability $R(k)$, relative to the 3π -decay, for emission of a photon of energy k Mev or greater is found to be 1.06×10^{-3} for $k = 10$ and 1.1×10^{-4} for $k = 30$. Quite similar values are obtained for other spin values compatible with the τ -meson decay data. Branching ratios for other decay processes are briefly discussed and it is suggested that the absence of the decay mode $\tau^\pm + \gamma$ or $\pi^\pm + e^+ + e^-$ may provide some evidence against a nonzero τ -meson spin. Competing decay processes involving a neutrino are not considered. — Two appendices: Appendix A. Relativistic calculation of the internal Bremsstrahlung. Appendix B. Matrix elements for E_1 transitions. *Author's summary.*

Baž, A. und Ja. Smorodinskij: Isotopischer Spin leichter Kerne. Uspechi fiz. Nauk 55, 215—264 (1955) [Russisch].

It is shown in this survey which general properties of the spectra are in connection with the hypothesis of the charge independence of the nuclear forces, and which conclusions can be drawn on the correctness of this hypothesis. *F. Cap.*

Brodskij, A., D. Ivanenko und N. Korst: Die Massendifferenz der Elementarteilchen. Doklady Akad. Nauk SSSR 105, 1192—1195 (1955) [Russisch].

Verff. kritisieren die Einführung von mehreren voneinander verschiedenen Abschneideparametern bei der Abschätzung der Massendifferenzen zwischen geladenen Nukleonen und Mesonen einerseits und neutralen andererseits durch Feynman und Speisman (dies. Zbl. 55, 219) und finden, daß man zu qualitativ befriedigenden Ergebnissen auch bei (nach der Methode von Schwinger) abgeänderter Regularisierung mit dann einheitlichem Abschneideparameter von 1,35 Nukleonenmassen gelangt. Dieser Regularisierung schreiben die Verff. physikalische Bedeutung, etwa im Sinne gequantelter Eigenzeit, zu. *K. Symanzik.*

Kernphysik:

Mittelstaedt, P.: Die Verteilung der Nukleonen in schweren Atomkernen. Fortschr. Phys. 3, 497—535 (1955).

Bericht über den Fragenkreis um die Dichteverteilung der Protonen und Neutronen in kugelsymmetrischen, schweren Atomkernen. Die neueren Versuchsdaten sowie die möglichen Gründe der beobachteten Anhäufung von Protonen gegen die Kernmitte zu werden besprochen, die Ansätze des statistischen Kernmodells und der vom Verf. durchgerechnete Fall des ^{207}Pb ausführlich dargestellt. Die Diskussion von J. M. C. Scott (dies. Zbl. 55, 226) wurde nicht verwertet. *E. Breitenberger.*

Cap, F.: Über einige Methoden zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes der elastischen Nukleon-Nukleon-Streuung. 1. Teil: Zentralkräfte. Fortschr. Phys. 3, 371—407 (1955).

This paper deals with the classical motion of the two particles of equal masses, where the interaction is produced by the neutral scalar meson field. The relativistic and classical equation of motion was solved numerically for the one dimensional motion. It was shown that at the point where the attractive meson potential becomes equal to $-m c^2$ ($m c^2$ is the rest energy of the particle) the acceleration of the two particles attracting each other becomes zero and within this distance changes its sign. In other words, the relativistic effect is equivalent to the repulsion at the short distance. It is interesting to see the connection between this effect and the empirical hard core of the actual nuclear forces.

Y. Yamaguchi.

Dąbrowski, Janusz and Jerzy Sawicki: Simple model of the ${}^6\text{Li}$ nucleus and the neutron induced reactions on ${}^6\text{Li}$. *Acta phys. Polon.* **14**, 323—335 (1955).

Experimental information obtained from $\text{Li}^6(\gamma, d)\text{He}^4$ etc. and theoretical arguments suggest us that the Li^6 nucleus is, in good approximation, considered as a bound system consisting of an α -particle and a deuteron. Using this simple model, one can calculate the angular distributions of (a) $\text{Li}^6(n, t)\text{He}^4$ and (b) $\text{Li}^6(n, d)\text{He}^5$, assuming that (a) is a „pickup“ process while (b) is due to the mechanism of a „knock-out“ of the deuteron as a whole from Li^6 nucleus. Calculated results are in fairly good agreement with experiment.

Y. Yamaguchi.

Herzenberg, A.: Studies on the α -particle model of nuclei. I. II. *Nuovo Cimento*, X. Ser. **1**, 986—1007, 1008—1040 (1955).

Goodmann, Clark: Nuclear structure as revealed by electric excitation. *Progress theor. Phys.* **14**, 95—106 (1955).

Die Wirkungsquerschnitte für die Coulombanregung werden in Zusammenhang gebracht mit den Quadrupolmomenten der Atomkerne. Ein Vergleich der so gewonnenen Quadrupolmomente mit denen, die nach anderen Methoden — insbesondere aus dem effektiven Trägheitsmoment der Rotationsniveaus — bestimmt wurden, führt zu dem zweifelhaften Schluß, daß die Protonen sich vorwiegend in der Kernmitte befinden, und ihre Verteilung stärker kugelsymmetrisch ist als die der Neutronen.

K. Wildermuth.

Nilsson, Sven Gösta: Binding states of individual nucleons in strongly deformed nuclei. *Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd.* **29**, Nr. 16, 68 S. (1955).

Bekanntlich hat die Deformation des Atomkerns großen Einfluß auf die Bewegung der einzelnen Nukleonen im Kern. In der vorliegenden Arbeit werden die Bindungszustände eines rotationselliptisch deformierten Kerns untersucht, wobei für die Einteilchenbeiträge zum Hamiltonoperator der Ansatz gemacht wird:

$$H = H_0 + C \vec{l} \cdot \vec{b} + D \vec{l}^2$$

H_0 enthält die kinetische Energie und das deformierte Oszillatorpotential. Das zweite Glied berücksichtigt die Spin-Bahn-Kopplung, und das letzte Glied korrigiert die Termfolge des Oszillatorpotentials so, daß weitgehende Übereinstimmung mit der empirischen Termfolge erreicht wird. Die Berechnung der Wellenfunktionen erfolgte auf der Rechenmaschine; die Ergebnisse sind in Form von Tabellen angegeben.

K. Wildermuth.

Larin, S. I.: The momentum distribution in the statistical model of the atom. *Soviet Phys., JETP* **1**, 394—397 (1955), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **28**, 498—501 (1955).

Mit Hilfe des Thomas-Fermi-Modells wird die Verteilungsfunktion für das Quadrat des Drehimpulses berechnet, unter Berücksichtigung der Austauschwechselwirkung der Elektronen. Die Übereinstimmung mit den empirischen Daten wird durch die Berücksichtigung der Austauscheffekte — vor allem bei hohen Ord-

nungszahlen — verbessert. Ferner wird mit Hilfe der neu gewonnenen Verteilungsfunktion das erste Auftreten bestimmter Drehimpulszustände diskutiert.

H.-J. Mang.

Tati, Takao: Separation energies and nuclear structures in light nuclei. Progress theor. Phys. 14, 107—125 (1955).

Die Arbeit betrachtet die Abtrennungsenergie für das am schwächsten gebundene Nukleon bei Kernen mit Massenzahlen zwischen 10 und 50 in ihrer Abhängigkeit von der Kernstruktur. Phänomenologisch läßt sich der Gang der in komplizierter Weise von Kern zu Kern schwankenden Abtrennungsenergie auf Grund der halbempirischen Massenformel mit den Fermischen Koeffizienten verstehen. Die auftretenden systematischen Fehler lassen sich durch Korrektur der Formel mit Hilfe des Wignerschen Modells, das Zweikörperwechselwirkung zwischen symmetrischen Paaren in einer Supermultiplettstruktur annimmt, beseitigen. Dies stützt die Annahme, daß der Symmetrieeffekt bei der Kernbindungsenergie durch die Zweikörperwechselwirkung hervorgerufen wird. Noch vorhandene Abweichungen machen die Heranziehung eines weiteren Modells notwendig. Im vorliegenden Massenbereich haben die Kerne neben der dominierenden Supermultiplettstruktur auch Schalenstruktur mit $j j$ -Kopplung. Theoretische Überlegungen legen die Vermutung nahe, daß etwa die Hälfte der potentiellen Energie des Kernels unabhängig vom Symmetrieeffekt und von der in der Arbeit definierten „Ausdehnungsfähigkeit“ des Kernels ist.

K. H. Höcker.

Migdal, A.B.: The theory of nuclear reactions with production of slow particles. Soviet Phys., JETP 1, 2—6 (1955). Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 28, 3—9 (1955).

Es werden Energie- und Winkelverteilungen für Kernreaktionen, bei denen langsame Teilchen erzeugt werden berechnet. Weiter wird eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit für die Erzeugung von Nukleonen zu gebundenen Zuständen gebracht.

F. Winterberg.

Goldhaber, M. and J. Wenner: Electromagnetic transitions in nuclei. Ann. Review Nuclear Sci. 5, 1—24 (1955).

Der Verf. gibt eine Übersicht über die Theorie der elektromagnetischen Übergänge in einem Atomkern. (Kern-Photoeffekt, γ -Anregung, Coulomb-Anregung, γ -Zerfall, innere Umwandlung, innere Paarerzeugung.) Zunächst wird die allgemeine Methode auseinandergesetzt (Multipol-Entwicklung), mit kurzer Erwähnung des Zusammenhangs zwischen den Multipoloperatoren und den entsprechenden statischen Multipolen. Anschließend werden die Konsequenzen spezieller Annahmen untersucht (Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte, Schalenmodell, Kollektives Modell). Zum Schluß findet man eine kurze Diskussion der Frage, wie weit die Operatoren für die Ladungs- und Stromdichte durch die Wechselwirkung der Nukleonen (= Deformation ihrer Mesonwolken) geändert werden.

G. Süßmann.

Sawicki, J.: Note on Coulomb effects in stripping reactions. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 313—319 (1955).

Benützt man die Horowitz-Messiasche Näherung und die asymptotische exponentielle Form der Wellenfunktion für das eingefangene Teilchen, so läßt sich für den speziellen Fall eines S -Zustandes im Einteilchenmodell die Bornsche Näherung für (d, p) und (d, n) Reaktionen auch für den Fall analytisch berechnen, daß die ebenen Wellen durch Coulombwellenfunktionen ersetzt werden. Der Verf. berechnet auf diese Weise die Wirkungsquerschnitte von (d, p) und (d, n) Reaktionen und vergleicht sie mit den Querschnitten, die sich ohne Berücksichtigung des Coulombeffektes ergeben, sowie am Beispiel der $^{16}\text{O}(d, p)^{17}\text{O}^*$ -Reaktion mit experimentellen Werten. Eine entsprechende Untersuchung erfolgt für die $^6\text{Li}(n, \alpha)^3\text{H}$ -Reaktion.

K. H. Höcker.

Goldman, I. I. and A. B. Migdal: The theory of scattering in the semi-classical approximation. Soviet Phys., JETP 1, 304—309 (1955), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 28, 394—400 (1955).

Bei Streuproblemen der Kernphysik wird gewöhnlich die Poincaré-Hornsche Integrationsmethode (identisch mit der sog. W-K-B-Methode) der Schrödingergleichung zur Berechnung der Phasenänderungen benützt und implizite vorausgesetzt, daß es sich um die Streuung an einem zentralsymmetrischen Feld handelt. Die letzte Voraussetzung kann fallengelassen werden. Nennt man nämlich ψ_0 die übliche Näherungslösung nach der W-K-B-Methode und setzt die strenge Lösung in der Form $\psi = \psi_0 + \psi_1$ an, so erhält man für ψ_1 eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Lösung im dreidimensionalen Fall mit Hilfe einer Greenschen Funktion bestimmt werden kann. Die für das Streuproblem erforderliche Greensche Funktion kann nun konstruiert werden, wenn die orthogonalen Trajektorien des entsprechenden Problems der Newtonschen Mechanik bekannt sind. Die Idee der Lösungsmethode wird an dem eindimensionalen Problem der Reflexion einer Welle an einer Potentialschwelle für den Fall $E \gg V(x)$ erläutert. *Th. Sexl.*

Drozov, S. I.: The scattering of fast neutrons by non-spherical nuclei. I. Soviet Phys., JETP 1, 591—600 (1955), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 28, 734—735 (1955).

Die nichtelastische Streuung von Neutronen, deren kinetische Energie sehr viel größer ist als die möglichen Rotationsenergien der streuenden Kerne, die einen Spin Null, die Gestalt eines Rotationsellipsoides haben sollen und an deren Oberfläche die Schrödingersche Wellenfunktion verschwinden soll („schwarzer“ Kern) wird bekanntlich beschrieben durch die Wellenfunktion

$$\psi \sim e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \varphi_{n_0}(\omega) + \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} \cdot \sum_n F_{n n_0}(\Omega) \varphi_n(\omega).$$

Darin bedeutet \mathbf{k} den Wellenzahlvektor des einfallenden Neutrons (k seinen absoluten Betrag), φ_{n_0} die Rotationseigenfunktion des streuenden Kernes im Quantenzustand n_0 , gegeben durch eine bestimmte Kugelflächenfunktion $Y_{lm}(\omega)$, und $F_{n n_0}$ die Übergangsmatrix

$$F_{n n_0}(\Omega) = \int d\omega \varphi_n^*(\omega) f(\omega, \Omega) \varphi_{n_0}(\omega)$$

in den Raumwinkel Ω und $f(\omega, \Omega)$ die Streuamplitude in der Richtung Ω . Für diese wird unter der Annahme, daß die de Brogliewellenlänge des einfallenden Neutrons sehr viel kleiner ist als die Lineardimensionen R des streuenden Kernes (d. h. $kR \ll 1$) die optische Formel für die Beugung von Licht an einem schwarzen Ellipsoid angesetzt, nämlich

$$f(\omega, \Omega) = [(kb)^2/i k] \xi(\cos \vartheta) J_1(t)/t.$$

Dabei ist $t = kb \Theta (\xi^2 \cos^2(\varphi - \Phi) + \sin^2(\varphi - \Phi))^{1/2}$;

$$\xi(\cos \vartheta) = (z^2 + (1 - z^2) \cos^2 \vartheta)^{1/2};$$

$z = a/b$; a und b Halbmesser des Rotationsellipsoides; ϑ und φ orientieren die Achse des Ellipsoides; Θ und Φ bestimmen die Streurichtung ($z = 1$ bedeutet einen kugelförmigen Kern). Der Wirkungsquerschnitt für eine Streuung des Neutrons in der Richtung Ω bei Anregung des n -ten Rotationszustandes des streuenden Kernes ist dann gegeben durch $\sigma_n(\Phi) = |F_{n n_0}(\Omega)|^2$. *Th. Sexl.*

Drozov, S. I.: The scattering of fast neutrons by non-spherical nuclei. II. Soviet Phys., JETP 1, 588—591 (1955), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 28, 736—738 (1955).

In Teil II wird die in Teil I (s. vorstehendes Referat) angegebene Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt für den speziellen Fall $kR = 10$; $z = 2$ numerisch ausgewertet und das Resultat graphisch veranschaulicht. *Th. Sexl.*

Hassitt, A.: An improved variational method for the solution of the one-group diffusion equations. *J. Nuclear Energy* **2**, 112—117 (1955).

Gegeben ist ein Reaktor, bestehend aus einer Anzahl Gebieten V_1, V_2, \dots mit den Diffusionskonstanten D_i und den Diffusionslängen $1/\kappa_i$. Die Neutronenverteilung werde nach der Ein-Gruppen-Diffusionstheorie durch die Diffusionsgleichung $(\Delta - \kappa_i^2) \varphi_i = 0$ bestimmt. φ sei auf der äußeren Oberfläche gleich Null; im übrigen gelten die üblichen Übergangsbedingungen: Stetigkeit der Dichte und der Normalkomponente des Stromes an der Grenzfläche. Der formale Weg der Lösung (Entwicklung von φ_i nach orthogonalen Funktionen) ist für die Praxis oft sehr unbequem, selbst wenn die Reihen nach einigen Termen abgeschnitten werden. Es wird hier ein Verfahren beschrieben, wie man in praktischen Fällen, fußend auf einer Variationsmethode und unter Anwendung einer Iteration, etwa bei vorgegebenen $\kappa_1^2, \kappa_2^2, \dots; D_1, D_2, \dots; V_1, V_2, \dots$ zu dem dazugehörigen κ_1^2 gelangen kann, ohne eine transzendente Gleichung lösen zu müssen.

G. Helms.

Sykes, J. B.: Moderation and diffusion of neutrons from a localized pulsed source. *J. Nuclear Energy* **2**, 31—37 (1955).

Die Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil wird die Marshaksche Transportgleichung für Wasserstoff

$$\mu l(u) \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{l(u)}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^u du' \int_{4\pi} d\Omega' \psi(u', \mu') e^{-(u-u')} \delta(\mu_0 - e^{(u-u')/2}) + \frac{\delta(z) \delta(u) \delta(t)}{4\pi}$$

durch einen Polynomansatz

$$\psi(u, \mu, z, t) = e^{-|z|} e^{-t} \sum_{k, m, n} \frac{2k+1}{4\pi} a_{k m n}(u) P_m(\mu) T_m(z) L_n(t)$$

für eine Quelle schneller Neutronen gelöst. Im zweiten Teil wird die räumlich-zeitliche Verteilung der thermischen Neutronen, die durch Bremsung der monoenergetischen Neutronen einer isotrop emittierenden pulsierenden Punktquelle schneller Neutronen im unendlich großen homogenen isotrop streuenden Medium entstehen, diskutiert.

F. Cap.

Westcott, Carl H.: The specification of neutron flux and nuclear cross-sections in reactor calculations. *J. Nuclear Energy* **2**, 59—75 (1955).

Die Reaktionsrate (Zahl der Anregungen, Einfang-, Zerfalls- oder Spaltprozesse pro Sekunde) läßt sich einmal mit Hilfe des „wahren“ Flusses $F = n \cdot v$ und des effektiven Wirkungsquerschnitts $\sigma_{\text{eff}} = \sigma(v)$ in der Form $R = F \sigma_{\text{eff}}$ schreiben, zum andern mit Hilfe des „konventionellen“ Flusses $\Phi = n \cdot v_0$ ($v_0 = 2,2 \cdot 10^5 \text{ cm/sec}$) und des konventionellen Wirkungsquerschnitts $\sigma_0 = \sigma(v_0)$ in der Form $R = \Phi \sigma_0$. Mißt man in der Praxis die Reaktionsrate mit einem $1/v$ -Detektor, so muß man den aus der gemessenen Reaktionsrate zu bestimmenden konventionellen Fluß erst auf den wahren Fluß umrechnen. Diese Umrechnungen werden für ein thermisches und ein Neutronenspektrum mit einem epithermischen Anteil durchgeführt. Außerdem wird eine Umrechnung für den Fall angegeben, daß man die Reaktionsrate mit einem Detektor mißt, dessen Wirkungsquerschnitt eine einzelne Breit-Wigner-Resonanzstelle besitzt. Abschließend werden einige numerische Beispiele ausgeführt.

G. Wallis.

Newmarch, D. A.: A modification to the diffusion theory of the thermal fine structure in a reactor to account for the effect of air channels. *J. Nuclear Energy* **2**, 52—58 (1955).

Um den Einfluß von Luftkanälen auf die räumliche Flußverteilung thermischer Neutronen in der Diffusionstheorie zu erfassen, berechnet Verf. für eine zylindrische Einzelzelle das Verhältnis (Fluß an der Grenzfläche Luft-Bremsmittel): (Fluß an der Grenzfläche Luft-Uran) für die beiden Anordnungen a) Uranstäbe vom Radius a in

Luftkanal vom Radius c , und b) Uranhohlstäbe, innerer Radius g , äußerer Radius a in Luftkanal vom Radius c . Hierbei wird angenommen, daß die Einzelzelle unendlich lang ist und konstanten Querschnitt besitzt. Mit Hilfe der nach der Eingruppen-theorie gewonnenen Flußverteilung wird noch der thermische Verwertungsgrad f berechnet. *F. Cap.*

Chernick, J. and I. Kaplan: The nuclear reactor with a transverse air gap. *J. Nuclear Energy* 2, 41—51 (1955).

Angesichts der praktischen Wichtigkeit von Reaktoren mit Luftspalten untersuchen Verf. einen zylindrischen Reaktor mit rechteckigem oder kreisförmigem Querschnitt und zentralem transversalem Spalt nach der Diffusionstheorie und nach der Eingruppen-Transporttheorie. Es zeigt sich, daß nach der Diffusionstheorie die kritische Länge eines würfelförmigen Reaktors um 2δ (und um die Spaltbreite δ) vergrößert werden muß. *F. Cap.*

Iliffe, C. E.: Thermal buckling of a rod heat source in a tubular coolant duct. *J. Nuclear Energy* 2, 1—14 (1955).

Bei einigen Reaktor-Typen werden die zylinderförmigen Uranstäbe von einem Kühlmittel in einem konzentrischen Kühlkanal umspült. Eine etwaige Ausbiegung des Uranstabes nach einer Seite vermindert die Strömungsgeschwindigkeit des Kühlmittels und damit die Wärmeabgabe des Stabes zu dieser Seite. Das Ergebnis ist eine zusätzliche Erhitzung des Stabes an der betreffenden Seite, die infolge der thermischen Ausdehnung die anfängliche Krümmung verstärkt. Diese Zusammenhänge werden näherungsweise berechnet. *H. Gaus.*

Bay, Z., V. P. Henri and H. Kanner: Statistical theory of delayed-coincidence experiments. *Phys. Review*, II. Ser. 100, 1197—1208 (1955).

Die Verf. geben eine allgemeine statistische Theorie für Experimente mit verzögerten Koinzidenzen. Dabei ermöglicht die Einführung einer neuen, experimentell bestimmbaren Größe C , der „total coincidence counting rate“, bisher verwendete idealisierende Annahmen fallen zu lassen und Mehrdeutigkeiten zu vermeiden. Insbesondere werden Unstimmigkeiten zwischen früheren Definitionen der Auflösungszeit beseitigt. Ferner läßt sich eine direkte Beziehung zwischen der Zahl der ursprünglichen Ereignisse und der Koinzidenzausbeute herstellen. Der Einfluß regelloser zeitlicher Verzögerungen auf die Koinzidenzkurven wird berechnet. Es folgt eine statistische Berechnung der Genauigkeit von Messungen der mittleren Lebenszeit durch Bestimmung der Momente der Koinzidenzkurve, wobei speziell auf die ersten Momente eingegangen wird. Es ergibt sich: (1) Die günstigste Auflösungszeit ist die Wurzel aus einem gewogenen mittleren Quadrat der beim Versuch vorhandenen Verzögerungszeiten. Sie läßt sich experimentell bestimmen. (2) Wählt man die günstigste Auflösungszeit und mißt die Punkte der Koinzidenzkurve nacheinander, so erhält man einen Fehler, der etwa doppelt so groß ist, wie der kleinste theoretisch mögliche Fehler. (3) Die Momentenmethode kann stets zur Bestimmung von Zeitverzögerungen herangezogen werden. Andere Methoden sind nur unter bestimmten Einschränkungen anwendbar, wobei sich ähnliche Fehler wie bei der Momentenmethode ergeben. — Im Anhang wird die gegebene Theorie auf radioaktive Familien erweitert.

K. H. Höcker.

Gardner, J. W., H. Gellman and H. Messel: Numerical calculations on the fluctuation problem in cascade theory. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 2, 58—74 (1955).

Berechnungen werden zum Teil ausgeführt und zum Teil vorgeschlagen über die Fluktuationserscheinungen von Nukleonen-Kaskaden und Elektron-Photon-Kaskaden. *L. Jánossy.*

Ramakrishnan, Alladi and S. K. Srinivasan: Fluctuations in the number of photons in an electron-photon cascade. *Progress theor. Phys.* 13, 93—99 (1955).

Numerical results are given relating to the mean and mean square number of photons in a

cosmic ray cascade to supplement those given earlier by Ramakrishnan and Mathews [Progress theor. Phys. **11**, 95—117 (1954)] relating to electron distribution.

Zusammenfassg. d. Autoren.

Neufeld, Jacob and R. H. Ritchie: Density effect in ionization energy loss of charged particles. Phys. Review, II. Ser. **99**, 1125—1128 (1955).

A more rigorous justification is given for the statement made by Aage Bohr (this Zbl. **33**, 45) that for an incident particle of relativistic velocity, the electrostatic effect of the surrounding electrons is negligible and the main factor in the screening is due to the electromagnetic interactions which limit the impact parameter to a value c/Ω , where $\Omega = (4\pi n e^2/m)^{1/2}$ and n is the electron density in the medium.

Zus. d. Verff.

Überall, Herbert: Radiale Ausbreitung bei der Photodiffusion. Acta phys. Austriaca **8**, 324—334 (1955).

Die Änderung der radialen Intensitätsverteilung eines parallelen Bündels von Gammastrahlen bei Eindringen in Materie wird untersucht. Die zugrunde liegende Transportgleichung wird unter Beschränkung auf $\hbar\omega \leq mc^2$ durch verschiedene Näherungsmethoden gelöst; die so erhaltene Intensitätsverteilung ist in Integralform dargestellt und wird für Spezialfälle numerisch ausgewertet.

Zusammenfassung des Autors.

Blatt, J. M.: Theory of tracks in nuclear research emulsions. Austral. J. Phys. **8**, 248—272 (1955).

The process of the formation of a visible track in a nuclear research emulsion is approximated by a simplified model which reduces it to a one-dimensional problem. Within this basic approximation, there are included many different detailed models, including all models so far proposed in the literatur. We derive complete theoretical results in terms of a small number of definite integrals. We then specialize to particular detailed models, and make a quick comparison against experiment.

Aus der Zusammenfassg. des Autors.

Ramakrishnan, Alladi and P. M. Mathews: Straggling of the range of fast particles as a stochastic process. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **41**, 202—209 (1955).

Astronomie. Astrophysik. Geophysik

Ferrari d'Occhieppo, Konradin: Direkte Relationen zwischen ekliptikalen, galaktischen und azimutalen Koordinaten. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. IIa **164**, 273—310 (1955).

Bei der Behandlung astronomiegeschichtlicher und astronomisch-chronologischer Aufgaben spielt das ekliptikale Koordinatensystem eine größere Rolle als das äquatoriale; dasselbe gilt für das galaktische Koordinatensystem bei der Reduktion radioastronomischer Beobachtungen der Milchstraße und bei stellarstatistischen Arbeiten. Verf. hat daher die notwendigen Relationen zwischen diesen und dem azimutalen Koordinatensystem — dem System der unmittelbaren Beobachtung — mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie abgeleitet. Wegen der größeren Rechengenauigkeit werden Formeln in der Tangens-Form angestrebt. Die ekliptikale Breite der Körper unseres Sonnensystems ist in der Regel klein, weshalb bei geringen Ansprüchen an die Genauigkeit der Einfluß der Breite auf Azimut und Zenitdistanz durch eine nachträgliche differentielle Korrektur berücksichtigt werden kann. In einem Anhang findet man die Differentialformeln in fast-rechtwinkligen sphärischen Dreiecken und Hilfstafeln zur Auswertung der abgeleiteten Formeln.

W. Strohmeier.

Kooy, J. M. J.: On the possibility to determine the radius of curvature of intergalactic space and the rate of increase of this radius by astronomical observation. Simon Stevin **30**, 144—155 (1955).

Zurückgreifend auf Weltmodelle von Eddington werden die Fälle des mit der Zeit linear expandierenden Weltalls und des auf Grund einer nach innen gerichteten Kraft oszillierenden Weltradius behandelt, in dem Bestreben, den Entscheid an Hand von Beobachtungen treffen zu können. Das Ergebnis der Ableitungen entspricht weitgehend dem bisher Bekannten.

W. Strohmeier.

Mihailović, Dobrivoje: Geometric interpretation of partial gradients in the theory of planet perturbations. *Bull. Soc. Math. Phys. Serbie* 7, 73—84 u. engl. Zusammenfassg. 84 (1955) [Serbisch].

The known serbian scientist Milanković has introduced (in 1939) in the differential equations of the theory of planet perturbations six new elements instead of elliptic ones: the two vector elements: the double area velocity $\mathfrak{C} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ and the perihelion's vector $\mathfrak{D} = \mathbf{v} \times \mathfrak{C} - \mu r^{-1} \mathbf{r}$, with condition $\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{D} = 0$, and one scalar element — the perihelion's time. These equations are expressed by means of partial gradients of the perturbing function (R) In regard to the vector elements (\mathfrak{C} and \mathfrak{D}) without the analysis of the function R . In this paper, starting with Milanković's equations, the author presents this analysis. It is shown that the graphs of end-points of the vectors $\text{grad}_{\mathfrak{C}} R$ and $\text{grad}_{\mathfrak{D}} R$ with beginning-points in origin, are straight lines lying in two parallel planes which are both perpendicular to the vector $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$. Further, it is proved that the vector $\text{grad}_{\mathfrak{C}} R$ lies in the plane formed by vector \mathfrak{C} and $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$, because it is possible to find its projection on the vector $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ and also the component of the vector $\text{grad}_{\mathfrak{D}} R$ in the plane perpendicular to the vector \mathfrak{D} . D. Rašković.

Roy, A. E. and M. W. Ovenden: On the occurrence of commensurable mean motions in the solar system. II. The mirror theorem. *Monthly Not. Roy. astron. Soc.* 115, 296—309 (1955).

In Part I [*Monthly Not. Roy. astron. Soc.* 114, 232 (1954)] it is shown that the preference for near-commensurability of mean motions demonstrated in a previous paper extends to the small satellites of Jupiter, including the retrograde ones, and to the retrograde satellite of Saturn, implying that stability of near-commensurable configurations is the reason for such a preference. In Part II it is proved that if, at a certain epoch, a system of n gravitating point-masses has each radius vector from the (assumed stationary) centre of mass of the system perpendicular to every velocity vector (hereinafter called a „mirror configuration“), then the behaviour of each of the point-masses under the internal gravitational forces of the system after the epoch will be a mirror image of its behaviour prior to the epoch. It is further shown that, if a mirror configuration of the system exists at two separate epochs, then the orbit of each point-mass is periodic.

Aus der Zus. der Verff.

Kikuchi, Sadaemon: Space-mean-frequency of stellar velocities: II. Case of cone-form spatial extension. III. Time-lag effect and Smart's correction. *Sci. Reports Tōhoku Univ.*, I. Ser. 39, 32—39, 88—96 (1955).

● **Unsöld, A.:** Physik der Sternatmosphären mit besonderer Berücksichtigung der Sonne. 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1955. IX, 866 S. 257 Abb., Gln. DM 168.—.

Daß der Verf. die ungeheuren Mühen nicht gescheut hat, eine völlig neu gestaltete und wesentlich umfangreichere zweite Auflage der Physik der Sternatmosphären herauszubringen, ist von den Astrophysikern in aller Welt außerordentlich begrüßt worden. Denn dieses Buch ist seit seinem ersten Erscheinen 1938 zum Standardwerk auf diesem Gebiet geworden. Wie schon im Untertitel hervorgehoben, steht die Theorie der Sonnenatmosphäre im Mittelpunkt. Im ersten Teil, der sich mit einer Sternatmosphäre im thermischen Gleichgewicht beschäftigt, werden die physikalischen und astrophysikalischen Grundlagen wie Strahlungstheorie, thermische Ionisation und Anregung sowie die Anwendungen auf die Strahlung der Sonne und der Sterne behandelt. Der zweite Teil befaßt sich mit dem kontinuierlichen Spektrum und dem Aufbau einer Sternatmosphäre. Er ist gegenüber der ersten Auflage am stärksten abgeändert und erweitert. Die Kapitel über die Strömungsgleichung — einer Integrodifferentialgleichung — dürften auch für Mathematiker von Interesse sein. Erwähnt seien hier auch die neu hinzugekommenen Abschnitte über Konvektion und Turbulenz. Der dritte, vierte und fünfte Teil haben die Messung, die Theorie und die Entstehung der Fraunhofer-Linien zum Gegenstand und nehmen entsprechend der Bedeutung in der Theorie der Sternatmosphären fast die Hälfte des gesamten Buches ein. Neben dem vielen Neuen, das diese Teile

enthalten, sei auf die Kapitel über die Theorie der Wachstumskurven und über die Klassifikation der Sternspektren hingewiesen. Der sechste Teil, Physik der Sonne, führt zu den äußeren Schichten und der Aktivität der Sonne und enthält auch ein besonderes Kapitel über Hydromagnetik. Der letzte Teil über die Radiofrequenzstrahlung und die kosmische Strahlung ist gegenüber der ersten Auflage neu hinzugekommen. In ihm wird nicht nur die Radiostrahlung der Sonne, sondern auch die galaktische und die extragalaktische Strahlung behandelt. Das ausführliche Literaturverzeichnis, das mehr als dreimal soviel Arbeiten wie in der ersten Auflage auführt, und das an Seitenzahl fast um das Doppelte gewachsene Volumen dieses Werkes zeigen, welche Fortschritte seit dem Erscheinen der ersten Auflage in der Theorie der Sternatmosphären erzielt werden konnten. Der Autor und seine Schüler sind daran führend beteiligt. Trotz der Fülle des Materials und trotz der heute z. T. komplizierteren Probleme ist es dem Autor wiederum gelungen, eine Gesamtdarstellung von besonderer Klarheit zu geben.

R. Lüst.

Inaba, Humio: On the formation of stellar absorption lines by coherent and non-coherent scattering. Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser. 39, 60—72 (1955).

Die Intensitätsverteilung in stellaren Absorptionslinien wird berechnet unter Berücksichtigung der kontinuierlichen Absorption, sowie der wahren Absorption, der kohärenten und der inkohärenten Streuung in den Linien. Über bisherige Rechnungen hinausgehend wird die Abhängigkeit des Verhältnisses η_ν von Linien — zu kontinuierlicher Absorption und der Kirchhoff-Planck-Funktion $B_\nu(T)$ von der Tiefe in der Atmosphäre berücksichtigt. In dem Glied der Ergiebigkeit, welches die inkohärente Streuung berücksichtigt, wird die — streng genommen frequenzabhängige — mittlere Strahlungsintensität durch die entsprechende Größe für die Linienmitte approximiert.

A. Unsöld.

Kaminisi, Keisuke: The gravitational potential energy and lifetime of a partially degenerate standard stellar model. Kumamoto J. Sci., Ser. A. 2, 213—219 (1955).

Verf. berechnet im Anschluß an eine Arbeit von G. W. Wares die potentielle Gravitationsenergie eines teilweise entarteten Standard-Sternmodells, und an Hand der Ergebnisse diskutiert er dann den Entwicklungsgang und die Lebensdauer der weißen Zwerge.

H. Vogt.

Lüst, R. und A. Schlüter: Drehimpulstransport durch Magnetfelder und die Abbremsung rotierender Sterne. Z. Astrophys. 38, 190—211 (1955).

Da die Beobachtung den Schluß nahelegt, daß ein Stern im Laufe der Zeit Drehimpuls verliert, wird als Mechanismus für diese Abbremsung die Drehimpulsübertragung vom Stern auf das interstellare Medium durch das Magnetfeld des Sterns angenommen. Für ein solches Drehimpuls transportierendes und die nötigen Symmetrie- und Regularitätsbedingungen erfüllendes Feld wird ein Beispiel angegeben und näher diskutiert. In diesem Beispiel hat das Feld die spezielle Eigenschaft, daß die toroidale Komponente der magnetischen Kraft — $(1/4\pi) [\mathfrak{H} \text{ rot } \mathfrak{H}]$ verschwindet. Die Frage, ob allgemeiner kraftfreie Magnetfelder, d. h. Felder, für die $[\mathfrak{H} \text{ rot } \mathfrak{H}]$ identisch verschwindet, Drehimpuls transportieren können, bleibt offen. Abschätzungen für die Abbremsung rotierender Sterne zeigen, daß der Abbremsmechanismus bei einer Oberflächenfeldstärke von 100 Gauß einen an der Grenze der Rotationsinstabilität rotierenden Stern in weniger als 10^6 Jahren vollständig abzubremesen vermag.

R. Kippenhahn.

Jung, K.: Über die Darstellung der Gezeitenkräfte. Gerlands Beiträge Geophys. 64, 278—283 (1955).

Eine für Vorlesungen geeignete Ableitung der Gezeitenkräfte wird angedeutet. Sie läßt die physikalischen Grundbeziehungen hervortreten, vermeidet unnötige Spezialisierungen und gestattet eine einfache Abschätzung der zulässigen Vernachlässigungen.

Zusammenfassung des Autors.

Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben.

- Abrikosov, A. A.** (Mehrphotonen-Annihilation von Positronen) 217; (Compton-Effekt) 217.
- Ackerson, R. H.** (Vector spaces) 7.
- Adachi, R.** (Newton's method for simultaneous equations) 354; (Numerical solutions of differential equations) 357.
- Adams, E. N.** (Plasma oscillations in metals) 240.
- Agarwala, S. P. s. C.** Chandra Sekar 372.
- Agnew, R. P.** (Permutations preserving convergence of series) 286.
- Agostinelli, C.** (Oscillazioni magneto idrodinamiche in una massa fluida cosmica) 444; (Oscillazioni magneto idrodinamiche in una massa fluida rotante) 444.
- Agusti, G.** (Raggi associati di convergenza) 48.
- Ahlfors, L. V.** (Conformality) 307.
- Aigner, A.** (Kubische Fermatgleichung) 21.
- Aitken, A. C.** (Practical mathematics. VIII.) 354.
- Ajdukiewicz, K.** (Plan of research in the field of logic) 248.
- Ajzenštat, N. D. s. M. A.** Krejnes 360.
- Alaga, G., K. Alder, A. Bohr and B. R. Mottelson** (Intensity rules for beta and gamma transitions) 227.
- Albrecht, R. und H. Hochmuth** (Übungsaufgaben. II. III.) 25.
- Albuquerque, José Ribeiro s. Ribeiro Albuquerque, José** 28.
- Alder, K. s. G. Alaga** 227.
- Aleksandrov (Aleksandrow), A. D.** (Was ist Geometrie?) 381.
- Alenicyn, Ju. E.** (Methode von Nehari) 54.
- Aliotta, A.** (Teoria di A. Einstein) 1.
- Aljančić, S., R. Bojanić et M. Tomić** (Comportement asymptotique des séries trigonométriques) 43.
- Alcock, G. R. and C. G. Kuper** („Rotons“ in quantum hydrodynamics) 235.
- Alonso, M.** (Fundamentalgleichung für Neutronendifusion) 228.
- Altman, M.** (Fixed point theorem) 408.
- Amenzade, A. Ju.** (Regularität des Gleichungssystems bei Verbiegung eines Balkens) 174.
- Andersen, Erik Sparre s. Sparre Andersen, Erik** 106.
- Andreev, K. S.** (Ausgewählte Arbeiten) 246.
- Andreian Cazacu, C.** (Surfaces riemanniennes normalement exhaustibles) 304; (Théorème d'Iversen pour surfaces riemanniennes) 304; (Surfaces de Riemann normalement exhaustibles) 305.
- Andreoli, G.** (Automorfismi in un'algebra di Boole. I. II.) 13; (Itinerari matematici. I.) 21.
- Andres, P. G., H. J. Miser and H. Reingold** (Mathematics for science and engineering) 25.
- Andrews, F. C. and H. Chernoff** (Large-sample bio-assay design) 121.
- Ankeny, N. C. and T. J. Rivlin** (Theorem of S. Bernstein) 10.
- Antonowicz, K.** (Integrating apparatus for Schrödinger equation. II.) 360.
- Antosiewicz, H. A. s. K. S. Cole** 99.
- Appell, P.** (Mécanique rationnelle. Tome 5^e) 132.
- Aquaro, G.** (Teorema di prolungamento di Urysohn-Tietze) 150; (Funzioni reali negli spazii uniformi) 344.
- Arai, Tadashi s. Eiichi Ishiguro** 232.
- Arcidiacono, G.** (Gruppi ortogonali) 134.
- Arfwedson, G.** (Collective risk theory) 122.
- Argiriade, E.** (Contact de deux courbes gauches) 140.
- Armellini, G.** (Teoria della relatività nell'astronomia moderna) 207.
- Armstrong, W. D. s. W. R. Hawthorne** 422.
- Arnold, F. R.** (Steady-state behavior of systems) 170.
- Arnowitz, R. and S. Deser** (Photon production) 449.
- Aronszajn, N.** (Eigenvalues of operators) 91; (Coercive integro-differential quadratic forms) 327.
- Artémiadis, N. K.** (Fonctions appartenant à la classe L_1 ($-\infty, \infty$)) 339.
- Aruffo, G.** (Compattezza di funzioni) 35.
- Ashley, Holt s. R. L. Bisplinghoff** 425.
- Ašnevič, I. Ja. und G. V. Ulina** (Wertebereich analytischer Funktionen) 53.
- Asribekov, V. E.** (Renormierung von Ladung und Masse des Nukleons) 450.
- Atkinson, C.** (Polynomial root solving on electronic differential analyser) 361.
- Auslander, L.** (Forms in variational calculations) 332.
- **M.** (Dimensions of modules and algebras. III.) 271.
- Avakumović, V. G.** (Fatou-Riesz's theorem) 338.
- Avetisjan, A.** (Satz von G. Pólya) 50.
- Aymerich, G.** (Pseudo ortogonalità dei modi) 443; (Guide d'onda anisotrope) 443.
- Ayoub, R. G.** (Selberg's lemma) 23.
- Babuška, I.** (Eigenschaft harmonischer Funktionen) 82.
- Bachelier, J. et H. Gardy** (Calcul symbolique graphique) 191.
- Bachtin, I. A. und M. A. Krasnosel'skij** (Längsausbiegung eines Stabes) 172.

- Backes, F. (Notion d'asymptotique d'une surface) 137.
- Bacon, G. E. (Neutron diffraction) 237.
- Badaljan, G. V. (Legendresche Polynome) 296.
- Baehr, H. D. (Wärmeleitungsprobleme) 435.
- Baer, R. (Auflösbare Gruppen) 258; (Burnsidische Eigenschaften) 259.
- Bagemihl, F. and W. Seidel (Boundary behavior of analytic functions) 299.
- Baiada, E. e C. Vinti (Stabilire un passaggio al limite) 33.
- Bailey, N. T. J. (Equalizing the mean waiting times) 110; (Statistical analysis of epidemic data) 378.
- Bajraktarević, M. (Itérées continues) 354.
- Bajšanski, B. (Zéros de la dérivée d'une fonction rationnelle) 9.
- Balachandran, V. K. (Mapping theorem for metric spaces) 151.
- Baland, J. s. P. Glansdorff 420, 421.
- Balanat, Manuel s. Julio Rey Pastor 127.
- Ballabh, R. (Superposable flows) 421.
- Ballieu, R. et F. Simonart (Algèbre) 5.
- Ballou, Donald H. s. Frederick H. Steen 383.
- Banach, S. (Opérations linéaires) 89.
- Band, W. (Quantum statistics) 432.
- Banerjee, S. P. s. K. C. Kar 226.
- Banerji, S. K. (Method of analogue) 99.
- Banos jr., A. (Magneto-hydrodynamic waves) 202.
- Barašenkov, V. S. (Extended particles) 214.
- Barber, S. W. s. M. Dank 47.
- Barlotti, A. s. Luigi Campedelli 387.
- Barner, M. (Kurventripel auf Regelflächen) 141; (Projektivabwicklung von Raumkurven) 141.
- Barsotti, L. (Reihenentwicklung der Funktion \arcsin) 292; (Baryzentrische Koordinaten) 383.
- Barton, D. E. (Neyman's χ^2 test of goodness of fit) 370.
- — — and F. N. David (Sums of ordered intervals) 362.
- Bašeļšvili, M. O. (Erste Randwertaufgabe der Statik für orthotropen Körper) 171.
- Basseches, B. (Bio-Bibliographie für Joaquim Gomes de Sousa) 247.
- Basu, D. (Stochastic model by V. M. Dandekar) 105.
- Bateman, H. (Electrical and optical wave-motion) 193.
- Bates, G. E. (Successive accidents in Polya scheme) 375.
- Bauer, E. (Champs de vecteurs) 167.
- F. L. (Numerische Verfahren für programmgesteuerte Rechenanlagen. I.) 94; (Newton-Prozeß) 355.
- Baum, W. (Topological problem) 305.
- Baur, A. (Analytische Geometrie. I—III.) 382.
- Bay, Z., V. P. Henri and H. Kanner (Delayed-coincidence experiments) 456.
- Baž, A. und Ja. Smorodinskij (Isotopischer Spin leichter Kerne) 451.
- Beauregard, O. Costa de s. Costa de Beauregard, O. 213.
- Becker, R. (Theorie der Wärme) 186.
- Beckerley, J. G. (ed. by) (Nuclear Sciences. 5.) 222.
- Beckert, H. (Zu „Verbiegung von Flächenstücken“) 139; (Lineare elliptische Systeme) 324.
- Behnke, H., W. Lietzmann und W. Süss (Hrsg. von) (Mathematisch-physikalische Semesterberichte. 4. Heft 3/4) 241.
- Belatini, P. de (Multipotentials of multipoles) 437.
- Belgodère, P. (Choix d'ouvrages mathématiques) 243.
- Bell, R. P. s. J. M. Brønsted 433.
- S. W. and H. Matley (Mathematics for national certificate. I.) 243.
- Bellamy, E. H. and R. G. Moorhouse (ed. by) (Conference on Nuclear and Meson Physics) 449.
- Bellman, R. (Equipment replacement policy) 122; (Dynamic programming. I.) 381.
- Belluzzi, O. (Fenomeni d'instabilità elastica) 416.
- Belov, N. V. s. N. I. Golovastikov 238.
- — — und N. I. Golovastikov (Beziehungen zwischen Vorzeichen der Strukturamplituden) 238.
- Benedicty, M. (Équivalence linéaire sur une courbe algébrique) 128; (Genres d'une courbe algébrique) 129; (Matrici quasi abeliane) 392.
- Benfratello, G. (Efflusso con carico variabile) 178.
- Bennett, B. M. (Joint distribution of mean and standard deviation) 367; (Logarithmic non-central χ^2 and z distributions) 369.
- Berg, Jw. van den ($\Phi(\alpha x) - \beta \Phi(x) - F(x)$. I. II.) 93.
- L. (Differenzgleichung aus der Theorie der Partitionen) 274.
- Bergman, S. (Tables of fundamental solutions of equations in theory of compressible fluids) 422.
- Berkeš, B. (Unendliche Reihen Besselscher Funktionen) 48.
- Bernardini, C. (Equilibrio di un filo) 193.
- Bers, L. and L. Nirenberg (Representation theorem for linear elliptic systems) 325; (Elliptic boundary value problems) 325.
- Besicovitch, A. S. (Polygon inscribed in a simple closed curve) 281.
- Beth, E. W. (Natural deduction) 251.
- Bethe, Hans A. s. Silvan S. Schweber 211.
- Betz, A. (Übergang laminarer Grenzschichten in Außenströmung) 181.
- Beyer, G. (Erweiterungsproblem galoisscher Körper) 15.
- Bhatnagar, K. P. (Self-reciprocal functions) 339.
- Bhattacharyya, B. C. (Control by gauging) 372.
- Bielecki, A. (Satz von Gauß und Ostrogradskij) 38.
- Bilimović, A. (Centre de déviation) 170.
- Bilinski, S. (Formeln von Frenet) 136.
- Binder, A. (Choice of an error term) 118.
- Biot, M. A. (Porous anisotropic solid) 236.
- Bisplinghoff, R. L., H. Ashley and R. L. Halfman (Aeroelasticity) 425.
- Blakey, G. W. s. T. G. C. Ward 360.
- Bland, D. R. and E. H. Lee (Complex modulus of linear viscoelastic materials) 418.

- Blanuša, D. (Einbettung hyperbolischer Räume) 144.
- Blaschke, W. (Geometria dei tessuti) 144; (Tessuti di superficie) 144.
- Blatt, J. M. (Tracks in nuclear research emulsions) 457.
- Bliss, G. A. (Function concept) 31.
- Blondel, J.-M. (Équations aux dérivées partielles linéaires) 319.
- Boboc, N. (Théorème de type Sturm) 81.
- Bobrov, A. A. (Verteilungsfunktionen von regulärem Wachstum) 106.
- Böck, H. S. (Natürliches Zugrundegehen) 379.
- Bodewig, E. (Matrizenkalkül) 253; (Ganzzahlige Adjungierte) 253.
- Bogoljubov, N. N. und O. S. Parasjuk (Multiplikation singulärer Kausalfunktionen) 215.
- — — und D. V. (W.) Širkov (Schirkow) (Quantentheorie der Felder. I.) 210; (Modell vom Leeschens Typus) 219.
- Boguslavsky, G. W. (Mathematical model for conditioning) 379.
- Bohm, D. and W. Schützer (Statistical problem in physics) 432.
- Bohnenblust, H. F. and S. Karlin (Unit sphere of Banach algebras) 350.
- Bohr, A. s. G. Alaga 227.
- Bojanić, R. s. S. Aljančić 43.
- Boltjanskij, V. G. (Homotopietheorie stetiger Abbildungen) 411.
- Bompiani, E. (Varietà rappresentativa) 385.
- Bonfiglioli, L. (Line of intersection of curved surfaces) 164.
- Boone, W. W. (Problems of group theory. III—VI.) 257.
- Bordoni, P. G. (Invarianti di deformazione) 416.
- Borel, A. (Théorème de P. A. Smith) 407.
- Borgnis, F. E. und Ch. H. Papas (Randwertprobleme der Mikrowellenphysik) 198.
- Borisov, Ju. F. (Geometrie der Halbumgebung einer Kurve) 402.
- Borisovič, Ju. G. (Kritische Werte gerader Funktionale) 84.
- Borkmann, K. und S. Oberländer (Allgemeines Randwertproblem für gedämpfte Wellen) 97.
- Börsch-Supan, W. (Eigenfunktionen einer zusammengesetzten Eigenwertaufgabe) 337.
- Bose, B. N. (Integrals involving Legendre polynomials) 295.
- Bouligand, G. (Problèmes fonctionnels non linéaires) 81; (Analyse linéaire réelle) 137; (Courbes planes et surfaces) 137; (Courbes et surfaces s'offrant à l'analyse linéaire) 137; (Surfaces minima et apparentées) 137.
- Bourbaki, N. (Espaces vectoriels topologiques. Fascicule de résultats) 83.
- Bradley, R. A. (Incomplete block designs. III.) 120.
- Brand, L. (Advanced calculus) 25.
- Brauer, R. and K. A. Fowler (Groups of even order) 10.
- Brazma, N. A. (Variations- und Kompensationssätze für n Parameter einer elektrischen Kette) 438.
- Brelot, M. (Principe de Dirichlet) 330.
- Bremermann, H. J. (Kernel function) 307.
- Breny, H. (Problème de Behrens-Fisher) 367.
- Breus, K. A. (Asymptotische Lösung linearer Differentialgleichungen) 315.
- Brillouin, L. (Electrons and waves) 239.
- Brodskij, A., D. Ivanenko und N. Korst (Massendifferenz der Elementarteilchen) 451.
- — — M. (Renormierung in Mesodynamik) 220.
- Brogden, H. E. (Least squares estimates) 375.
- Bronsted, J. N. (Energetics) 433.
- Brueckner, K. A., R. J. Eden und N. C. Francis (High-energy reactions) 224.
- Brujin, N. G. de (Integer-valued functions) 273.
- Bruins, E. M. (Babylonian geometry) 243.
- Brun, E. A. (Couche limite) 427.
- V. (Leibniz' formula for π) 292.
- Bruzzese, E. (Equilibrio della trave Nielsen) 171; (Calcolo a rottura) 172.
- Buchdahl, H. A. (Carathéodory's theorem) 432.
- Budden, K. G. (Reflexion of radio waves from the isonosphere. I. II.) 442.
- Bulatović, Z. (Équation de la droite) 383.
- Burgerhout, Th. J. (Relations between elements of a square matrix) 253.
- Burros, R. H. (Discriminal dispersion) 375.
- Busk, Th. (Some general types of polynomials) 45.
- Caccioppoli, R. (Integrazione rispetto ad una funzione continua qualunque) 33.
- Cadambe, V., R. K. Kaul and S. G. Tewari (Flexure of thin elastic plates) 173.
- Cafiero, F. (Misura in un insieme astratto) 278.
- Čajkovskij, Ja. und T. Tite (Nullstellen einer hypergeometrischen Reihe) 48.
- Calame, A. (Bases du groupe symétrique) 260.
- — — et S. Picard (Relations des bases du groupe symétrique) 260.
- Caldirola, P. (Relatività ristretta) 203.
- Campedelli, L. (Esercitazioni di geometria) 387.
- Canetta, P. (Curva piana algebrica) 389.
- Cantoni, L. (Trasformazioni birazionali) 392.
- Čao, T. I. (Ganze algebraische Funktionen) 301.
- Cap, F. (Strömungsvorgänge, die mit Verbrennung gekoppelt sind) 420; (Wirkungsquerschnitt der elastischen Nukleon-Nukleon-Streuung. I.) 451.
- Capetti, A. (Impulso specifico dell'esoreattore) 169.
- Carlitz, L. (Partition formulas) 22; (Bauer's congruence) 22; (Special symmetric equation) 22.
- Carrier, G. F. (Rijke tube) 420; (Integral equation boundary layer problems) 428.
- Cartan, H., J. Cerf, J. Dixmier, J. Frenkel, P. Samuel et J. P. Serre (Topologie algébrique) 154.
- — —, S. Eilenberg et J. P. Serre (Cohomologie des groupes) 154.
- — —, J. C. Moore, R. Thom et J. P. Serre (Algèbres d'Eilenberg-MacLane) 156.

- Caschi, C. (Temperatura in un anello rotante) 192.
- Castoldi, L. (Moti stazionari di fluidi incomprimibili) 177.
- Castro, A. de (Rekursionsformel für Legendresche Polynome) 46.
- G. de (Induktives Verhalten und mathematische Statistik) 367; (Bibliographie über Theorie der Entscheidung) 367.
- Cattabianchi, Luigi Tanzi s. Tanzi Cattabianchi, Luigi 289.
- Cavallaro, V. G. (Formula d'Erone) 125; (Geometria del triangolo) 126.
- Čavčanidze, V. V. (Mesonfeld einer Fermionquelle) 221; (Gleichungssystem von Boson-Fermion-Feldern) 221.
- (Chavchanidze), V. V. and O. D. Čejšvili (Cheitvili) (Energy distribution function of neutrons) 226.
- Cazacu, Cabiria Andreian s. Andreian Cazacu, Cabiria 304, 305.
- Cecconi, J. (Minimo degli integrali del calcolo delle variazioni) 332.
- Čech, E. (Deformazioni di congruenze di rette) 142.
- Čejšvili, O. D. s. V. V. Čavčanidze 226.
- Centro Internazionale Matematico Estivo (Teoria dei numeri) 272; (Quadratura delle superficie) 281; (Teorema di Riemann-Roch) 388; (Topologia) 403.
- Cerf, J. s. H. Cartan 154.
- Černikov, S. N. (Sylowsche π -Untergruppen) 258.
- César de Freitas, A. (Distributions qui interviennent dans le calcul des électrotechniciens) 312.
- Cesari, L. (Superficie continue) 281.
- Četković, S. (Accroissement finis) 34.
- Chadan, K. (Photodésintégration du deutéron) 223.
- Chakraborty, P. N. s. C. Chandra Sekar 372.
- Chakravorty, J. G. (Stress distribution in an infinite elastic solid) 415.
- Chalnatnikov (Khalatnikov), I. M. (Green's function) 448.
- — — s. L. P. Gofkov 448.
- Chandra Sekar, C., S. P. Agarwala and P. N. Chakraborty (Power function of a test of significance) 372.
- Chaoman, D. G. (Population estimation) 374.
- Chatterjee, B. B. (Stresses in a rotating blade) 415.
- Phatik Chand (Hermite's polynomial. I.) 46.
- Checucci, V. (Riduzione delle equazioni di una omografia) 128.
- Chen, Y. W. (Degenerate solutions of partial differential equations) 320.
- Chern, Sh.-Sh. (Special W -surfaces) 138.
- Chernick, J. and I. Kaplan (Nuclear reactor with a transverse air gap) 456.
- Chernoff, Herman s. Fred C. Andrews 121.
- Choudhury, P. (Stress distribution) 414.
- Cicala, P. (Evoluzioni ottime di un aereo) 178.
- — e A. Miele (Evoluzioni brachistocrone di un aereo) 178.
- Ciliberto, C. (Problema di Darboux) 74.
- Cimmino, G. (Spazi hilbertiani di funzioni armoniche) 330.
- Cîmpăn, F. T. (Livres d'algèbre imprimés en roumain) 247.
- Cinquini, S. (Sistemi di equazioni a derivate parziali) 71.
- Civin, P. (Riemann sums) 32; (Ergodic theorems) 86.
- Clauser, E. (Autoparallele di spazi non riemanniani) 168; (Geomettrizzazione della dinamica dei sistemi anolonomi) 168.
- Clippinger, R. F., B. Dimsdale and J. H. Levin (Automatic digital computers. VI.) 99.
- Clunie, J. (Series of positive terms) 291.
- Cochran, W. and A. S. Douglas (Digital computer for determination of crystal structures. I.) 239.
- Codegone, C. (Rapida valutazione della conduttività termica) 192.
- Cohen, E. (Ramanujan's sum. II.) 22; (Cubic congruences) 22.
- jr., A. C. (Censored samples) 115.
- Cohn, H. (Modular functions) 309.
- R. M. (Specializations over difference fields) 16; (Extensions of difference fields) 17; (Components of a difference polynomial) 17.
- Cole, J. D. s. J. H. Huth 419.
- K. S., H. A. Antosiewicz and P. Rabinowitz (Automatic computation of nerve excitation) 99.
- Coles, D. (Wall in turbulent shear flow) 431.
- Colombo, G. (Oscillazioni persistenti di un sistema) 318.
- Conference on partial differential equations. Kansas, 1954. 70.
- Conolly, B. W. (Unbiased premiums for stop-loss reinsurance) 122.
- Constantinescu, C. (Principe de la métrique hyperbolique) 299.
- Conti, R. (t -similitudine tra matrici) 314; (Stabilità dei sistemi di equazioni differenziali lineari) 314.
- Corduneanu, C. (Solutions presque-périodiques des équations différentielles non linéaires) 65; (Problèmes aux limites sur un demi-axe pour équations différentielles non-linéaires) 65; (Théorèmes d'existence sur l'axe réel des équations différentielles non-linéaires) 65; (Solutions asymptotiquement presque-périodiques des équations différentielles) 66.
- Cornish, E. A. (Sampling distributions derived from multivariate t -distribution) 369.
- Corominas Vigneaux, E. (Grenzwerte von Differenzenquotienten) 284.
- Cossu, A. (Connessioni tensoriali integrabili) 398.
- Costa de Beauregard, O. (Covariance relativiste à la base) 213.
- Couffignal, L. (Denkmaschinen) 98.
- Courant, R. (Hyperbolic systems) 323.
- Cox, D. R. (Analysis of non-Markovian stochastic processes) 109; (Statistical methods connected with series of events) 374.
- R. T. (Statistical mechanics of irreversible change) 189.
- Craemer, H. (Fallacies and paradoxa) 416.

- Craig, H. V. (Linear extensor equations. II.) 333.
- Cristescu, N. (Problème de M. Lévy) 177.
- Crosby jr., H. Lamar s. Thomas of Bradwardine 246.
- Crum, M. M. (Functions of exponential type) 298.
- Császár, Á. (Espaces de probabilité conditionnelle) 104.
- Cuesta, N. (Arithmetisierung des Transfiniten) 30.
- Curle, N. (Aerodynamic sound) 431.
- Curtis, M. L. (Covering homotopy theorem) 160.
- Cvetkov, B. (New computation in theory of least squares) 376.
- Cytovič (Tsytovich), V. N. (Two body problem) 209; (Spectrum of positronium) 230.
- s. D. Ivanenko 444.
- Daboni, L. (Teorema di Riemann-Dini) 279; (Capacità elettrostatica di un condensatore) 437.
- Dąbrowski, J. and J. Sawicki (Simple model of ${}^6\text{Li}$ nucleus) 452.
- Dalitz, R. H. (Radiative π -meson decay) 451.
- Dalla Volta, V. (Varietà totalmente geodetiche) 395.
- Dandekar, V. M. (Modified forms of binomial distributions) 105.
- Daniljuk, I. I. (Elliptische Systeme von Differentialgleichungen) 70.
- Dank, M. and S. W. Barber (Heat function) 47.
- Darbo, G. (Trasformazioni plurivalenti) 406.
- David, F. N. s. D. E. Barton 362.
- Debi, Sobha (Total inclusion for Nörlund summability) 287.
- Debrunner, H. (Körper konstanter Breite) 402.
- Dedecker, P. (Applications de la suite spectrale aux intégrales du calcul des variations) 332.
- Dehara, Shigemi s. Tetsuo Kudō 115.
- Deheuvelds, R. (Topologie d'une fonctionnelle) 333.
- Delange, H. (Théorème de Karamata) 285.
- Denjoy, A. (Ensembles parfaits) 35.
- Denman, Harry H. s. Arthur L. Loeb 99.
- Denniston, R. H. F. (Joined point-pairs of an algebraic variety) 393.
- Derwidué, L. (Singularités) 130.
- Deser, S. s. R. Arnowitz 449.
- Deskins, W. E. (Homomorphisms of an algebra) 265.
- Devidé, V. (Axiomensystem für natürliche Zahlen) 248.
- Devinatz, A. (Representation of functions as Laplace-Stieltjes integrals) 338.
- Diaz, J. B. (Quadratic functionals) 97; (Linear partial differential equations) 318.
- and R. Landshoff (Initial value problems for wave equation) 74.
- and G. S. S. Ludford (Cauchy problem for Euler-Poisson-Darboux equation) 74; (Reflection principles for partial differential equations) 326.
- Dickson, L. E. (Constructions with ruler and compasses) 127.
- Dieudonné, J. (Pseudo-discriminant and Dickson invariant) 7; (Générateurs des groupes classiques) 12; (Bounded sets in (F) -spaces) 83; (Géométrie des groupes classiques) 261.
- Dijkstra, E. W. and A. van Wijngaarden (Table of Everett's interpolation coefficients) 362.
- Dikij, L. A. (Spektralfunktion des Sturm-Liouvilleschen Operators) 63.
- Dilgan, H. (Problème des deux corps) 169; (Hassan Ben Haithem) 245.
- Dimić, P. (Bibliographie des livres mathématiques) 243.
- Dimsdale, B. s. R. F. Clippinger 99.
- Divinsky, N. (Commuting automorphisms of rings) 14.
- Dixmier, J. s. H. Cartan 154.
- Dizioglu, B. (Raschlaufende Gleitlager) 419.
- Dobrušin, R. L. (Grenzwert einer Zufallsfunktion) 107.
- Doetsch, G. (Lineare Differentialgleichungen unter unzulässigen Anfangsbedingungen) 311.
- Dorleijn, M. (Convergent sequences in non-archimedean sequence spaces) 343.
- Douglas, A. S. s. W. Cochran 239.
- jr., J. (Numerical integration) 358.
- Douglas, A. (Elliptic systems of linear equations) 325.
- Downton, F. (Waiting time in bulk service queues) 110.
- Dragoni, Giuseppe Scorza s. Scorza Dragoni, Giuseppe 152, 405, 406.
- Drazin, M. P. (Engel rings) 264; (Corrections to „Engel rings“) 264.
- Drozdo, S. I. (Scattering of fast neutrons. I. II.) 454.
- Duff, G. F. D. (Quasi-linear boundary value problem) 79.
- Dugué, D. (Théorèmes limites) 106.
- Dugundji, John s. Samuel Pines 180.
- Dunford, N. (Spectral theory) 92.
- Dungey, J. W. (Deductions from cosmological principle) 208.
- Dunnington, G. W. (C. F. Gauß) 246.
- Duparc, H. J. A. (Almost primes) 273.
- , C. G. Lekkerkerker and W. Peremans (Satz von Wolstenholme und Leudesdorf) 23.
- Dwinger, Ph. (Permutations of an Abelian group) 260; (Closure operators of product of lattices) 264; (Closure operators of cardinal and ordinal sums and products) 264; (Automorphisms of the lattice of closure operators of a lattice) 264.
- Đžrbašjan, M. M. (Ganze Funktionen) 308.
- Eberlein, W. F. (Spectral theory) 86.
- Eckart, G. (Dielektrische Turbulenz in Troposphäre) 443.
- Eden, R. J. s. K. A. Brueckner 224.
- Edwards, S. F. (Nucleon Green function. I. II.) 450.
- Eeden, C. van (Equality of probabilities) 116; (Sequential test) 371.
- and J. Hemelrijk (Test for equality of probabilities. I. II.) 371.
- Efimov, N. V. (Flächen negativer Krümmung) 138.
- Egger, H. (Prinzip der virtuellen Verschiebungen) 169.

- Eggleston, H. G. (Plane homeomorphisms) 406.
- Ehlers, F. E. (Ring in supersonic flow) 183.
- Eilenberg, S. s. H. Cartan 154.
- Einstein, A. (Elettrodinamica dei corpi in moto) 203; (Teoria della gravitazione) 204; (Meaning of relativity) 204; (Inerzia di un corpo) 205; (Fondamenti della teoria della relatività) 205; (Principio di Hamilton) 205; (Considerazioni cosmologiche) 205.
- Elia, Pasquale d' (Carico critico della trave a cassone) 172.
- Elliott, J. P. (Milne's problem) 228.
- Ellis, D. (Reflexive relations) 28.
- El'sgol'c, L. E. (Qualitative Methoden der Analysis) 333.
- Emmons, H. W. (Non-steady heating of a plate) 429.
- Engel, A. von (Ionized gases) 233.
- Englefield, M. J. (Fractional parentage coefficients) 208.
- Enomoto, Sh. (Totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions. II.) 33.
- Epstein, M. P. (Linear ordinary differential equations) 17.
- Erdélyi, M. (Direct summands of abelian torsion groups) 260.
- Erdős, P. (Anzahl der Lösungen von $[p-1, q-1] \leq x$) 23; (Distribution of prime numbers) 275.
- and H. N. Shapiro (Distribution function for an error term) 276.
- Eringen, A. C. (Nonlinear oscillations of viscoelastic plates) 419.
- Est, W. T. van (Algebraic cohomology concepts in Lie groups. I. II.) 262; (Méthode de Cartan-Leray) 262.
- Estève, M. (Titres des périodiques) 243; (Périodiques figurant à la bibliothèque) 243.
- s. Paul Belgodère 243.
- Eubanks, R. A. s. E. Sternberg 416.
- Evgrafov, M. A. (Spektraltheorie von Operatoren) 338.
- Eweida, M. T. (Derivatives of Legendre polynomials) 46.
- Eyring, H. s. R. B. Parlin 190.
- Fadell, Edward s. Witold Hurwicz 160.
- Fadini, A. (Superficie iperellittiche dell' S_3) 394.
- Fadnis, B. S. (Axisymmetric flow in perfect fluid. I. II.) 420.
- Fagen, R. E. and J. Riordan (Queueing systems) 366.
- Fajn (Fain), V. M. (Velocity distribution of electrons) 234.
- Fan, Ky (Eigenvalues of normal matrices) 7; (Inequalities concerning Hermitian matrices) 255.
- Faulkner, F. (Degenerate problem of Bolza) 332.
- Federer, H. (Addition theorem for Lebesgue area) 283.
- Fedorov, F. I. (Polarisation elektromagnetischer Wellen) 199; (Totalreflexion) 199.
- Feenberg, E. (Beta transitions in $N-Z=3$ series) 227.
- Feldman, G. (Field theory. V.) 447.
- Feldman, M. R. (Biegsame Platten) 173.
- Feml, St. (Relation de Legendre) 45.
- Fer, F. (Solutions singulières des équations d'onde) 74; (De la mécanique ondulatoire) 448.
- Féret, J. Kampé de s. Kampé de Féret, J. 182.
- Fermi, E. (Pions and nucleons) 450.
- Fernández, Manuel Labra y s. Labra y Fernández, Manuel 126.
- Ferrari d'Occhieppo, K. (Ekliptikale, galaktische und azimutale Koordinaten) 457.
- Ferri, A., N. J. Hoff and P. A. Libby (ed. by) (Conference on highspeed aeronautics) 421.
- Feuer, P. (Electronic states in a perturbed lattice) 239.
- Few, L. (Shortest path through n points) 126.
- Fialkow, A. and I. Gerst (Impedance synthesis) 195.
- Fichera, G. (Forme differenziali armoniche) 328.
- Fierz, M. (Ergodensatz) 189.
- Fil'čakov, P. F. (Sukzessive konforme Abbildungen. I.) 58; (Umströmung mit Strahlablösung) 99.
- Finetti, B. de (Distribuzioni in un insieme astratto) 278.
- Finkelstein, D. (Relations between commutators) 89.
- R. J. (Beta invariants) 209.
- Finzi, B. (Relatività generale e teorie unitarie) 207.
- Fisz, M. and K. Urbanik (Composed Poisson process) 366.
- Flanders, H. (Norm function. II.) 19.
- Flett, T. M. (Maximal theorem of Hardy and Littlewood) 39.
- Floyd, E. E. (Orbit spaces of finite transformation groups. II.) 407; (Mappings of spheres) 407.
- Flügge-Lotz, I. (Laminar compressible boundary layer) 429.
- Foley, H. M. s. A. M. Sessler 231.
- Følner, E. (Groups with full Banach mean value) 12.
- Ford, K. W. and D. L. Hill (Distribution of charge in nucleus. I.) 224.
- — s. Carl Levinson 224.
- Forsythe, G. E. (Constrained minima) 359.
- Fort jr., M. K. (Category theorems) 343.
- Fowler, K. A. s. Richard Brauer 10.
- Fox, J. A. s. M. Lessen 430.
- Ph. A. (Perturbation theory of wave propagation) 184.
- Fradkin, E. S. (Asymptote of Green's function) 215.
- Fraeys de Veubeke, B. M. (Semidefinite eigenvalue problems) 95.
- Franciosi, V. (Calcolo a rottura) 172; (Cavi di precompressione nel calcolo a rottura) 172.
- Francis, A. J. (Design of frameworks) 171.
- N. C. s. K. A. Brueckner 224.
- Franckx, E. (Jeux stratégiques finis) 113.
- Frank, E. (Roots of equations) 93.
- Frankl', F. I. (Schwebende Teilchen) 436; (Flüssigkeiten mit suspendierten Teilchen) 436; (Bewegung suspendierter Teilchen in ungleichmäßiger Strömung) 436.
- Freese, E. (Many-point correlation-functions) 447.
- Freitas, A. César de s. César de Freitas, A. 312.
- Frejman, C. A. (Zerlegung der Zahlen in Summanden) 274.
- Frenkel, J. s. H. Cartan 154.
- Freud (Frejd), G. (L_1 -Approximationen) 290.

- Freudenthal, H. (Axiom und Axiomatik) 248.
- Friedrich, W., F. Knipping und M. von Laue (Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen) 236.
- Fréberg, C.-E. (Coulomb wave functions) 210.
- Froda, A. (Triangles rationnels) 21; (Suites „normales“ transfinies) 30.
- Fröhlich, H. (Secondary electron emission) 240.
- Fuchs, L. (Unendliche abelsche Gruppen) 260.
- Fuglede, B. (Theorem of F. Riesz) 279.
- Fujita, Shigeichi (Quasi-stationary process. III.) 232.
- Fujiwara, T. (Jordan-Hölder-Schreier theorem) 263.
- and K. Murata (Jordan-Hölder-Schreier theorem) 263.
- Fung, Y. C. (Aero-elasticity) 424.
- Gaier, D. (Modified Borel methods) 287.
- Galafassi, V. E. (Parte reale delle rigate astratte reali) 393.
- Galli, A. (Principi di reciprocità) 171.
- Gambill, R. A. (Parametric instability for linear differential systems) 315.
- Garabedian, P. R. (Integral equation governing electromagnetic waves) 80.
- Garbsch, K. (Grenzschicht eines Trichters) 429.
- Garcia, G. und A. Rosenblatt (Algebraische Analysis) 26.
- Gårding, L. (Dirichlet's problem and vibration problem for partial differential equations) 77.
- Gardner, J. W., H. Gellman und H. Messel (Fluctuation problem in cascade theory) 456.
- Gardy, H. s. J. Bachellier 191.
- Gauthier, L. (Footnote) 20.
- Gegelija, T. G. (Satz von G. Giraud) 341.
- Geis, Th. (Ähnliche Grenzschichten an Rotationskörpern) 430.
- Gejdel'man, R. M. (Verbiegung von Kreiskongruenzen) 143.
- Gelfand, I. M. und G. E. Šilov (Cauchysches Problem für lineare partielle Differentialgleichungen) 72.
- Gelman, H. s. J. W. Gardner 456.
- Georgiev, G. (Solution in rational numbers of diophantic equations) 272.
- Gerber, R. (Représentation conforme) 58.
- Geronimus, Ja. L. (Biorthogonalsysteme) 40.
- Gerretsen, J. C. H. (Geometria degli aggregati) 385.
- Gerst, Irving s. Aaron Fialkow 195.
- Gheorghiev, Gh. (Complexes de droites en géométrie euclidéenne) 140.
- Gheorghită, Șt. I. (Mouvements fluides rotatoires) 179; (Problème plan de percussion) 179; (Mouvements dans des milieux poreux) 184; (Mouvement irrotationnel d'un fluide idéal) 185; (Tourbillons dans un fluide visqueux) 185; (Mouvement plan d'un fluide idéal) 185; (Formule de Stokes) 185.
- Gheorghiu, O. Em. (Objects géométriques linéaires) 135.
- Gherardelli, F. (Varietà di Wirtinger) 130.
- Ghizzetti, A. (Equazioni alle derivate parziali del 2° ordine) 71.
- Ghosh, K. M. (Spectrum function of isotropic turbulence) 182.
- M. and K. D. Ray (Vibration of a bar. I.) 176; (II.) 419.
- N. N. (Determinants with binomial elements) 5.
- Ghurye, S. G. (Parameters of an autoregressive process) 375.
- Gibellato, S. (Strato limite) 182.
- Ginatempo, N. (Teorema di „Wilson-Leibnitz“) 21; (Problemi di analisi indeterminata) 272.
- Gini, C. (Questions fondamentales de statistique) 113.
- Ginsburg, S. (Decompositions of a set) 28; (Left division of order types) 29.
- Ginzburg, G. M. (Grenzverteilungen) 108.
- V. L. (Superconductivity) 235.
- Girault, M. (Fonctions caractéristiques) 342.
- Glansdorff, P., A. Jaumotte et J. Baland (Puissance utile des propulseurs) 420; (Propulsion des moteurs à réaction par jets) 421.
- Godambe, V. P. (Unified theory of sampling) 114.
- Goddard, L. S. (Matrix theorem of A. Brauer) 6.
- Godeaux, L. (Teorema di Picard) 129; (Points de diramation de surfaces multiples cycliques. I.) 130; (Quadriques de Lie) 142; (Homographie associée à une congruence W) 142.
- Goldberger, M. L. (Dispersion relations. I.) 448.
- , H. Miyazawa and R. Oehme (Pion-nucleon scattering) 448.
- Goldhaber, M. and J. Weneser (Electromagnetic transitions in nuclei) 453.
- Gol'dman, I. I. and A. B. Migdal (Theory of scattering) 454.
- Golomb, S. W. (Primes with intermediate density) 275.
- Golovastikov, N. I. und N. V. Belov (Gleichung von Zachariasen) 238.
- — — N. V. Belov 238.
- Gomory, R. E. and F. Haas (Trajectories) 68.
- Good, I. J. (Weighted combination of significance tests) 118.
- Goodman, C. (Nuclear structure) 452.
- Goodstein, R. L. (Non-constructive theorems of analysis) 248.
- Gordevskij, D. Z. s. K. S. Andrejev 246.
- Gořkov, L. P. und I. M. Chałatnikov (Störungstheorie) 448.
- Görtler, H. und W. Tollmien (hrsgegeb. von) (Grenzschichtforschung) 181.
- Gottlieb, I. (Sphère matérielle de densité variable) 204.
- Gottschalk, W. H. and G. A. Hedlund (Topological dynamics) 152.
- Gourlay, N. (F-test bias) 375.
- Gower, J. C. (Beveridge wheat price index) 122.
- Granowski, W. L. (Elektrischer Strom im Gas. I.) 232.
- Grasso, P. (Congruenze normali in un iperspazio euclideo) 139.
- Gravett, K. A. H. (Valued linear spaces) 266.
- Gréa, R. s. R. Higonnet 193.

- Greenspan, D. (Matrix inversion) 354.
- Groot, J. de (Compactness criterion of Freudenthal) 405; (Cohen's topological characterization) 405.
- — — and H. de Vries (Non-archimedean metrizations) 405.
- S. R. de s. Chr. D. Hartogh 225.
- Grossman, P. U. A. and R. S. T. Kingston (Mechanical conditioning of high polymers) 418.
- Grünbaum, A. (Time and entropy) 190.
- Grzegorzcyk, A. (Computable functionals) 3.
- s. Andrzej Mostowski 248.
- Guggenheim, E. A. (Boltzmann's distribution law) 188.
- Guggenheimer, H. (Trasformazioni puntuali) 409.
- Guglielmino, F. (Convergenza quasi uniforme) 35.
- Gumbel, E. J. (Calculated risk in flood control) 379.
- Gunn, J. C. (Radiation) 449.
- Gürsey, F. (A. Einstein) 247.
- Gyires, B. (Kroneckerscher Determinantensatz) 253.
- Haack, W. (Differentialgeometrie) 136.
- Haacke, W. (Rentabilität einer Zinsanleihe) 380.
- Haag, R. (Quantum field theories) 211.
- Haantjes, J. and R. Nottrot (Distance geometry) 400.
- Haar, D. Ter (Statistical mechanics) 189.
- Haas, F. s. R. E. Gomory 68.
- Hafner, E. M. s. H. P. Noyes 215.
- Hagstroem, K.-G. (Insurance on a risk premium basis) 122.
- Hahn, W. (Stabilitätskriterien) 9.
- Hájek, J. and A. Rényi (Inequality of Kolmogorov) 107.
- Häkkinen, R. J. s. L. Trilling 181.
- Halanay, A. (Équation non-linéaire contenant un petit paramètre) 316.
- Halfman, R. L. s. R. L. Bispinghoff 425.
- Hall, D. W. and G. L. Spencer II (Topology) 404.
- Hällström, G. af (Capacity of cantor sets) 82.
- Halphen, É. (Notion de vraisemblance) 103; (Fonctions factorielles) 296.
- Haman, K. et K. Kuratowski (Fonctions définies sur des continus univoherents) 407.
- Hamburger, H. (Non-symmetric operators) 90; (Self-adjoint differential operators) 90.
- Hammersley, J. M. and J. A. Nelder (Sampling from anisotropic Gaussian process) 374.
- Han, K. T. and L. Kuipers (Lucas theorem) 256.
- Hano, Jun-ichi (Affine transformations of a Riemannian manifold) 146.
- Harris, Ch. W. (Separation of data) 119.
- Hartman, Ph. and A. Wintner (Comparison theorem for partial differential equations) 79; (Partial differential equations) 326; (Uniform Dini conditions) 326.
- S. (Almost periodic functions) 310; (Expansions de Fourier) 350.
- Hartogh, Chr. D., S. R. de Groot and H. A. Tolhoek (Angular effects in nuclear reactions) 225.
- Hasegawa, K. and K. Yomogita (Multiple scattering phase shifts. II.) 222.
- Hasselmeier, H. (Inversoren nach Hart) 360.
- Hassitt, A. (One-group diffusion equations) 455.
- Hawthorne, W. R. (Rotational flow through cascades. I.) 421.
- — — and W. D. Armstrong (Rotational flow through cascades. II.) 422.
- Hayashi, Y. (Dimension functions) 151.
- Hayman, W. K. (Entire and subharmonic functions) 54; (Uniformly normal families) 56; (p -valent functions) 301.
- Heading, J. (Reflexion of radio waves from the ionosphere) 197.
- Healy, M. J. R. (Significance test) 118.
- Hecht, F. (Herausgeber) (V. internationaler astronautischer Kongreß) 421.
- Hedlund, G. A. (Transformations of the plane) 153.
- — — s. W. H. Gottschalk 152.
- Heine, V. (Models for stochastic processes) 365.
- Heins, M. (Mapping theorem for simply-connected Riemann surfaces) 303; (Lindelöfian maps) 303.
- Heinz, E. (Cauchysches Anfangswertproblem einer elliptischen Differentialgleichung) 75.
- Helson, H. (Fourier transforms on perfect sets) 338.
- Hemelrijk, J. s. Constance van Eeden 371.
- Henri, V. P. s. Z. Bay 456.
- Hercigonja, M. (Pseudonymes de R. J. Bošković) 247.
- Hermes, H. (Entscheidungsprobleme) 249.
- Herrmann, G. (Forced motions of Timoshenko beams) 419.
- Hersch, J. (Théorème de Phragmén-Lindelöf) 305; (Problème de variation) 306; (Longueurs extrémales et théorie des fonctions) 306; (Longueurs extrémales et géométrie globale) 307.
- et A. Pfluger (Augmentation des longueurs extrémales) 306.
- Herstein, I. N. (Theorem concerning three fields) 16.
- Herzenberg, A. (α -particle model of nuclei. I. II.) 452.
- Hide, R. (Waves in an electrically conducting fluid) 202.
- Higman, G. (Finite groups) 11.
- Higonnet, R. et R. Gréa (Circuits électriques) 193.
- Hill, David L. s. Kenneth W. Ford 224.
- R. (Plane elastic states) 414.
- Hilton, P. J. (Factorization of spaces) 157.
- Hintikka, K. J. J. (Form and content in quantification theory) 1; (Reductions in theory of types) 2; (Quantification theory) 250.
- Hirasawa, Y. (Perturbation problems of non-linear differential equations. III.) 311.
- Hirschman, I. I. (Decomposition of Walsh and Fourier series) 41.
- jr., I. I. (Weighted quadratic norms) 41.
- Hitotumatu, S. (Levi's conjecture) 307.
- Hoang, Pham Tan s. Pham Tan Hoang 208.
- Hochmuth, H. s. R. Albrecht 25.
- Hodge, W. V. D. (Views of geometry) 381.
- Hoeffding, W. and J. R. Rosenblatt (Efficiency of tests) 116.

- Hoff, Nicholas J. s. Antonio Ferri 421.
- Hoffman, W. C. (Scattering of electromagnetic waves) 113.
- Hoffmann, Frederic De s. Silvan S. Schweber 211.
- Hofmann, W. (Trigonometrische Höhenmessung) 165.
- Hofsommer, Ir. D. J. (Hyperspherical solid harmonics) 47.
- Hohenemser, K. H. (Schlag-schwingungen von Drehflügeln) 422.
- Holgate, Th. F. (Modern pure geometry) 128.
- Holz, Walter K. B. (Euklidisches Dreieck) 126.
- Hong, I. ($\Delta u + k^2 u = 0$) 81.
- Hopkins, H. G. (Infinitely long rigid-plastic beams) 418.
- Hormaeche, M. s. H. J. A. Rimoldi 375.
- Hörmander, L. (Partial differential operators) 322.
- Hoskin, N. E. (Laminar boundary layer on a rotating sphere) 181.
- Hosoi, S. (History of mathematical concepts) 245.
- Householder, A. S. (Terminating iterations for solving linear systems) 355.
- Hua, Loo-Keng (Unitary curvature of space of several variables) 395.
- Huber, A. (Isoperimetric inequality) 403.
- Hukuhara, M. (Application qui fait correspondre à un point un continu bicompat) 335.
- Hulubei, D. (Configurations relatives à l'équilibre astatique) 171.
- Huntington, E. V. (Propositions of algebra) 5; (Continuum) 29.
- Hurewicz, W. (Concept of fiber space) 159.
- and E. Fadell (Spectral sequence of a fiber space) 160.
- Huth, J. H. and J. D. Cole (Elastic-stress waves) 419.
- Huzita, T. (Projectile striking a water surface. II.) 234.
- Ibrahim, E. M. (Subgroups of orthogonal and symplectic groups) 257; (Plethysm of S -function) 257.
- Iglisch, R. und F. Kemnitz ($f''' + ff'' + \beta(1 - f^2) = 0$) 428.
- Igusa, Jun-ichi (Problems in algebraic geometry) 391; (Picard varieties) 392.
- Ikeda, S. (Estimation of quality of a group of lots) 372.
- Ilieff, V. (Trigonometrische Integrale) 52.
- Iliffe, C. E. (Thermal buckling of rod heat source) 456.
- Il'in, V. A. (Funktionen mit einer Singularität) 80; (Entwicklung nach Eigenfunktionen) 80; (Function with a singularity) 81.
- Imamura, T. (Potential in quantum field theory) 447.
- Inaba, H. (Stellar absorption lines) 459.
- M. (Differential equations in coordinated spaces) 344.
- Infeld, L. (Bemerkungen über Relativitätstheorie) 203; (History of relativity theory) 203.
- Inoue, S. (Canonical spectral representation of a normal operator) 353.
- Ioanin, Gh. (Contacts multipositionnels) 100.
- Ionescu Tulcea, C. T. s. O. Onicescu 31.
- Ioniță, Georgetă s. T. T. Vescău 206.
- Irani, R. A. K. (Arabic numerical forms) 245.
- Iséki, K. (Vector-space valued functions on semigroups. III.) 310; (Property of Lebesgue in uniform spaces. IV.) 405.
- Ishiguro, E., T. Arai, M. Sakamoto and K. Takayanagi (Tables for molecular integrals. VII.) 232.
- Ishihara, Sh. (Homogeneous Riemannian spaces) 396; (Isometries of pseudo-Hermitian spaces. II.) 397.
- and M. Obata (Affine transformations in Riemannian manifold) 146.
- T. (Addenda to „On multiple distributions“) 348.
- Istvánffy, E. (Reception by directional antennae) 197.
- Ivanenko, D. and V. N. Cytović (Tsytoovich) (Charged particles traversing a ferromagnetic material) 444.
- s. A. Brodskij 451.
- Iwata, K., Sh. Ogawa, H. Okonogi, B. Sakita and S. Oneda (Weak Boson-Fermion interaction) 227.
- Izumi, Shin-ichi (Trigonometric series. XIV—XVII.) 44.
- Jackson, L. K. (Subharmonic functions) 327.
- Jaeger, J. C. (Conduction of heat in a solid) 435.
- Jaffard, P. (Notion de valuation) 266.
- Jain, M. K. (Boundary layer effects) 180; (Meijer transform) 340.
- Jaiswal, J. P. (Meijer transform. IV.) 341.
- Jakovlev (Iakovlev), L. G. (Velocity of wave front) 215.
- Jakubović, V. A. (Stabilitätsgebiete für Differentialgleichungssysteme) 69; (Differentialgleichungssysteme von kanonischer Form) 70.
- James, I. M. and J. H. C. Whitehead (Homotopy theory of sphere bundles. II.) 159.
- Jaśkowski, S. s. Andrzej Mostowski 248.
- Jastrow, R. (Many-body problem) 446.
- Jaumotte, A. s. P. Glansdorff 420, 421.
- Jaworowski, J. W. (Antipodal sets) 407; (Involutions of compact spaces) 407; (Mappings of the sphere into euclidean space) 408.
- Jecklin, H. (Curve della riserva matematica per mezzo di iperboli) 380.
- Jeener, J. s. S. C. Nicholson 99.
- Jenkins, J. A. (Circularly symmetric functions) 57; (p -valent functions) 301.
- Jerison, M. (Algebra associated with a compact group) 351.
- John, F. (Elliptic partial differential equations) 76; (Partial differential equations) 321.
- Johnson, M. H. and E. Teller (Field theory of nuclear forces) 221.
- Jones, F. B. (Homogeneous plane continuum) 405.
- jr., J. (Non-linear differential equations) 316.
- Jongmans, F. (Problème duopliste) 381.
- Jordan, P. (Geometrie als Erfahrungswissenschaft) 1.
- Jost, R. (Model for stripping reaction) 335.
- Jouvet, B. (Théorie réaliste des mésons) 216.

- Jowett, G. H. (Comparison of means of sets of observations) 118.
- Jung, K. (Gezeitenkräfte) 459.
- Jurchescu, M. (Fonctions analytiques définies par des équations différentielles) 317.
- Jurkat, W. and A. Peyerimhoff (Nörlund and Hausdorff methods) 287.
- Juščenko, A. A. (Schwingungen eines elastischen Fadens) 176.
- Just, K. (Superpotentiale in erweiterter Gravitationstheorie) 203.
- Kaeppler, H. J. und M. E. Kübler (Rückkehr geflügelter Geräte) 423.
- Kaganov, M. I. s. A. G. Sitenko 229.
- Kakehashi, T. (Convergence-region of interpolation polynomials) 48; (Decomposition of coefficients of power-series) 49.
- Kakutani, S. (Rings of analytic functions) 54.
- Kalitzin, G. St. (Getriebelehre) 135; (Gruppentheoretische Eigenschaften der Getriebe) 135.
- N. St. (Wellengleichung des Nukleons) 209.
- Kallianpur, G. (Grenzwertsatz) 107.
- and C. Radhakrishna Rao (Fisher's lower bound to asymptotic variance of a consistent estimate) 373.
- Kamat, A. R. (Mean square successive difference) 368.
- Kaminisi, K. (Lifetime of a stellar model) 459.
- Kampé de Fériet, J. (Statistical theory of turbulence. IV.) 182.
- Kanner, H. s. Z. Bay 456.
- Kano, C. (Crossed Jacobian extensor) 135.
- Kantz, G. (Integritätsbereiche mit eindeutiger Primelementzerlegung) 269; (Typus eines Zerlegungsringes) 270.
- Kaplan, I. (Nuclear physics) 223.
- s. J. Chernick 456.
- Kar, K. C. and S. P. Banerjee (Alpha disintegration) 226.
- S. C. (Elektromagnetik materieller Körper) 207.
- Karanikolov, Chr. (Relations of Onsager) 433.
- Karlin, S. (Renewal equation) 349.
- Karlin, S. and J. McGregor (Representation of stochastic processes) 108.
- s. H. F. Bohnenblust 350.
- Kasahara, Sh. (Topologie de l'espace $\mathcal{Q}(E, E)$) 83; (Espace des endomorphismes continus) 84.
- Kasch, F. (Galoissche Theorie für Schiefkörper) 16.
- Katayama, Y., Z. Tokunoka and K. Yamazaki (Over-all space-time description) 211.
- Katsurada, Y. (Curvature of a metric space) 149.
- Katterbach, Klaus s. Reimar Lüst 228.
- Kaufman, H. s. R. L. Sternberg 103.
- Kaul, R. N. (Frenet's formulae) 394.
- K. s. V. Cadambe 173.
- Kawada, Y. (Class formations) 19.
- Kawata, T. (Mean convergence of Fourier series) 43.
- Kazarinoff, N. D. (Whittaker functions) 296.
- Kemnitz, Friedrich s. Rudolf Iglisch 428.
- Kertész, A. (Linear equations over semi-simple rings) 266.
- s. Tibor Szele 261.
- Kestelman, H. (Riemann equivalence of functions) 280.
- Kettleborough, C. F. (Network analogy for stepped thrust bearing) 99.
- Khan, N. A. (Norm inequalities for square matrices) 6; (Characteristic roots of matrices) 255.
- Kikuchi, S. (Space-mean-frequency of stellar velocities. II. III.) 458.
- Kimpara, M. (Formule de Stokes) 39.
- Kimura, Naoki s. Takayuki Tamura 10.
- T. (Théorème de Malmquist. II. III.) 317.
- King, R. W. P. (Transmission line theory) 198.
- Kingston, R. S. T. s. P. U. A. Grossman 418.
- Kinukawa, M. (Convergence character of Fourier series) 42.
- Kirkby, S. s. A. D. Young 424.
- Kitagawa, T. and M. Mitome (Notation system of confounded factorial experiments) 120.
- Kitajgorodskij, A. I. (Vorzeichen der Strukturamplituden) 237; (Strukturanalyse von Kristallen) 237.
- Kleene, S. C. (Forms of predicates. II.) 252.
- Klimontović, Ju. L. (Diamagnetismus der Supraleiter) 235.
- Knapowski, S. (Irreducibility of polynomials) 257.
- Knipping, F. s. W. Friedrich 236.
- Knobloch, H.-W. (Hilbertscher Irreduzibilitätssatz) 256.
- Knopp, K. and B. Vanderburg (Functional Nörlund methods. I.) 287.
- , Konrad (Nörlund-Verfahren. II.) 288.
- Kobayashi, Sh. (Transformation group of Riemannian manifold) 145; (Espace à connexions affines) 399.
- Kodama, Y. (ANR for metric spaces) 409.
- Kolbina, L. I. (Konforme Abbildung des Einheitskreises) 58.
- Kolchin, E. R. (Galois theory of differential fields) 270.
- Kolesnikov, N. N. (Statistische Theorie der Kerne) 224.
- Kołos, Włodzimierz (Molecular orbitals) 232.
- Kooy, J. M. J. (Curvature of intergalactic space) 457.
- Korenbljum, B. I. (Laplace Integrale) 290.
- Korevaar, J. (Entire functions) 298; (Distributions. I—V.) 346.
- Koroljuk, V. S. (Empirische Verteilungen) 105.
- Korovin, V. I. (Laplace-Folgen) 142.
- Korst, N. s. A. Brodskij 451.
- Kostjučenko, A. G. (Cauchysches Problem und gemischte Aufgabe für partielle Differentialgleichungen) 72.
- Kovács, I. (Infinite rings) 14.
- Kôzai, Toshio s. Tetsuo Kudô 115.
- Krabbe, G. L. (Titchmarsh semi-group) 85.
- Krasnosel'skij, M. A. und S. G. Krejn (Gewöhnliche Differentialgleichungen) 68.
- s. I. A. Bachtin 172.
- Kreisel, G. and Hao Wang (Formalized consistency proofs) 252.
- Krejn, S. G. s. M. A. Krasnosel'skij 68.
- Krejnes, M. A. und N. D. Ajzenštat (Nomogrammdarstellung) 360.

- Kremer, H. F. (Komponenten von Vektoren) 134.
- Krettner, J. s. W. Müller 414.
- Kriens, J. (Extrem einer linearen Funktion) 122.
- Krishnan, V. S. (Additivity and symmetry for uniform structures) 151.
- Kručkovič, G. I. (Invariante Kennzeichnung der Räume V_3) 144.
- Krumhaar, H. (Selbstadjungierte Differentialoperatoren) 64.
- Kryžanovskij, O. M. (Wahl der Parameter eines Regelungssystems) 102; (Wertbereiche der Koeffizienten einer Differentialgleichung) 102.
- Krzywicka, E. (Équation différentielle $x^{(n)} + A(t)x = 0$) 314.
- Krzywoblocki, M. Z. v. (Boundary layer in liquids) 428; (Boundary layer in electron stream) 431.
- Kübler, M. E. s. H. J. Kaeppler 423.
- Kubo, R. and Y. Toyozawa (Transitions of a trapped electron in a crystal) 240.
- Kudō, T., N. Matsumura, Sh. Dehara, T. Kōzai, K. Sasaki, Sh. Umazume and Y. Watanabe (Bimodal distributions) 115.
- Kuessner, H. G. (Kernel of lifting surface theory) 422.
- Kuiper, N. H. (C^1 -isometric imbeddings. I. II.) 396.
- — — and K. Yano (Geometric objects) 398.
- Kuipers, L. s. Khwat Tik Han 256.
- Kung, Sun (Schlicht functions. I.) 57.
- Künzi, H. (Wertverteilungslehre) 60.
- Kuper, C. G. s. G. R. Allcock 235.
- Kurakin, K. I. (Differenzialoren in automatischen Regelungssystemen) 101.
- Kuramochi, Z. (Harmonic measures. II.) 59.
- Kuratowski, K. s. K. Haman 407.
- Kurepa, G. (Principles of induction) 29; (Principes de l'enseignement mathématique) 242; (Direct introduction of fractional powers) 242.
- Kusunoki, Y. (Continuation of harmonic functions) 303.
- Labra y Fernández, M. (Fußpunktdreiecke) 126.
- Lacombe, D. (Classes recursive-ment fermées) 2; (Opérateurs récurifs) 2.
- Lah, I. (Analytical graduation of fertility rates) 121; (Restglied der Taylorsche Reihe des Rentenbarwertes) 379.
- Laitoch, M. (Methode Floquets) 61.
- Lał, D. N. (Tschebyscheff's inequality) 362.
- Lanczos, C. (Eigenvalue problem of operators) 337.
- Landau, L. D. und E. M. Lifšic (Rotation flüssigen Heliums) 235.
- — — und I. Pomerančuk (Punktweise Wechselwirkung in der Quantenelektrodynamik) 216.
- Landshoff, Rolf s. J. B. Diaz 74.
- Larcher, M. P. s. Étienne Halphen 296.
- Larin, S. I. (Momentum distribution in the atom) 452.
- Lasala, J. de (Transportproblem von Hitchcock) 122.
- Lascu, A. (Division des nombres entiers) 14.
- Laue, M. v. s. W. Friedrich 236.
- Lauffer, R. (Euklidisches Dreieck) 125.
- Lawley, D. N. (Centroid method) 119.
- Lawson, R. D. (Electric multipole moments in $j-j$ coupling) 224.
- Lax, P. D. (Cauchy's problem for hyperbolic equations) 75.
- Lazarsfeld, P. F. (ed. by) (Mathematical thinking in social sciences) 376.
- Lebedev, N. A. (Abschätzungen für Funktionen) 301.
- Lebesgue, H. (Mesure des grandeurs) 278.
- Lee, E. H. s. D. R. Bland 418.
- J. F. and F. W. Sears (Thermodynamics) 186.
- Lehmann, N. J. (Integraldarstellung für selbstadjungierte Randwertaufgaben) 64.
- Lehto, O. (Boundary value problem for functions harmonic in the unit circle) 53.
- Leicht, J. (ZPE-Ringe in der algebraischen Geometrie) 270.
- Lejřman, L. Ja. (Grenzübergang unter dem Lebesgueschen Integral) 32.
- Lekkerkerker, C. G. s. H. J. A. Duparc 23.
- Leko, T. ($y y'' + f(x) y^2 = \varphi(x)$) 60.
- Lelek, A. (Propriété de dualité) 151.
- Leray, J. (Intégrales abéliennes) 73.
- Leśniak, K. (Philodemos' treatise on induction) 248.
- Lessen, M. and J. A. Fox (Stability of boundary layer) 430.
- Levi, B. (Inflessione delle piastre sottili) 173.
- Levin, J. H. s. R. F. Clippinger 99.
- — — J. (Partial differential equations) 70.
- M. L. (Wärmestrahlung) 191.
- Levinson, C. and K. W. Ford (Model of the nucleus. I.) 224.
- Levintov, I. I. (Polarisation, Winkelabhängigkeit des Streuungsquerschnitts und Größe der Spin-Bahn-Wechselwirkung) 226; (Polarisation, Streuung und Spin-Bahn-Wechselwirkung) 226.
- Levitan, B. M. (Spektralfunktion und Entwicklung einer Differentialgleichung. II.) 312.
- Lévy, P. (Courbe du mouvement brownien) 112.
- Libby, Paul A. s. Antonio Ferri 421.
- Lietzmann, Walter s. Heinrich Behnke 241.
- Lifšic, E. M. s. L. D. Landau 235.
- Lillo, J. C. and G. Seifert (Pendulum-type equations) 68.
- Lipkin, H. J. (Non-linear kinetics of Chatillon reactor) 228.
- Litvinov, N. V. (Matrix der Einflüßzahlen eines biharmonischen Operators) 174.
- Ljaščenko, N. Ja. (Zerlegungssatz für Differentialgleichungssystem) 68.
- Löb, M. H. (Problem of L. Henkin) 2.
- Lobačevskij, N. I. (Nuovi principi della geometria) 125.
- Löbell, F. (Flächenabbildungen. X.) 138.
- Loeb, A. L. and H. H. Denman (Digital computer as laboratory tool) 99.
- Lojčanskij, L. C. und A. I. Lufe (Theoretische Mechanik. Bd. II) 167.
- Lombardo-Radice, Lucio s. N. I. Lobačevskij 125.
- Lomnicki, Z. A. and S. K. Za-

- remba (Zero-one processes) 108.
- Longo, C. (Fasci di complessi lineari) 384; (Elementi differenziali del 2° ordine di S_n) 386.
- Longuet-Higgins, M. S. (Bounds for the integral of a non-negative function) 45.
- Loomis, L. H. (Dimension theory of operator algebras) 87.
- Loonstra, F. (Extension du groupe ordonné) 261.
- Lopasić, V. (Electromagnetic catenary) 201; (Wire loop method) 201.
- Lord, F. M. (Sampling fluctuations) 120.
- Loś, J. (Methodology of elementary deductive systems) 251.
- — s. Andrzej Mostowski 248.
- Lotkin, M. (Test matrices) 94.
- Loud, W. S. (Duffing's equation) 67.
- Luce, R. D., J. Macy jr. and R. Tagiuri (Statistical model for relational analysis) 375.
- Lučina (Luchina), A. A. (Longitudinal vibrations of plasma. I.) 234.
- — — s. G. Ja. (Ia.) Mjakišev (Miakishev) 234.
- Lüders, G. (Betatronschnwingungen im Synchrotron) 202.
- Ludford, G. S. S. s. J. B. Diaz 74, 326.
- — — s. G. C. K. Yeh 82.
- Ludwig, R. (Leistungsberechnung von Flugzeugen) 180.
- Luke, Y. L. (r -method for linear differential equations with rational coefficients) 357.
- Lumer, G. (Punktmengen mit zusammenhängenden sphärischen Schnitten) 403.
- Lufe, A. I. s. L. G. Lojzanskij 167.
- Lüst, R. und A. Schlüter (Drehimpulstransport durch Magnetfelder) 459.
- — — und K. Katterbach (Kosmische Strahlung) 228.
- Lyons, W. J. (Statistico-mechanical theory of deformation) 417.
- Maaß, H. (Dirichletreihen mit Größencharakteren) 309.
- Mac-Dowell, S. W. (Gleichung von Proca) 210.
- MacNerney, J. S. (Continuous products in linear spaces) 90.
- Macon, N. (Continued fraction for e^x) 292.
- Macy jr., Josiah s. R. Duncan Luce 375.
- Maehara, Shōji (Predicate calculus with ε -symbol) 250.
- Magenes, E. (Teoremi di completezza per equazioni lineari ellittiche) 326.
- Magnus, A. (Polynomial solutions of a differential equation) 316.
- W. (Hill's equation) 63.
- Mahler, K. (Minima of compound quadratic forms) 23.
- Mainra, V. P. (Integral equations and self-reciprocal functions) 339.
- Majorana, Q. (Gravitazione) 204.
- Malliavin, P. (Procédés d'extrapolation) 51.
- Mambriani, A. (Equazioni differenziali) 319.
- Mamedov, Ja. D. (Integralgleichungen vom Urysohn'schen Typus) 335.
- Mamuzić, Z. (Opérateurs $E[M]$, $D[M]$) 150.
- Manaresi, G. (Limitazioni per ampiezza delle oscillazioni non-lineari) 316.
- Mandelstam, S. (Bethe-Salpeter formalism) 446.
- Manfredi, B. (Problemi di flusso lineare di calore) 192; (Temperatura in uno strato piano) 435.
- Mannoury, G. (Projektive Geometrie) 125.
- Mano, K. (Self-energy of scalar nucleon) 450.
- Marakathavalli, N. (Unbiased test) 370.
- Marchionna, E. (Varietà multiple non lineari) 389.
- Tibiletti, C. (Trecce algebriche) 388; (Trecce relative a forme canoniche) 388; (Irregolarità di un piano multiplo) 389.
- Marcus, R. J. s. R. B. Parlin 190.
- S. (Ensembles F_σ) 35; (Conditions (T) de Banach) 35; (Fonction partiellement continue) 285.
- Marinescu, G. (Espaces polynormés) 343.
- Marković, D. (Organisation du travail scientifique) 242.
- Marshall, W. (Magneto-hydrodynamic shock waves) 202.
- Martin, Colette s. Paul Belgodère 243.
- Martinek, J. s. G. C. K. Yeh 82.
- Marton, L. (ed. by) (Electronics and electron physics. VI.) 200.
- Martynov, A. S. (Scattering of mesons by nucleons) 220.
- Maruhn, K. (Gestalt der Himmelskörper) 432.
- Masani, P. (Huntington's axioms) 242.
- Massimi, R. (Problemi di Cauchy) 71.
- Masuyama, M. (Tables of control limits) 367.
- — and J. M. Sengupta (Bias in crop-cutting experiment. V.) 374.
- Mathews, P. M. s. Alladi Ramakrishnan 457.
- Matley, H. s. S. W. Bell 243.
- Matorin, A. P. (Absolute Beiträge von Funktionen) 284.
- Matsubara, T. (Approach to quantum-statistical mechanics) 188.
- Matsumura, Noboru s. Tetsuo Kudō 115.
- Matsumobu, H. and H. Takebe (Tables of U coefficients) 225.
- Matsushita, Shin-ichi (Décomposition de F. Riesz. I. II.) 329.
- Mathews, P. T. (Field theory. III. IV.) 447.
- — — and A. Salam (Propagators of quantized field) 448.
- Matveev, A. N. s. A. A. Sokolov 443.
- P. S. s. V. V. Solodovnikov 100.
- Mayer, J. E. (Problems of statistical mechanics) 190.
- Mayne, A. J. (Storage of fissile material) 366.
- Mazur, S. s. Andrzej Mostowski 248.
- Mazzoni, P. (Costituzione di un capitale per inseguimento) 380.
- McCormick, B. W. (Finite hub on optimum propeller) 422.
- McCoy, N. H. (Sum representations of prime rings) 265.
- McGregor, James s. Samuel Karlin 108.
- Medvedev, B. V. (Unitarität der S -Matrix) 213.
- Mendes, M. (Equations de Lagrange) 168.
- Mentzer, J. R. (Scattering and diffraction of radio waves) 441.
- Meschkowski, H. (Hilbertsche

- Räume mit Kernfunktion) 345.
- Messel, H. s. J. W. Gardner 456.
- Meyer, R. E. (Turbulent boundary layers on nozzle liners) 431.
- Michalup, E. (Effective rate and force of interest) 122.
- Michlin, S. C. (Komposition singularer Integrale) 337.
- Miele, Angelo s. Placido Cicala 178.
- Migdal, A. (Vielfachstreuung) 210.
- B. (Meson production) 451; (Nuclear reactions with production of slow particles) 453.
- — — s. I. I. Gol'dman 454.
- Mihailović, D. (Geometric interpretation of partial gradients) 458.
- Mihul, El. s. T. T. Vescān 206.
- Mikelađze, Š. E. (Gewöhnliche Quasidifferentialgleichungen) 61.
- Mikusiński, J. (Définition de distribution) 345.
- Miller, G. A. (Algebraic equation) 9.
- F. and H. Pursey (Partition of energy between elastic waves) 176.
- J. C. P. (ed. by) (Tables of Weber parabolic cylinder functions) 102.
- Minakshisundaram, S. (Eigenfunktionen of membrane problem) 81; (Lattice point problems) 81.
- Mirakjan, G. M. (Gerader Kreiszylinder) 126.
- Miranda, C. (Systèmes elliptiques d'équations linéaires) 325.
- Miron, R. (Géométrie d'un champ de vecteurs unitaires) 139.
- Mise, Shigetoshi s. Minoru Urabe 357.
- Miser, Hugh J. s. Paul G. Andres 25.
- Mitome, Michiwo s. Tosio Kitagawa 120.
- Mitra, D. N. (Torsion of composite sections) 173.
- Mittelstaedt, P. (Nukleonen in schweren Atomkernen) 451.
- Miyazawa, H. s. M. L. Goldberger 448.
- Mjakišev (Miakishev), G. Ja. (Ia.) and A. A. Lučina (Luchina) (Longitudinal vibrations of plasma. II.) 234.
- Mohan, C. (Gambler's ruin problem) 113.
- Mohanty, R. (Summability $[C, 1]$ of Fourier series) 42.
- — and M. Nanda (Jump of a function) 43.
- Moisl, Gr. C. (Nombres idéaux) 14; (Fonctionnement séquentiel des schémas à contacts et relais) 99; (Méthode de synthèse pour les schémas à contacts) 99; (Mécanismes automatiques) 100; (Schémas par introduction de contacts) 100.
- Mokrišev, K. K. (Konstruktionsaufgaben in Lobačevskijscher Ebene) 127.
- Molière, G. (Streuung schneller geladener Teilchen. III.) 230.
- Monin, A. S. (Turbulente Diffusion) 192.
- Mönkemeyer, R. (Einheiten im Körper $R(\sqrt[k]{k})$) 19.
- Mood, A. M. s. E. T. Parker 375.
- Moór, A. (Metrische Dualität allgemeiner Räume) 148.
- — — und Gy. Soós (Mannigfaltigkeiten von Hyperflächenelementen) 148.
- Moore, J. C. s. H. Cartan 156.
- P. G. (Mean successive difference in samples) 114.
- Moorhouse, R. G. s. E. H. Bellamy 449.
- Mordell, L. J. (Equazioni diofantee) 272.
- Morita, Masato (Beta-gamma directional correlation) 227.
- — s. Reiko Saito 225.
- Moriya, Mikao (Derivationsmodul und 2-Kohomologiegruppe. I.) 271; (2-Kohomologiegruppen in diskret bewerteten Körpern) 271.
- Morlat, G. s. Étienne Halphen 296.
- Morse, M. and W. Transue (*C-Bimeasures*) 280.
- Mostow, G. D. (Covariant fiberings of Klein spaces) 160.
- Mostowski, A. (Grundlagen der Mathematik) 248; (Formula with no recursively enumerable model) 251; (Definable sets and functions) 252.
- — — A. Grzegorzczak, S. Jaśkowski, J. Łos, S. Mazur, H. Rasiowa and R. Sikorski (Foundations of mathematics) 248.
- Motchane, L. (Construction effective de fonctions) 284.
- Mottelson, B. R. s. G. Alaga 227.
- Motzkín, T. S. and O. Taussky (Matrices with property L . II.) 254.
- Moustafa, M. D. (Infinite matrix-products) 365.
- Moyal, J. E. (Ionization fluctuations) 229.
- Müller, E.-A. (Verdichtungsstoß und laminare Grenzschicht in Überschallströmung) 427.
- W. (Flügelsschwingungen eines Hubschraubers) 422.
- — — und J. Krettnér (Biegungstheorie einer Rechteckplatte) 414.
- Murasugi, K. (Covering spaces and the invariant k) 412.
- Murata, Kentaro s. Tsuyoshi Fujiwara 263.
- Mutó, Y. (Convex mapping) 139.
- Mycielski, J. and A. Zięba (Infinite games) 366.
- Myrberg, L. (Dirichletsches Problem auf Riemannschen Flächen) 59; (Abelsche Integrale) 59.
- P. J. (Darstellung automorpher Funktionen durch elliptische und fuchsoidale Funktionen) 310.
- Myschkis, A. D. (Differentialgleichungen) 318.
- Nadolschi, V. (Groupes des taches solaires) 238.
- Nagai, T. (Simply transitive groups) 147.
- Nagata, M. (Derived normal rings of Noetherian integral domains) 266; (Corrections to „Krull's conjecture“) 267.
- Naim, L. (Fonctions surharmoniques) 328.
- Nakajima, S. (Perturbation theory in statistical mechanics) 432.
- Nakamori, K. (Nichtlineares Randwertproblem für partielle Differentialgleichung) 79.
- Nakaoka, M. (Cohomology of the p -fold cyclic products) 157; (Cohomology of threefold symmetric products of spheres) 157; (Homotopy of products of spheres) 413.
- Nanda, M. s. R. Mohanty 43.
- Nardini, R. (Campi alternativi della magneto-idrodinamica) 445.
- Narita, M. (Complete local rings) 268.
- Natanson, I. P. (Maxima- und Minima-Aufgaben) 26.

- Natucci, A. (Genesi combinatoria dell'aritmetica) 5;
(Dell'aritmetica generale e dell'algebra) 243; (A. Capelli) 247.
- Nehari, Z. (*R*-univalent functions) 57.
- Nelder, J. A. s. J. M. Hammersley 374.
- Nelson, R. J. (Truth functions) 249.
- Neufeld, J. and R. H. Ritchie (Density effect in ionization energy loss) 457.
- Neumann, J. von (Mathematische Maschinen) 98.
- Neuringer, Joseph s. Samuel Pines 180.
- Nevanlinna, F. und T. Nieminen (Poisson-Stieltjessches Integral) 90.
- Newman, J. R. (ed. by) (What is science?) 241.
- M. (Theorem on unimodular groups) 12.
- Newmarch, D. A. (Diffusion theory of the thermal fine structure in a reactor) 455.
- Nicholson, S. C. and J. Jeenel (NORC computation of π) 99.
- Niculescu, L.-J. (Critère de compacité d'Arzela) 285.
- Nieminen, T. s. F. Nevanlinna 90.
- Nigam, B. P. and H. P. Noyes (Quasi-bound states of the pion-nucleon system) 450.
- Nikolaev, P. V. (Binäre Anamorphosen von Gleichungen) 360.
- Nilsson, S. G. (Binding states of nucleons) 452.
- Nirenberg, L. (Elliptic partial differential equations) 76.
- — s. L. Bers 325.
- Nitsche, Johannes (Randwert-probleme elliptischer Differentialgleichungssysteme. II.) 78.
- Nöbauer, W. (Restklassen nach Restpolynomidealen) 8;
(Formengruppe) 8.
- Noble, B. (Dual integral equations) 339.
- Nomachi, Y. (Tables for applications of *t*-distributions) 114.
- Nomizu, K. (Riemannian homogeneous spaces) 145; (Reduction theorem for connections) 145.
- Norguet, F. (Produit de composition des courants) 349.
- Nørlund, N. E. (Hypergeometric functions) 294; (Fonctions hypergéométriques) 294.
- Northcott, D. G. (Classical ideal theory) 266; (Neighbourhoods of a local ring) 268; ($A F + B \Phi$ theorem) 269; (Analytically biregular mappings) 390; (Genus formula for plane curves) 391.
- Northover, F. H. (Long distance V. H. F. fields. I. II.) 196; (III.) 197.
- Nottrot, R. s. J. Haantjes 400.
- Nowacki, W. (Boundary problems of elasticity) 172; (Free vibrations of a plate) 177.
- Noyes, H. P., E. M. Hafner, G. Yekutieli and B. J. Raz (ed. by) (High energy nuclear physics) 215.
- — — s. B. P. Nigam 450.
- Obata, M. (Spaces of Lie groups) 397.
- — s. Shigeru Ishihara 146.
- Oberländer, Siegfried s. Karl Borkmann 97.
- Oberschelp, A. s. George Springer 403.
- Obi, Ch. (Non-linear differential equations. I.) 66.
- Occhieppo, Konradin Ferrari d' s. Ferrari d'Occhieppo, Konradin 457.
- Oehme, R. s. M. L. Goldberger 448.
- Ogasawara, T. (Complete quasi-unitary algebras) 88; (Topologies on rings of operators) 352.
- — and K. Yoshinaga (4-application) 352.
- Ogawa, Sh. (Decay and capture of unstable particles) 227.
- — s. Kenzo Iwata 227.
- Ohtsuka, M. (Théorème étoilé de Gross) 60.
- Okonogi, Hisaichiro s. Kenzo Iwata 227.
- Ollendorff, F. (Elektronik des Einzelelektrons) 200.
- Oneda, Sadao s. Kenzo Iwata 227.
- Onicescu, O. (Grandeurs additives de la mécanique statistique) 187.
- — et C. T. Ionescu Tulcea (Théorème de Riesz) 31.
- Orey, St. (Ordinal number theory) 253.
- Orlicz, W. (Linear operations in Saks spaces. II.) 89.
- Orloff, C. (Interprétation géométrique des séries alternées) 291.
- Orts, J. Ma. (Nichtlineare Rekursionsformeln) 291.
- Osterberg, H. and G. L. Walker (Table of $\int_0^z [J_1(x)/x] dx$) 362.
- Ostrach, S. (Viscous fluids subject to body forces) 181.
- Ostroumov, G. A. s. B. A. Vertgejm 199.
- Otrokov, N. F. (Grenzzyklen in algebraischen Differentialsystemen) 68.
- Ottaviani, G. (Concetto di infinito) 247.
- Ovenden, M. W. s. A. E. Roy 458.
- Paasche, I. (Äquivalenzsatz für Summengleichungen) 356.
- Page, Ch. H. (Physical Mathematics) 166.
- E. S. (Test for a change in a parameter) 116; (Control charts) 372.
- Pai, S. I. and S. F. Shen (Hypersonic viscous flow with heat transfer) 424.
- Palamá, G. (Equazioni reciproche) 9.
- Palladino, R. (Coefficienti di irradiazione e di conducibilità termica interna) 435.
- Palo, R. di (Teorema di Green) 38.
- Pandey, N. (Divergent Dirichlet's series) 51; (Analytic continuation of Dirichlet's series) 51.
- Panofsky, W. K. H. and M. Phillips (Electricity and magnetism) 192.
- Pantaleo, M. (Introduzione generale) 207.
- Pao, Yoh-Han (Hertz theory of impact) 417.
- Papakyriakopoulos, C. D. (Ends of knot groups) 158.
- Papas, Charles H. s. Fritz E. Borgnis 198.
- Parasjuk, O. S. (Singuläre Kausalfunktionen) 215.
- — — s. N. N. Bogoljubov 215.
- Park, D. (Cross-section theorem) 210.
- Parker, E. T. and A. M. Mood (Howell rotations for bridge sessions) 375.
- Parlin, R. B., R. J. Marcus and H. Eyring (Irreversible thermodynamics and rate theory) 190.

- Parodi, M. (Équation qui intervient en mécanique) 6.
- Pastor, Julio Rey s. Rey Pastor, Julio 127.
- Paszkowski, S. (Approximation uniforme avec des noeuds) 39.
- Patnaik, P. B. (Means of observations in normal samples) 368.
- Patterson, E. M. (Nilpotent and solvable algebras) 13; (Indices of Lie algebras) 13.
- Pauc, Ch. (Dérivés et intégrants) 283.
- Pauli, W. (ed. by) (N. Bohr) 210.
- Peaceman, D. W. and H. H. Rachford jr. (Numerical solution of differential equations) 358.
- Pearson, E. S. (Statistical concepts) 114.
- Peaslee, D. C. (Nuclear reactions of intermediate energy heavy particles) 225; (β -Zerfall) 227.
- Peck, J. E. L. s. P. Stein 96.
- Peirls, R. E. (Field theory. I. VI.) 447.
- Peremans, W. (Algebraic systems, which are not closed) 12.
- s. H. J. A. Dupare 23.
- Peretti, G. (Caratterizzazione geometrica della relatività ristretta) 203.
- J. (Vibration d'un réseau cristallin) 236; (Spectre de fréquence d'un réseau cristallin) 236.
- Permutti, R. (Rappresentazione delle g_n^1 di una retta) 129.
- Perotto, P. G. (Onde di pressione nei condotti) 179.
- Perron, O. (Abhängigkeit von Potenzsummen) 9.
- Petiau, G. (Fonctions de Bessel) 47.
- Petrov, V. V. (Genaue Abschätzungen in Grenzwertsätzen) 106.
- Petty, C. M. (Geometrie of the Minkowski plane) 401.
- Peyerimhoff, A. s. W. Jurkat 287.
- Peyovitch, T. (Application de la loi logistique à la population en Serbie) 121.
- Pfluger, Albert s. Joseph Hersch 306.
- Pham Tan Hoang (Métrique en théorie unitaire) 208.
- Phillips, Melba s. Wolfgang K. H. Panofsky 192.
- Piccard, Sophie s. André Calame 260.
- Picht, J. (Reflexionen am Paraboloidspiegel) 200; (Bildfehler) 200.
- Pihl, M. (Klassische Mechanik) 169.
- Pines, S., J. Dugundji and J. Neuringer (Flutter derivatives for flexible wing) 180.
- Pini, B. (Problema di Dirichlet per le equazioni lineari) 78; (Primo problema di valori al contorno per le equazioni paraboliche lineari) 323; (Problemi biarmonici fondamentali) 331.
- Pinl, M. (Representations of isotropic curves) 143.
- Pirani, F. A. E. (Perihelion motion) 204.
- Pirvu, A. (Problème d'élasticité anisotrope) 172.
- Pisareva, N. M. (Integral geodätischer Linien) 399.
- Pitcher, T. S. s. W. L. Root 363.
- Plamennov, I. Ja. (Differential-eigenschaften meßbarer Funktionen) 33.
- Platrier, Charles (Mécanique rationnelle. II.) 445.
- Plebański, J. and J. Sawicki (Relativistic two body problem) 446.
- Plessis, N. du (Riesz fractional integral) 281; (Spherical fractional integrals) 281; (Fejér-Riesz theorem) 329.
- Pluvillage, P. (Mécanique quantique) 208; (Équation de Schrödinger. I.) 231.
- Polievktov-Nikoladze, N. M. (Renormierung der Ladung) 218; (Greensche Funktion für das Photon) 218.
- Poliščuk, E. M. (Mittelwert eines Funktional) 85.
- Polvani, G. (Moto della terra) 247.
- Pomerančuk, I. (Renormierung der Mesonladung) 217; (Verschwinden der renormierten Mesonladung) 218.
- s. L. Landau 216.
- Popa, I. (Arithmétique moldave) 246.
- Popken, J. (Convolutions in number theory) 276.
- Popov, K. (Irreversible thermodynamical processes) 433.
- Popović, V. (Théorème de N. Obrechhoff) 284.
- Popovici, A. (Déterminisme quantique) 208.
- Popoviciu, T. (Interpolation par des polynômes) 359.
- Popp, S. (Fluide compressible) 179.
- Postnikov, M. M. (Homotopie-theorie stetiger Abbildungen. I. II.) 409; (III.) 410.
- Potters, M. L. (Matrix method for linear second order difference equation) 95.
- Power, G. and D. L. Scott-Hutton (Slow steady motion of liquid) 180.
- Prager, W. (Plastizitätstheorie) 175.
- Prior, A. N. (Formal logic) 249.
- Prochorov, Ju. V. (Summen gleichverteilter Zufallsgrößen) 107.
- Prvanovitch, M. (Hyper-Darboux lines) 137; (Field of vectors) 395.
- Pursell, L. E. (Fixed ideals in function rings) 404.
- Pursey, H. s. G. F. Miller 176.
- Putnam, C. R. (Oscillation criteria) 62; (Temporal means) 111; (Patterson functions) 238.
- Quadling, D. A. (Mathematical analysis) 26.
- R.-Salinas, B. (Funktionen mit verschwindenden Momenten) 342.
- Rabinowitz, P. s. K. S. Cole 99.
- Rachajski, B. (Systèmes en involution d'équations du second ordre) 320.
- Rachford jr., H. H. s. D. W. Peaceman 358.
- Rachmanov, B. N. (Schlichte Funktionen) 57.
- Radhakrishna Rao, C. s. Rao, C. Radhakrishna 119, 120.
- Rado, T. and P. V. Reichelderfer (Continuous transformations in analysis) 35.
- Radojčić, M. (Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen) 304.
- Raevskij, S. Ja. (Nichtlinearitäten bei stetigen zufälligen Einwirkungen) 111.
- Ragab, F. M. (Product of Bessel-functions) 296; (Product of Whittaker functions) 296.
- Rahman, Q. I. (Entire functions) 298.

- Raj, Des (Efficiency of gauging) 115.
- Rajagopal, C. T. (Tauberian theorems of O. Szász) 290.
- — and V. R. Srinivasa-raghavan (Analytical conics) 128.
- — and T. Vijayaraghavan (Tauberian theorems) 289.
- Rall, L. B. (Iterative solutions of Fredholm integral equations) 358.
- Ram, Siya (Hypergeometric distribution) 114.
- Ramakrishnan, A. (Processes represented as integrals of random functions) 365; (Phenomenological interpretation of integrals of random functions. I. II.) 365.
- — and P. M. Mathews (Straggling of the range of fast particles) 457.
- — and S. K. Srinivasan (Number of photons in an electron-photon cascade) 456.
- Raman, Sir C. V. (Thermal agitation in crystals) 236.
- Rao, C. Radhakrishna (Estimation and tests of significance in factor analysis) 119; (Dispersion for multiply classified data) 120.
- — — s. G. Kallianpur 373.
- Rapcsák, A. (Invariante Taylorsche Reihe) 147; (Bahnen in Linienelementmannigfaltigkeiten) 148.
- Raševskij, P. K. (Spinoren) 132.
- Rasiowa, H. s. Andrzej Mostowski 248.
- Rattray, B. A. and J. E. L. Peck (Infinite stochastic matrices) 84.
- Rauch, H. E. (Algebraic Riemann surfaces) 305; (Moduli in conformal mapping) 305; (Moduli of Riemann surfaces) 305.
- Ray, K. s. M. Ghosh 419.
- — D. s. M. Ghosh 176.
- M. (Forced jet of a compressible fluid) 179.
- Rayski, J. (Bilocal theory of elementary particles) 214.
- Raz, B. J. s. H. P. Noyes 215.
- Rédei, L. (Hajósscher Satz) 11.
- Redheffer, R. M. (Approximation by enumerable sets) 277.
- — and W. Wasow (Linear differential equations) 61.
- Reeve, J. E. (Classification of algebroid singularities) 129.
- Reichbach, J. (Functional calculus of first order) 250.
- M. (Théorème de Cantor-Bernstein) 27.
- Reichelderfer, P. V. s. T. Rado 35.
- Reid, W. P. (Boundary value problems) 324.
- Reignier, J. (Charge électrique du noyau) 225.
- Reiner, A. S. (Isotope shifts) 230.
- Reingold, Haim s. Paul G. Andres 25.
- ReiBig, R. (Erzwungene Schwingungen) 66; (Nicht-lineare Differentialgleichung. I. II.) 67.
- Rejziń (Reiziń), L. É. (Integral curves of three differential equations) 69.
- Remez, E. Ja. (Aufgaben Čebyševscher Approximation) 40.
- Renaudie, J. (Théorie unitaire) 207.
- Rényi, A. (Axiomatic theory of probability) 104.
- — s. J. Hájek 107.
- Renzulli, T. (Massime sollecitazioni nei ponti) 171.
- Report of an international conference on operator theory and group representations. 86.
- Report of the Physical Society Conference on the Physics of the Ionosphere. 438.
- Reuter, G. E. G. (Contraction semigroups) 353.
- Rey Pastor, Julio, Luis A. Santaló und Manuel Balanzat (Analytische Geometrie) 127.
- Reymond, A. (Histoire des sciences exactes et naturelles) 244.
- Rheinboldt, W. (Randbedingung bei Grenzschichtgleichungen) 428.
- Ribeiro Albuquerque, J. (Endliche Mengen) 28.
- Ribenboim, P. (Conjecture de Krull) 267; (Note de Nagata) 268.
- Ricci, G. (Prolungabilità delle serie di potenze. II.) 50; (Punti aventi per coordinate i numeri primi) 276; (Massimo per le funzioni maggioranti delle serie di potenze) 297; (Funzioni maggioranti delle serie di potenze di norma finita) 297; (Teorema di Vivanti-Pringsheim-Hadamard-Fabry) 297; (Teorema di Fabry) 298; (Punti singolari della Serie di potenza) 298.
- Ridder, J. (Gentzensche Schlußverfahren. I.—III. III^{bis}) 249.
- Rieger (Riger), L. (Suslin-algebras) 27.
- Riiber, A. E. (Meromorphe Funktionen) 56.
- Rimoldi, H. J. A. and M. Hormaeche (Law of comparative judgment) 375.
- Riordan, John s. R. E. Fagen 366.
- Ritchie, R. H. s. Jacob Neufeld 457.
- Rivlin, T. J. s. N. C. Ankeny 10.
- Rizza, G. B. (Dirichlet problem for n -harmonic functions) 330.
- Robinson, A. (Ordered fields and definite functions) 15.
- J. (Primitive recursive functions) 2.
- R. M. (Primitive recursive functions. II.) 2.
- Rodeanu, R. (Théorème ergodique concernant les chaînes de Markov) 109.
- Roman, T. (Groupes abstraits, correspondantes aux 32 classes cristallographiques) 238.
- Rongved, L. (Force at point in a solid) 416.
- Root, W. L. and T. S. Pitcher (Fourier series expansion of random functions) 363.
- Rose, A. (Gödel theorem) 250.
- Rosenblatt, Alfred s. Godofredo Garcia 26.
- John Raup s. Wassily Hoeffding 116.
- Rosenbloom, P. C. (Zeros of polynomials) 52.
- — and S. E. Warschawski (Approximation by polynomials) 48.
- Rosenfeld, L. (Statistical thermodynamics) 188.
- Rosow, E. (Berechnung der normal scores) 98.
- Rossum, H. van (Orthogonal polynomials connected with Padé table. I—III.) 293.
- Roy, A. E. and M. W. Ovenden (Commensurable mean motions in the solar system. II.) 458.
- Royden, H. L. (Conformal deformation) 305.
- Rozet, O. (Suites de Laplace) 142.

- Rüdiger, D. (Spannungen und Verschiebungen krummer Flächen) 413.
- Rudin, W. (Analytic functions of class H_p) 302.
- Rudra, A. (Method of discrimination. I.) 118.
- Rumer, Ju. B. (Phasenübergänge beim Bose-Gas) 235.
- Russek, A. (Exchange moment contributions) 223.
- Rusu, E. (Nombres représentables par $F = a^2 + kb^2$, $(a, b) = 1$) 276.
- Ryffert, H. (Ausbreitung „Exponentialbegrenzter“ Wellen) 431.
- Ryll-Nardzewski, C. (Mixing theorem) 344.
- Saban, G. (Invarianti della teoria metrica delle superficie rigate) 139; (Teorema dei quattro vertici) 395.
- Saeki, T. (Pseudorecurrence in dynamical systems) 154.
- Sagawa, A. (Existence of Green function) 58.
- Saibel, E. (Vibrations of composite systems) 98.
- Saito, R. and M. Morita (Clebsch-Gordan coefficients) 225.
- T. (Center-type singular points) 69.
- Sakamoto, Michiko s. Eiichi Ishiguro 232.
- Sakita, Bunji s. Kenzo Iwata 227.
- Salam, A. (Field theory. II.) 447.
- s. P. T. Matthews 448.
- Salkowski, E. (Darstellende Geometrie) 164.
- Saltykow, N. (H. Poincaré) 247.
- Salwen, H. (Resonance transitions. I.) 232.
- Sályi, I. (Comments on „Fallacies and paradoxa“) 416.
- Salzer, H. E. (Orthogonal polynomials) 98.
- Salzman, G. (Neutron-electron interaction) 221.
- Samuel, P. (Méthodes d'algèbre en géométrie) 389.
- s. H. Cartan 154.
- Sanatani, S. (Transition probability) 445.
- Sanden, H. von (Praxis der Differentialgleichungen) 95.
- Sandgren, L. (Vibration problem) 353.
- Sano, M. (Gamma-transition of nuclei) 227.
- Santaló, L. A. (Größenverteilung in einem Körper enthaltener Korpuskeln) 113.
- s. Julio Rey Pastor 127.
- Sanyal, Lakshmi (Jeffery's solution of motion of a viscous liquid) 178; (Boundary layer flow along a wall) 181.
- Šapiro, Ja. L. (Geodätische Richtungsfelder) 400.
- Sapogov, N. A. (Cramér'scher Satz) 106.
- Saran, Sh. (Integrals associated with hypergeometric functions) 295.
- Sario, L. (Functionals on Riemann surfaces) 302; (Positive harmonic functions) 303.
- Sasaki, Kenichi s. Tetsuo Kudo 115.
- Sh. and K. Yano (Pseudo-analytic vectors) 147.
- U. (Lattices of projections) 88.
- Satchler, G. R. (Polarization in nuclear reactions) 225.
- Sato, Masachiyo (Racah coefficient) 225.
- Satô, Masako (Fourier series. V.) 42; (Lacunary Fourier series. I.) 43; (II.) 44.
- s. Shin-ichi Izumi 44.
- Satô, T. (Famille de courbes) 334.
- Sawicki, J. (Coulomb effects in stripping reactions) 453.
- s. J. Plebański 446.
- Jerzy s. Janusz Dąbrowski 452.
- Schaefer, Helmut (Hyperbolische Systeme partieller Differentialgleichungen) 73.
- Hermann (Spannungsfunktionen einer Dyname) 415.
- Scheja, G. s. George Springer 403.
- Schenkman, E. (Tower theorem for finite groups) 259.
- Schlüter, Arnulf s. Reimar Lüst 228, 459.
- Schmidt, J. (Konfinalität) 29.
- Schoeneberg, B. s. A. Scholz 20.
- Scholz, A. (Zahlentheorie) 20.
- Schottky, W. (Hrsg. von) (Halbleiterprobleme. II.) 240.
- Schouten, J. A. and K. Yano (Vanishing of Nijenhuis tensor) 397; (Pseudo-Kählerian spaces) 397; (Invariant subspaces) 398; (Intrinsic connexion in X_{2n}) 399.
- Schrödinger, E. (Wave equation for spin 1. I. II.) 210.
- Schuff, H. K. (Polynome über algebraischen Systemen) 263.
- Schuh, H. („Ähnliche“ Lösungen der instationären laminaren Grenzschichtgleichung) 430.
- Schulze, W. s. E. Salkowski 164.
- Schumann, W. O. (Erdmagnetfeld) 196.
- Schützer, W. s. D. Bohm 432.
- Schwartz, Ch. (Hyperfine structure) 230.
- Schwarz, B. (Complex non-oscillation theorems) 317.
- Schweber, S. S., H. A. Bethe and F. De Hoffmann (Fields) 211.
- Schwerdtfeger, H. (Theorem by J. A. Todd) 257.
- Scorza Dragoni, G. (Lemma di Sperner) 152; (Teoria della dimensione) 405; (Traslazioni piane) 406.
- Scott-Hutton, D. L. s. G. Power 180.
- Sears, Francis W. s. John F. Lee 186.
- Sebastião e Silva, J. (Calcul opérationnel) 345.
- Sedmak, V. (Équations ensembles) 27.
- Segerdahl, C.-O. (Ruin in theory of risk?) 121.
- Seidel, J. (Angles and distances in n -dimensional geometry. I—III.) 383.
- W. s. F. Bagemihl 299.
- Seidenberg, A. (Linear differential equations) 18; (Separating transcendence bases for differential fields) 270.
- Seifert, G. (Pendulum-type equation) 67.
- s. James C. Lillo 68.
- Sekar, C. Chandra s. Chandra Sekar, C. 372.
- Selig, F. (Sätze über Momentenkräfte) 171.
- Selivanova, S. G. (Approximationen von differenzierbaren stetigen Funktionen) 40.
- Šemjakin, E. I. (Instationäre Störungen) 417; (Lambsches Problem) 417.
- Sen, R. N. (Pairs of teleparallelisms. II.) 400.
- Sengupta, A. M. (Stress distributions in a thin plate) 173.
- J. M. s. M. Masuyama 374.
- Sentis, A. (Visco-élasticité de la matière) 176.
- Serdengecti, S. s. H. S. Tsien 101.

- Serre, J.-P. (Théorème de dualité) 161; (Faisceaux algébriques cohérents) 162.
- — — s. H. Cartan 154, 156.
- Sessler, A. M. and H. M. Foley (Hyperfine structure of He^3) 231.
- Sestini, G. (Problemi retti da equazioni di tipo parabolico) 323.
- Šestova, G. A. (Störungen bei Befehlsübermittlung einer Fernsteuerung. I.) 361.
- Severi, F. (Aspetti matematici dei legami tra relatività) 203.
- Ševljakov, Ju. A. (Verschiebungen flacher kugelförmiger Schalen) 173.
- Shanks, D. (Transformations of divergent sequences) 286.
- Shapiro, Ascher H. s. Tau-yi Toong 181.
- H. N. s. Paul Erdős 276.
- H. S. (Normed linear spaces) 302.
- Shen, S. F. s. S. I. Pai 424.
- Shibata, T. (Lorentz transformations without rotation) 203.
- Shield, R. T. (Plastic flow of metals) 175; (Coulomb's law of failure in soils) 416.
- Shimoda, Isaac (General analysis. V.) 352.
- Shipman, J. S. s. R. L. Sternberg 103.
- Shoda, K. (Algebraisch abgeschlossene Erweiterung) 12.
- Siegel, K. M. (Legendre function) 46.
- Sierpinski, W. (Axiome du choix pour les ensembles finis) 248; (Nombres de Mersenne et de Fermat) 274; (Primzahlen) 274; (Suite de tous les nombres premiers) 275.
- Sikkema, P. C. (Recursion formulae) 291; (Nörlund's theory of linear difference equations I.) 318.
- Sikorski, R. s. Andrzej Mostowski 248.
- Šilov, G. E. s. I. M. Gel'fand 72.
- Silva, J. Sebastião e s. Sebastião e Silva, J. 345.
- Simonart, Fernand s. Robert Ballieu 5.
- Singer, I. M. and J. Werner (Derivations on algebras) 351.
- Singh, Shri Kuldip (Vertex of a great circle) 166.
- Siotani, M. (Discordant variance estimates) 373.
- Širkov, D. V. s. N. N. Bogoljubov 210, 219.
- Širokov, A. P. (Kovariant konstante Affinoren) 147.
- Sitenko, A. G. und M. I. Kaganov (Energieverluste geladener Teilchen) 229.
- Skopin, A. I. (p -Erweiterungen eines lokalen Körpers) 18.
- Skornjakov, L. A. (Metrisation der projektiven Ebene) 401.
- Slater, N. B. (Unimolecular gas reactions) 232.
- Šlebodziński, W. (Algorithm of exterior forms) 70.
- Slepčova, G. P. (Plastische Deformationen einer Membran) 176.
- Slowikowski, W. (Closed continuous mappings of bicomact T_1 spaces) 150.
- Smirnov, M. M. (Aufgaben zu partiellen Differentialgleichungen) 318.
- Smith, D. E. (History and transcendence of π) 292.
- K. T. (Functional spaces) 345.
- W. L. (Regenerative stochastic processes) 363; (Renewal theorem) 364.
- Smorodinskij, Ja. s. A. Baž 451.
- Snyder, J. N. (Simultaneous linear equations) 361.
- Sokolik, G. A. (Theory of fusion) 208.
- Sokolov, A. A., A. N. Matveev und I. M. Ternov (Leuchtender Elektron) 443.
- N. P. (Büschel von Formen) 7.
- Sokolovskij, V. V. (Plastizität) 174.
- Sokolowski, M. (Orthotrope Scheiben) 173.
- Solian, A. (Notion de „ n -complet“) 261.
- Solodovnikov, V. V. und P. S. Matveev (Kontrollierende Systeme) 100.
- Soós, Gy., s. A. Moór 148.
- Souriau, J.-M. (Équations canoniques) 143.
- Spampinato, N. (Prolungamento di una ipersuperficie) 131; (Relazione fra le proprietà di contatto di una curva con le algebre dei numeri biduali) 131; (Rappresentazione in S_5 del piano complesso completo) 393; (Varietà dell' S_{11}) 393; (Invarianza birazionale) 393; (Curve e superficie osculatrici) 393; (Falde tridimensionali dell' S_5) 394; (Congruenza della tangenti ai rami di una falda) 394; (Rappresentazione in S_5 di un fascio di curve) 394; (Superficie biduali) 394; (Falde di Halphen) 394; (Superficie tripotenziale) 394.
- Sparre Andersen, E. (Summen von stochastischen Veränderungen) 106.
- Spector, C. (Recursive well-orderings) 3.
- Spencer II, Guilford L. s. Dick Wick Hall 404.
- Sperner, E. (Teorema di Brouwer) 405.
- Sponsler, G. C. (Generalized Legendre functions) 47.
- Springer, George (Einführung in die Topologie) 403.
- T. A. (Quadratic forms over fields with discrete valuation. I. II.) 276; (Cubic forms over fields with discrete valuation) 277.
- Srinivasan, S. K. s. Alladi Ramakrishnan 456.
- Srinivasaraghavan, V. R. s. C. T. Rajagopal 128.
- Staff of the Computation Laboratory s. Tables of the cumulative binomial probability distribution 367.
- Stamatis, E. (Euklidischer Satz) 244.
- Stampacchia, G. (Problemi al contorno misti per equazioni a derivate parziali) 327.
- Stange, K. (Abgangslinie für wirtschaftliche Gesamtheiten) 379.
- Stanjuković, K. P. (Relativistische Magneto-Gasdynamik) 445.
- Stanković, B. (Équations intégrales singulières) 337.
- Steel, W. H. (Choice of glass for cemented doublets) 443.
- Steen, F. H. (Differential equations) 60.
- — — and D. H. Ballou (Analytic geometry) 383.
- Stein, P. and J. E. L. Peck (Poisson's equation) 96.
- Steinfeld, O. (Bemerkung zu Arbeit von T. Szele) 14.
- Stenberg, W. (Sequences with divergent total variation) 290.
- Stepanoff, A. J. (Turboblowers) 421.
- Sternberg, E. and R. A. Eubanks (Concept of concentrated loads) 416.

- Sternberg, R. L., J. S. Shipman and H. Kaufman (Tables of Bennett functions) 103.
- Stöfel, E. (Rechenautomaten) 98.
- Stoilow, S. (Principe des extrema) 53.
- Stoker, J. J. (Stability of mechanical systems) 170.
- Stolt, B. (Abschwächung einer Gruppendifinition) 257.
- Stoneley, R. (Surface elastic waves in a cubic crystal) 236.
- Stonert, H. (Conference of logicians) 248.
- Stoppelli, F. (Equazioni dell'elastostatica isoterma) 415.
- Storchi, E. (Fluidi perfetti in regioni a velocità sonica) 183.
- Straneo, P. (Concezione relativistica di A. Einstein) 247.
- Stratonovič (Stratonovich), R. L. (Entropy of systems) 188; (Entropy in quantum statistics) 189.
- Ströher, W. (Differentialinvarianten) 140.
- Sudan, G. (Equation en nombres entiers) 277.
- Sudo, T. (History of mathematics in Ryu-kyu. I—III.) 245.
- Sugawara, Masahiro (*H*-spaces) 158.
- Masao (Relativistic and exchange current corrections to deuteron magnetic moment) 222.
- Sunouchi, G.-i. (Abel summability of Fourier series) 43.
- H. (Maximal ideal in a factor. II.) 88.
- Surányi, J. (Linear inequalities) 256.
- Süss, Wilhelm s. Heinrich Behnke 241.
- Sykes, J. B. (Moderation and diffusion of neutrons) 455.
- Synge, J. L. (Biharmonic equation) 83.
- Szekeress, G. (Unitary symmetrical space) 403.
- Szelagowski, F. (Tension of an annular plate) 414.
- Szele, T. and A. Kertész (Generalized *p*-groups) 261.
- Szűsz, P. (Problem von Hartman) 24.
- Table of descending exponential.** 362.
- Tables of cumulative binomial probability distribution.** 367.
- Tafeln der trigonometrischen Funktionen.** 102.
- Tagiuri, Renato s. R. Duncan Luce 375.
- Takács, L. (Waiting time problems) 109; (Processes of happenings) 110.
- Takahashi, M. (Analysis of variance for split-plot designs) 118.
- Sh. (Notes on Riemann-sum) 364.
- Takano, K. (Affine paths) 149.
- Takashima, M. (Tables for testing randomness) 117.
- Takasu, T. (Complex function theory. I.) 60; (Non-conjectural theory of relativity) 205.
- Takayanagi, Kazuo s. Eiichi Ishiguro 232.
- Takebe, Hisao s. Hiroyuk Matsunobu 225.
- Takeno, H. (Field equations in general relativity) 207.
- Tamássy, L. (Möbiussche Kreisgeometrie) 384.
- Tamura, T. (Translations of a semigroup) 10; (One-sided bases of a semigroup) 257.
- and N. Kimura (Greatest decomposition of semigroup) 10.
- Tanaka, Ch. (Dirichlet series. XV.) 51.
- Katsuro s. Hitoshi Tsujimoto 31.
- T. (Family of connected subsets) 150.
- s. Akira Tominaga 151.
- Tanimoto, B. (Boussinesq's problem. I. II.) 415.
- Tanzi Cattabianchi, L. (Convergenza delle successioni) 289.
- Tati, T. (Light nuclei) 453.
- Tatuzawa, T. (Additive prime number theory) 274.
- Tauber, G. E. s. Ta-You Wu 209.
- Taussky, Olga s. T. S. Motzkin 254.
- Tautz, G. L. (Dirichletsches Problem bei nichtlinearen Differentialgleichungen) 76; (Theorie des Dirichletschen Problems) 330.
- Taylor, Angus E. (Advanced calculus) 25; (Spectral theory of operators) 92.
- Teller, E. s. M. H. Johnson 221.
- Tenca, L. (Relazioni epistolari fra G. D. Cassini e V. Viviani) 246.
- Teodorescu, I. (Équations de Maxwell) 207.
- Ter Haar, D. s. Haar, D. Ter 189.
- Ternov, I. M. s. A. A. Sokolov 443.
- Tewari, S. G. s. V. Cadambe 173.
- Theil, H. (Consumers' behaviour) 122.
- Thom, R. s. H. Cartan 156.
- Thomas of Bradwardine (His tractatus de proportionibus) 245.
- Tibiletti, Cesarina Marchionna s. Marchionna Tibiletti, Cesarina 388, 389.
- Tietze, H. (Grenzwertproblem) 34; (Bemerkung zur Note: Grenzwertproblem) 34.
- Tinkler, J. (Prandtl number and viscosity-temperature index) 429.
- Tiomno, J. (Spinning point particles) 209.
- Tite, T. s. Ja. Čajkovskij 48.
- Titchmarsh, E. C. (Perturbation theory. V.) 231.
- Țițeica, Ș. (Troisième principe de la thermodynamique) 187.
- Tits, J. (Espaces homogènes de groupes de Lie) 123.
- Titus, C. J. (Image of boundary) 305.
- Todd, J. (ed. by) (Computation of conformal maps) 359.
- Todeschini, B. (Condizioni di isentropicità) 177; (Correnti ipersoniche rotazionali piane) 178.
- Tôgô, Sh. (Derivations of Lie algebras) 13.
- Tokuoka, Z. s. Y. Katayama 211.
- Tolhoek, H. A. s. Chr. D. Hartogh 225.
- Tollmien, W. (50 Jahre Grenzschichtforschung) 427.
- s. H. Görtler 181.
- Tolmačev, V. V. (Korrelationsfunktion für Bose-Gas) 234.
- Tomić, M. (Zéros des fonctions méromorphes) 299.
- s. S. Aljančić 43.
- Tominaga, A. and T. Tanaka (Convexification of continua) 151.
- Tomonaga, Sin-itiro (Quantum-mechanical collective motion of particles. I. II.) 446.
- Tonolo, A. (Equazioni di propagazione delle onde elettromagnetiche nei mezzi) 75.
- Toong, Tau-yi and A. H. Shapiro (Frictional effects for laminar compressible flow) 181.
- Toscano, L. (Riduzione tra funzioni) 45; (Polinomi ipergeometrici) 295.

- Tóth, E. (Puissance des polynômes à coefficients entières) 28.
- Tournarie, M. (Inversion du produit de composition) 166.
- Townsend, B. B. (Extensive differentiation of extensors) 134.
- Toyozawa, Yutaka s. Ryogo Kubo 240.
- Transue, William s. Marston Morse 280.
- Tricomi, G. (Equazioni integrali del tipo di Carleman) 336.
- Trilling, L. and R. J. Häkkinen (Stanton tube) 181.
- Trjitzinsky, W. J. (Laplaciens non sommables) 328.
- Tsien, H. S. and S. Serdengecti (Analysis of peak-holding control) 101.
- Tsuji, M. („Löwner's theorem“) 58; (Conformal mapping) 58.
- Tsujimoto, H. and K. Tanaka (Sets of measures) 31.
- Tu, Ching-Hua (Equations of sandwich plates) 414.
- Tulcea, C. T. Ionescu s. Ionescu Tulcea, C. T. 31.
- Turán, P. (Instability of differential equations) 315.
- Tuschák, R. (Transient phenomena) 196.
- Überall, H. (Photondiffusion) 457.
- Uhler, H. S. (Factorials between 449! and 751!) 21.
- Ulina, G. V. s. I. Ja. Ašnevic 53.
- Umazume, Shigenori s. Tetsuo Kudō 115.
- Umezawa, H. s. A. Visconti 213.
- Unsöld, A. (Physik der Sternatmosphären) 458.
- Urabe, M. (Supplement to „Infinitesimal deformation of periodic solution“) 316.
- and Sh. Mise (Numerical integration of analytic differential equations) 357.
- Urazbaev, B. M. (Anzahl der Abelschen Körper vom Typus (l, l, \dots, l)) 19.
- Urbanik, K. (Stochastic model of a cascade) 112; (Anzahl von Partikeln in stochastischen Schauern) 229.
- s. M. Fisz 366.
- Uspenskij, V. A. (Abzählbare Mengen) 3.
- Vaccaro, G. (Calotte superficiali) 141; (Superficie degli spazi a 4 e 5 dimensioni) 141.
- Vaidya, P. C. (Relativity field of a star) 207.
- Vajnštejn, B. K. (Kinematische Streuung der Elektronen) 236.
- Válcovici, V. (Mouvement d'un solide à liaisons) 168.
- Valkenburg, M. E. van (Network analysis) 195.
- Vanderburg, B. s. K. Knopp 287.
- Varga, O. (T. Szele) 247.
- Vasilache, S. (Problèmes des infiltrations) 184.
- Veblen, O. (Foundations of geometry) 124.
- Vermes, P. (Infinite matrices) 286.
- Vertgejm, B. A. und G. A. Ostroumov (Optische Inhomogenitäten) 199.
- Vescăn, T. T., El. Mihul et G. Ioniță (Relativité généralisée) 206.
- Vesentini, E. (Punti stazionari di forme differenziali mero-morfe) 413.
- Veubeke, B. M. Fraeys de s. Fraeys de Veubeke, B. M. 95.
- Vigneaux, Ernesto Corominas s. Corominas Vigneaux, Ernesto 284.
- Vijayaraghavan, T. s. C. T. Rajagopal 289.
- Ville, M. J. (Algèbre de Boole) 264; (Principes d'analyse matricielle) 367.
- Vincensini, M. P. (Transformations projectives de l'espace réglé) 142.
- Vinti, C. s. E. Baiada 33.
- Visconti, A. (Équations linéaires opératoires) 213.
- and H. Umezawa (Scattering problems) 213.
- Viterbo, G. (Concetto di derivata) 34.
- Vivier, M. (Structures unitaires) 7.
- Vlasov, A. A. (Makroskopische Elektrodynamik) 436.
- Volosov, V. M. (Systeme von Differentialgleichungen) 70.
- Volta, V. Dalla s. Dalla Volta, V. 395.
- Vowels, R. E. (Cascaded four-terminal networks) 437.
- Vrănceanu, G. (Factorisation de la sphère S_{2n+1}) 395.
- Vranić, V. (Méthodes statistiques) 114.
- Vries, H. de s. J. de Groot 405.
- Wada, H. (Local connectivity of mapping spaces) 158.
- Waerden, B. L. van der (Algebra. I. II.) 5.
- Walker, Gordon L. s. Harold Osterberg 362.
- Wallace, A. D. (One-dimensional homogeneous clans) 262.
- Walsh, J. E. (Probability values for observed number of „successes“) 117.
- Walther, E. s. L. Couffignal 98.
- Wang, Hao (Formalization) 249.
- s. G. Kreisel 252.
- Ward, M. (Primes in a cubic recurrence) 275.
- T. G. C. and G. W. Blakey (Slide rule) 360.
- Warner, S. (Locally multiplicatively-convex algebras) 87.
- Warschawski, S. E. s. P. C. Rosenbloom 48.
- Washio, Y. (Weighted power function) 115.
- Wasow, W. s. R. M. Redheffer 61.
- Watanabe, Satosi (Symmetry of physical laws. I—III.) 212.
- Sh. (Infinitesimal deformations of curves) 149.
- Yoshikatsu s. Tetsuo Kudō 115.
- Waugh, W. A. O'N. (Birth and death process) 121.
- Weier, J. (Randsingularitäten von Abbildungen offener Mengen in sich) 151; (Unwesentliche Singularitäten) 408; (Plane vector fields) 409.
- Weinberg, St. ($N-V$ potential in the Lee model) 220.
- Weinstein, A. (Sturm-Liouville theory) 64; (Axial symmetry in partial differential equations) 319.
- Weirich, H. (Trägheitspol) 170.
- Weisner, L. (Group-theoretic origin of generating functions) 294.
- Weismann, A. (Espaces métriques relativistes) 205.
- Weneser, J. s. M. Goldhaber 453.
- Wermer, J. (Polynomial approximation on an arc) 50.
- Werner, J. s. I. M. Singer 351.
- Westcott, C. H. (Neutron flux and nuclear cross-sections) 455.
- Wheeler, A. D. (Summation of finite series) 292.
- Whitehead, G. W. (Homology suspension) 412.

- Whitehead, J. H. C. s. I. M. James 159.
- Whyburn, G. T. (Topological analysis) 52.
- Wick, G. C. (Recent work in meson theory) 222.
- Wiehle, H. R. s. George Springer 403.
- Wigner, E. P. (Characteristic vectors of bordered matrices) 84.
- Wijngaarden, A. van s. E. W. Dijkstra 362.
- Williams, R. F. (Unstable homeomorphisms) 154.
- Wilson, E. M. (Formulae for multiseccants) 131.
- Winer, Ben J. (Overlapping groups) 120.
- Winkler, H. (Funktionstransformatoren) 361.
- Wintner, Aurel s. Philip Hartman 79, 326.
- Wittich, H. (Eindeutige analytische Funktionen) 55.
- Wittmeyer, H. (Eigenwerte eines algebraischen linearen Eigenwertproblems) 355.
- Wong, Y. K. (Proper values of a matrix) 255.
- Woods, F. S. (Non-Euclidean geometry) 124.
- Wu, Ta-You and G. E. Tauber („Contact interaction“) 209.
- Yamamoto, K. (Arithmetic linear transformations) 23.
- S. (Sampling with probabilities proportionate to given values) 373.
- Yamanaka, T. (Théorie des distributions. I.) 348.
- Yamanoshita, T. (Unstable homotopy groups of spheres) 158.
- Yamazaki, K. s. Y. Katayama 211.
- Yang, Chung-Tao (Theorems of Borsuk-Ulam. II.) 152; (Continuous functions) 152.
- Yano, K. (Affine connexions in almost Hermitian spaces) 399.
- s. Nocilaas H. Kuiper 398.
- s. Shigeo Sasaki 147.
- s. J. A. Schouten 397, 398, 399.
- Year book of the Physical Society 1955. 166.
- Yeh, G. C. K., J. Martinek and G. S. S. Ludford (Potentials due to certain singularities) 82.
- Yekutieli, G. s. H. P. Noyes 215.
- Yomogita, Kazuo s. Kazu Hasegawa 222.
- Yoshinaga, Kyôichi s. Tôzîrô Ogasawara 352.
- Yoshizawa, T. (System of differential equations) 315; (Boundedness of solutions of $x' = F(t, x)$) 315.
- Young, A. D. and S. Kirkby (Drag of biconvex wings at supersonic speeds) 424.
- J. W. A. (Theory of numbers) 21.
- Zaidman, S. (Distance entre les zéros des solutions des équations différentielles) 62.
- Zakon, E. (Fraction of ordinal numbers) 30.
- Zanaboni, O. (Risoluzione approssimata delle equazioni differenziali ordinarie) 356.
- Zaremba, S. K. s. Z. A. Lomnicki 108.
- Zeeman, E. C. (Direct sums of free cycles) 11.
- Zeuli, T. (Oscillazioni magnetoidrodinamiche in una massa liquida) 445.
- Zięba A. s. Jan Mycielski 366.
- Zieleźny, Z. (Valeur d'une distribution dans un point) 345.
- Zuchovickij, S. I. (Čebyševsche Approximationen) 89.
- Žuravlev, P. A. (Methode von S. A. Christianovič) 419.
- Zwinggi, E. (Assicurazione mista) 122.